

15 Relativiteit

vwo

15.1 Relativiteit volgens Galileo Galilei

- 1*** a Leg uit of deze vier beweringen alle vier tegelijkertijd waar kunnen zijn.
- eerste streepje: gezien vanuit Anna die vindt dat ze stilstaat → waar
 - tweede streepje: gezien vanuit het referentiestelsel van Anna → waar
 - derde streepje: gezien vanuit Bea die vindt dat ze stilstaat → waar
 - vierde streepje: gezien vanuit het referentiestelsel van Bea → waar
- 2**** a Bereken hoeveel procent deze afgeronde lichtsnelheid afwijkt van de werkelijke lichtsnelheid in vacuüm.
- werkelijke lichtsnelheid is 299.792.458 m/s
 - $\frac{3,0 \cdot 10^8 - 299.792.458}{3,0 \cdot 10^8} = \frac{2,07542 \cdot 10^5}{3,0 \cdot 10^8} = 6,918 \cdot 10^{-4}$
 - de afwijking is $6,918 \cdot 10^{-4} \cdot 100\% = 0,069\%$
- 3**** a Leg uit waar de appel terecht komt:
- achter Bea's voeten, want Bea beweegt tijdens het vallen naar voren
 - vóór Bea's voeten, want de appel beweegt tijdens het vallen naar voren
 - **op Bea's voeten**
 - in het referentiestelsel van Bea staat Bea stil en valt de appel recht naar beneden op haar voeten
 - in het referentiestelsel van Anna op de grond beweegt tijdens het vallen zowel de trein als de appel over dezelfde horizontale afstand
 - ook volgens Anna valt de appel op Bea's voeten
- b Volgens Bea beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
 - **in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden**
 - in een kromme baan met een constante snelheid
 - in een kromme baan met een constante versnelling
 - anders, namelijk
 - in het referentiestelsel van Bea staat Bea stil
 - volgens Bea valt de appel recht naar beneden
 - door de zwaartekracht heeft de appel een constante versnelling
 - de bewering achter het tweede streepje is correct
- c Volgens Anna beweegt de appel:

- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
 - in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
 - in een kromme baan met een constante snelheid
 - in een kromme baan met een constante versnelling
 - anders, namelijk
 - in het referentiestelsel van Anna heeft Bea een constante snelheid
 - volgens Anna heeft de appel een beginsnelheid gelijk aan die van de trein
 - door de zwaartekracht heeft de appel een constante versnelling naar beneden
 - volgens Anna beweegt de appel in een kromme baan met horizontaal een constante snelheid en verticaal een constante versnelling
 - de bewering achter het vijfde streepje is correct
- d** Zijn Anna en Bea het eens over de aard van de beweging?
- volgens Bea beweegt de appel in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
 - volgens Anna beweegt de appel met een parabolische baan met horizontaal een constante snelheid en verticaal een constante versnelling
 - Anna en Bea zijn het niet eens over de aard van de beweging

4**

- a** Leg uit waar de appel terecht komt:
- achter Bea's voeten, want Bea beweegt tijdens het vallen naar voren
 - vóór Bea's voeten, want tijdens het vallen remt Bea af
 - op Bea's voeten
 - op het moment van loslaten krijgt de appel een beginsnelheid in de rijrichting
 - tijdens het vallen behoudt de appel deze horizontale snelheid
 - tijdens het vallen neemt de snelheid van de trein af
 - de appel valt vóór Bea's voeten, want tijdens het vallen remt Bea af
- b** Volgens Bea beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
 - in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
 - in een kromme baan met een constante snelheid
 - in een kromme baan met een constante versnelling
 - anders, namelijk
 - in het referentiestelsel van Bea staat Bea stil en werkt er een kracht naar voren
 - volgens Bea wordt de appel naar voren versnelt door deze kracht
 - door de zwaartekracht heeft de appel een constante versnelling naar beneden
 - de appel wordt zowel naar voren als naar beneden versneld
 - het vierde streepje is correct
- c** Volgens Anna beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
 - in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
 - in een kromme baan met een constante snelheid
 - in een kromme baan met een constante versnelling
 - anders, namelijk
 - in het referentiestelsel van Anna heeft Bea een constante vertraging

- volgens Anna heeft de appel een beginsnelheid gelijk aan die van de trein op het moment van loslaten
 - door de zwaartekracht heeft de appel een constante versnelling naar beneden
 - volgens Anna beweegt de appel in een kromme baan met horizontaal een constante snelheid en verticaal een constante versnelling naar beneden
 - het vijfde streepje is correct
- d** Zijn Anna en Bea het eens over de aard van de beweging?
- volgens Bea heeft de appel een horizontale versnelling en een versnelling naar beneden
 - volgens Anna beweegt de appel met een parabolische baan met horizontaal een constante snelheid en verticaal een constante versnelling
 - Anna en Bea zijn het niet eens over de aard van de beweging

5***

- a** Leg uit waar de appel volgens Bea terecht komt:
- achter Anna's voeten
 - vóór Anna's voeten
 - **op Anna's voeten**
- Anna ziet de appel naar beneden vallen op haar voeten
 - Bea ziet dezelfde gebeurtenis
 - ook voor Bea valt de appel op Anna's voeten
- b** Volgens Bea beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
 - in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
 - in een kromme baan met een constante snelheid
 - **in een kromme baan met een constante versnelling**
 - anders, namelijk
- volgens Bea hebben Anna en de appel een constante versnelling naar voren
 - als de appel valt heeft deze ook een constante versnelling naar beneden
 - de appel wordt zowel naar voren als naar beneden versneld
 - het vierde streepje is correct
- c** Volgens Anna beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
 - **in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden**
 - in een kromme baan met een constante snelheid
 - in een kromme baan met een constante versnelling
 - anders, namelijk
- door de zwaartekracht versnelt de appel naar beneden
 - het tweede streepje is correct
- d** Zijn Anna en Bea het eens over de aard van de beweging?
- volgens Bea heeft de appel een versnelling naar voren en een versnelling naar beneden
 - volgens Anna beweegt de appel in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
 - Anna en Bea zijn het niet eens over de aard van de beweging

6*

- a** Leg uit wat het verschil is tussen deze twee soorten stelsels.
- een inertiaal referentiestelsel beweegt met een constante snelheid in een rechte lijn
 - een niet-inertiaal referentiestelsel heeft een versnelling of vertraging, of beweegt in een kromme baan
- b** Beschrijf deze postulaten in je eigen woorden.
- POSTULAAT 1
 - inertiaal referentiestelsels zijn natuurkundig aan elkaar gelijk
 - bij inertiaal referentiestelsels geven alle natuurkundige waarnemingen hetzelfde resultaat
 - POSTULAAT 2
 - de lichtsnelheid in vacuüm heeft voor iedere waarnemer dezelfde waarde
 - het meten van de lichtsnelheid in vacuüm geeft geen informatie over de snelheid van de waarnemer of de snelheid van de lichtbron

7**

- a** Zijn de drie wetten van Newton hiermee in overeenstemming?
- $\Sigma F = 0 \leftrightarrow a = 0$
 - is er geen versnelling dan is er ook geen resulterende kracht
 - de snelheid van het inertiaal referentiestelsel heeft geen invloed op de aanwezige krachten
 - $\Sigma F = m \cdot a$
 - de versnelling van een voorwerp is onafhankelijk van de snelheid van het referentiestelsel
 - in ieder inertiaal referentiestelsel zijn de krachten op een voorwerp aan elkaar gelijk
 - $F_{A \rightarrow B} = -F_{B \rightarrow A}$
 - de snelheid van het inertiaal referentiestelsel heeft geen invloed op de aanwezige krachten
 - er is overeenstemming tussen het relativiteitsprincipe van Galilei en de wetten van Newton
- b** Bedenk een onrealistische gebeurtenis dat hiervan een consequentie zou zijn.
- als je iets in een vliegtuig laat vallen zou het met 1000 km/h naar achteren vliegen
 - de aarde beweegt met 100.000 km/h om de zon → als je iets laat vallen vliegt het met 100.000 km/h van je vandaan

8**

- a** Hoe groot is de snelheid van schip A gezien vanuit schip B?
- iedere seconde neemt de afstand tussen A en B met 2 meter toe
 - gezien vanuit B heeft schip A een constante snelheid van 2 m/s naar het Zuiden
- b** Hoe groot is de snelheid van schip B gezien vanuit schip A?
- iedere seconde neemt de afstand tussen A en B met 2 meter toe
 - gezien vanuit A heeft schip B een constante snelheid van 2 m/s naar het Noorden

- c** Hoe kan de stuurman van schip A weten dat hij met 3 m/s vaart?
- door zijn snelheid te meten ten opzichte van een vast punt op aarde zoals een vuurtoren
 - door zijn snelheid te meten ten opzichte van het water en er van uitgaan dat het water stilstaat
 - door zijn snelheid te meten ten opzichte van het water en daarna rekening houden met de stroomsnelheid van het water
- d** Kan de kapitein hierin gelijk hebben?
- dat kan omdat ze het niet eens hoeven te zijn over de snelheid van het referentiepunt, zoals de vuurtoren of het water
- e** Kan de matroos hierin gelijk hebben?
- dat kan omdat ze het niet eens hoeven te zijn over de snelheid van het referentiepunt, zoals de vuurtoren of het water
- f** Hoe groot is de snelheid van de albatros volgens de bemanning van schip B.
- de snelheid van B ten opzichte van A is: $v_{AB} = 2$ m/s naar het Noorden
 - volgens B heeft de albatros een snelheid van 14 m/s naar het Zuiden
- g** Bereken de kinetische energie van de albatros volgens de bemanningen op de schepen A en B.
- $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ met $m = 3,0$ kg
 - schip A: $E_k = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12^2 = 216$ J
 - schip B: $E_k = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 14^2 = 294$ J
- h** Hoeveel kinetische energie heeft de albatros in het echt?
- de waargenomen snelheid is afhankelijk van het gekozen referentiestelsel
 - er bestaat geen objectieve "echte" snelheid
 - deze vraag heeft geen antwoord

9**

- a** Hoe snel gaan deze fotonen ten opzichte van elkaar volgens Newton.
- volgens Newton moeten de snelheden bij elkaar worden opgeteld
 - volgens Newton hebben de fotonen een snelheid van $6,0 \cdot 10^8$ m/s ten opzichte van elkaar
- b** Hoe snel gaan deze fotonen ten opzichte van elkaar volgens Einstein.
- volgens Einstein is de lichtsnelheid voor iedere waarnemer hetzelfde
 - volgens Einstein hebben de fotonen een snelheid van $3,0 \cdot 10^8$ m/s ten opzichte van elkaar

15.2 Gelijktijdigheid, tijdrek en lengtekrimp

1**

a Hoe groot is de snelheid van het stelsel van Bea volgens Anna?

- $\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- $\gamma = 2 \rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 4 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
- $1 - \frac{v^2}{c^2} = 0,25 \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 0,75 \rightarrow v^2 = 0,75 \cdot c^2 \rightarrow v = 0,866 \cdot c$

b Ziet Bea dat de tijd in het stelsel van Anna twee keer sneller gaat dan in haar eigen stelsel?

- nee, volgens Bea beweegt het stelsel van Anna
- volgens Bea is de tijd in het stelsel van Anna twee keer trager

c Hoe groot is de snelheid van dit stelsel?

- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 10 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 100 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$
- $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{100} = 0,01 \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - 0,01 = 0,99$
- $v^2 = 0,99 \cdot c^2 \rightarrow v = \sqrt{0,99} \cdot c \rightarrow v = 0,995 \cdot c$

2***

a Hoeveel jaar duurt de reis volgens Anna?

- $s = 4,0 \cdot 10^{16} \text{ m} \mid v_{\text{gem}} = 0,5 \cdot c = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s} \mid t = \dots \text{ s}$
- $s = v_{\text{gem}} \cdot t \rightarrow 4,0 \cdot 10^{16} = 1,5 \cdot 10^8 \cdot t \rightarrow t = 2,66666 \cdot 10^8 \text{ s}$
- een jaar heeft $365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3,15576 \cdot 10^7 \text{ s}$
- $t = \frac{2,66666 \cdot 10^8}{3,15576 \cdot 10^7} = 8,45016 = 8,45 \text{ jaar}$

b Hoeveel jaar verschil is er tussen de tijd volgens Anna en de tijd volgens Bea?

- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25}} \rightarrow \gamma = 1,1547$
- $\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$
- $\Delta t_{\text{Bea}} = \Delta t_e$ en $\Delta t_{\text{Anna}} = \Delta t_b$ **Anna ziet de klok van Bea bewegen**
- $\Delta t_{\text{Anna}} = 1,1547 \cdot \Delta t_{\text{Bea}} \rightarrow 8,45 = 1,1547 \cdot \Delta t_{\text{Bea}} \rightarrow \Delta t_{\text{Bea}} = 7,317918 \text{ jaar}$
- het verschil is $8,45 - 7,318 = 1,13 \text{ jaar}$

c Leg uit waarom niet.

- Anna ziet op haar klok dat Bea in één seconde $0,5 \cdot c$ meter verplaatst
- Bea ziet op haar klok dat Anna in één seconde $0,5 \cdot c$ meter verplaatst
- bewegen is relatief (een relatie tussen twee voorwerpen) → wie van de twee beweegt en wie stilstaat is niet vast te stellen

d Welke conclusie trekt Bea?

- de snelheid van de raket is $0,5 \cdot c$ en de tijd is volgens Bea minder dan de tijd volgens Anna
- conclusie → de afstand tot de exoplaneet is volgens Bea minder dan $4,00 \cdot 10^{16}$ m

e Hoe groot is de afstand tot de exoplaneet volgens Bea?

- Bea ziet de exoplaneet op haar afkomen → gezien vanuit Bea is er lengtekrimp

- $L_b = \frac{L_e}{\gamma}$ met $L_b = L_{\text{Bea}}$ en $L_e = L_{\text{Anna}}$

- $L_{\text{Bea}} = \frac{L_{\text{Anna}}}{\gamma} \rightarrow L_{\text{Bea}} = \frac{4,00 \cdot 10^{16}}{1,1547} = 3,4641 \cdot 10^{16} = 3,46 \cdot 10^{16} \text{ m}$

3***

a Ben je het met Anna eens?

- nee, want Anna houdt geen rekening met tijdrek als Bea naar Sagittarius reist
- bij voldoende grote snelheid kan Bea de afstand in een mensenleven overbruggen

b Welke snelheid heeft Bea gebruikt in haar berekening?

- Bea gaat uit van een tijdrek met een factor 1000

- $\gamma = 1000 \quad | \quad v = \dots \text{ m/s}$

- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1000 \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10^6$

- $1 - \frac{v^2}{c^2} = 10^{-6} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - 10^{-6} = 9,99999 \cdot 10^{-1}$

- $v^2 = 9,99999 \cdot 10^{-1} \cdot c^2 \rightarrow v = \sqrt{9,99999 \cdot 10^{-1}} \cdot c \rightarrow v = 9,999995 \cdot c$

c Is Anna gerustgesteld met de belofte dat ze een bericht ontvangt van Bea?

- nee want voor Anna duurt de reis van Bea minstens 25.900 jaar en heeft het bericht ook 25.900 jaar nodig om naar de aarde te reizen
- Anna kan pas na 51.800 jaar bericht verwachten en dan leeft ze allang niet meer

4****

a Bereken de omtrek van de ringvormige tunnel.

- cirkel: omtrek = $2\pi \cdot r = \pi \cdot d$
- omtrek = $\pi \cdot 8,4858 \cdot 10^3 = 2,6658927 \cdot 10^4 = 2,6659 \cdot 10^4 \text{ m}$

b Bereken de maximale snelheid van de protonen.

- afstand per seconde $2,66589 \cdot 10^4 \cdot 11245 = 2,997796 \cdot 10^8 \text{ m}$
- $v = 2,997796 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

c Bereken hoeveel procent deze snelheid verschilt van de lichtsnelheid.

- opzoeken $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- verschil $\Delta v = 2,99792458 \cdot 10^8 - 2,997796 \cdot 10^8 = 1,282456 \cdot 10^4 \text{ m/s}$
- $\frac{\Delta v}{c} \cdot 100\% = \frac{1,282456 \cdot 10^4}{2,99792458 \cdot 10^8} \cdot 100 = 4,2778 \cdot 10^{-3} \%$

d Bereken de omtrek van de ring gezien vanuit het referentiestelsel van de protonen.

- $\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{2,997796 \cdot 10^8}{2,99792458 \cdot 10^8} \right)^2 = 0,999914$
- $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - 0,999914} = \sqrt{8,57775 \cdot 10^{-5}} = 9,261614 \cdot 10^{-3}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \gamma = \frac{1}{9,261614 \cdot 10^{-3}} = 1,079725 \cdot 10^2$
- lengtekrimp $L_b = \frac{L_e}{\gamma}$ met $L_b = L_{\text{protonen}}$ en $L_e = L_{\text{grond}}$
- $L_{\text{protonen}} = \frac{2,6658927 \cdot 10^4}{1,079725 \cdot 10^2} = 2,469047 \cdot 10^2 = 246,9 \text{ m}$

e Bereken het aantal doorlopen per seconde gezien vanuit het referentiestelsel van de protonen.

- de tijd van één doorloop gezien vanaf de grond is $\frac{1}{11245} = 8,89284 \cdot 10^{-5} \text{ s}$
- $\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$ met $\Delta t_b = \Delta t_{\text{grond}}$ en $\Delta t_e = \Delta t_{\text{protonen}}$
- $8,89284 \cdot 10^{-5} = 1,079725 \cdot 10^2 \cdot \Delta t_e \rightarrow \Delta t_e = 8,236208 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

f Bereken de snelheid van grond gezien vanuit de protonen.

- $\Delta x = 246,9 \text{ m} \mid \Delta t = 8,236208 \cdot 10^{-7} \text{ s} \mid v = \dots \text{ m/s}$
- $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{2,469047 \cdot 10^2}{8,236208 \cdot 10^{-7}} = 2,997796 \text{ m/s}$

5**

a Leg uit dat als v_{AB} veel kleiner is dan de lichtsnelheid de formule van Einstein hetzelfde resultaat geeft als de formule van Galileo.

- $v_{BA} \ll c \rightarrow v_B \cdot v_{BA} \ll c^2 \rightarrow \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2} \ll 1$
- $v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}} \approx \frac{v_B + v_{BA}}{1} = v_B + v_{BA} \rightarrow v_A \approx v_B + v_{BA}$

6**

- a** Bereken de snelheid van de naar voren geschoten protonen zoals waargenomen door Anna.
- de richting waarin Bea volgens Anna beweegt noemen we positief
 - de naar voren geschoten elektronen hebben een snelheid in dezelfde richting en hebben dus een positieve snelheid
 - v_A is de snelheid van deze elektronen volgens Anna | v_B is de snelheid van deze elektronen volgens Bea

$$v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$$

- invullen: $v_B = 0,5c$ en $v_{BA} = 0,5c$

$$v_A = \frac{0,5c + 0,5c}{1 + \frac{0,5c \cdot 0,5c}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{c}{1 + \frac{0,25c^2}{c^2}} = \frac{c}{1 + 0,25} = \frac{c}{1,25}$$

$$v_A = \frac{c}{1,25} = 0,8c \text{ m/s}$$

- b** Bereken de snelheid van de naar achteren geschoten protonen zoals waargenomen door Anna.

- de protonen hebben volgens Bea een snelheid van $-0,5c$

$$v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$$

- invullen: $v_B = -0,5c$ en $v_{BA} = 0,5c$

$$v_A = \frac{-0,5c + 0,5c}{1 + \frac{-0,5c \cdot 0,5c}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{0}{1 - 0,25} \rightarrow v_A = 0 \text{ m/s}$$

- c** Bereken opnieuw de snelheid van de naar achteren geschoten protonen zoals waargenomen door Anna.

- de protonen hebben volgens Bea een snelheid van $-0,8c$

$$v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$$

- invullen: $v_B = -0,8c$ en $v_{BA} = 0,5c$

$$v_A = \frac{-0,8c + 0,5c}{1 + \frac{-0,8c \cdot 0,5c}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{-0,3c}{1 - 0,4} \rightarrow v_A = \frac{-0,3c}{0,6} = -0,5c \text{ m/s}$$

7***

- a** Bereken de snelheid van het voorwerp volgens Anna.

- de richting waarin Bea volgens Anna beweegt noemen we positief
- Bea ziet een voorwerp dat beweegt in dezelfde richting met snelheid v_B

$$v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$$

- invullen: $v_B = 0,8c$ en $v_{BA} = 0,5c$

- $v_A = \frac{0,8c + 0,5c}{1 + \frac{0,8c \cdot 0,5c}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{1,3c}{1 + \frac{0,4c^2}{c^2}} = \frac{1,3c}{1 + 0,4} = \frac{1,3c}{1,4}$
- $v_A = \frac{1,3}{1,4} \cdot c = 0,93 \cdot c \text{ m/s}$

b Bereken de snelheid die Bea waarneemt.

- de richting waarin Bea volgens Anna beweegt noemen we positief
- Anna ziet een voorwerp dat beweegt in dezelfde richting met snelheid v_A

- $v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$

- invullen: $v_A = 0,8c$ en $v_{BA} = 0,5c$

- $0,8c = \frac{v_B + 0,5c}{1 + \frac{v_B \cdot (0,5c)}{c^2}} \rightarrow 0,8c \cdot \left(1 + \frac{v_B \cdot (0,5c)}{c^2}\right) = v_B + 0,5c$

- $0,8c + 0,8c \cdot \frac{0,5c \cdot v_B}{c^2} = v_B + 0,5c$

- $0,8c + 0,4v_B = v_B + 0,5c \rightarrow 0,6v_B = 0,3c$

- $v_B = \frac{0,3}{0,6} c = 0,5c \text{ m/s}$

c Bereken de snelheid die Bea waarneemt.

- de richting waarin Bea volgens Anna beweegt noemen we positief
- Anna ziet een voorwerp dat beweegt in tegengestelde richting met snelheid v_A

- $v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$

- invullen: $v_A = -0,8c$ en $v_{BA} = 0,5c$ minteken vanwege tegengestelde richting

- $-0,8c = \frac{v_B + 0,5c}{1 + \frac{v_B \cdot (+0,5c)}{c^2}} \rightarrow -0,8c \cdot \left(1 + \frac{v_B \cdot (0,5c)}{c^2}\right) = v_B + 0,5c$

- $-0,8c - 0,8c \cdot \frac{0,5c \cdot v_B}{c^2} = v_B + 0,5c$

- $-0,8c - 0,4v_B = v_B + 0,5c \rightarrow 1,4v_B = -1,3c$

- $v_B = \frac{-1,3}{1,4} \cdot c = -0,93c$ minteken vanwege tegengestelde richting

8**

a In welke gevallen komen de uitkomsten van de twee formules overeen?

- $\frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}} = v_B + v_{BA} \rightarrow \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2} = 0$

- $\frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2} = 0 \rightarrow v_B = 0 \text{ of } v_{BA} = 0$

b Stel $v_{BA} = c$, welke relatie geldt er dan tussen v_A en v_B ?

- $v_A = \frac{v_B + c}{1 + \frac{v_B \cdot c}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{v_B + c}{1 + \frac{v_B}{c}}$
- vermenigvuldig aan de rechterkant teller en noemer met c

$$v_A = \frac{c}{c} \cdot \frac{v_B + c}{1 + \frac{v_B}{c}} \rightarrow v_A = c \cdot \frac{v_B + c}{c + v_B} = c \cdot \frac{v_B + c}{v_B + c} \rightarrow v_A = c$$
- vul in: $v_A = c \rightarrow c = \frac{v_B + c}{1 + \frac{v_B}{c}} \rightarrow c = \frac{v_B + c}{1 + \frac{v_B}{c}}$
- kruislings vermenigvuldigen : $c \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = v_B + c$
- $c + v_B = v_B + c \rightarrow v_B = v_B$
- dit is waar voor iedere waarde van v_B
- als $v_{BA} = c$ geldt voor iedere snelheid v_B dat $v_A = c$

9***

- a** Hoe groot is de snelheid van het licht van dit sterrenstelsel zoals waargenomen op aarde?
- de richting waarin het sterrenstelsel volgens ons beweegt noemen we positief
 - een waarnemer in dit sterrenstelsel ziet licht met een snelheid $v_B = -c$
 - $$v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$$
 - invullen: $v_B = -c$ en $v_{BA} = \frac{2}{3}c$
 - $$v_A = \frac{-c + \frac{2}{3}c}{1 + \frac{-c \cdot \frac{2}{3}c}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{-\frac{1}{3}c}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}c}{\frac{1}{3}} = -c$$
- b** Kan het licht van het ene stelsel het andere stelsel ooit bereiken?
- geen enkel voorwerp heeft een snelheid groter dan de lichtsnelheid
 - een waarnemer op een sterrenstelsels ziet het andere sterrenstelsel met een snelheid kleiner dan c
 - voor deze waarnemer heeft het licht snelheid c en kan dit het andere sterrenstelsel inhalen
- c** Bereken de onderlinge snelheid van de stelsels.
- stelsel 1 heeft een positieve snelheid $v_{BA} = \frac{2}{3}c$ ten opzichte van de aarde
 - stelsel 2 heeft een negatieve snelheid van $v_A = -\frac{2}{3}c$ ten opzichte van de aarde
 - v_B is de snelheid van stelsel 2 ten opzichte van een waarnemer op stelsel 1
 - $$v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$$
 - $v_A = -\frac{2}{3}c$ en $v_{BA} = \frac{2}{3}c$
 - $$-\frac{2}{3}c = \frac{v_B + \frac{2}{3}c}{1 + \frac{v_B \cdot \frac{2}{3}c}{c^2}} \rightarrow -\frac{2}{3}c \cdot \left(1 + \frac{v_B \cdot \frac{2}{3}c}{c^2}\right) = v_B + \frac{2}{3}c \rightarrow -\frac{2}{3}c - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}v_B = v_B + \frac{2}{3}c$$
 - $$-\frac{6}{9}c - \frac{4}{9}v_B = \frac{9}{9}v_B + \frac{6}{9}c \rightarrow -6c - 4v_B = 9v_B = 6c$$

- $-13v_B = 12c \rightarrow v_B = -\frac{12}{13}c$

minteken want gezien vanuit stelsel 1 beweegt stelsel 2 in negatieve richting

10***

a Bereikt de kogel de boeven volgens Galilei?

- v_A is de snelheid van de kogel volgens waarnemer A op de grond
- v_B is de snelheid van de kogel volgens de agenten (waarnemer B)
- v_{BA} is de snelheid van de agenten (politieauto) ten opzichte van de grond
- galileo-transformatie: $v_A = v_B + v_{BA}$
- $v_A = \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}c \rightarrow v_A = \frac{2}{6}c + \frac{3}{6}c = \frac{5}{6}c$
- $\frac{5}{6}c$ is groter dan $\frac{3}{4}c$, dus de kogel bereikt de boeven

b Bereikt de kogel de boeven volgens Einstein?

- $v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$
- $v_B = \frac{1}{3}c$ en $v_{BA} = \frac{1}{2}c$
- $v_A = \frac{\frac{1}{3}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{\frac{1}{3}c \cdot \frac{1}{2}c}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{\frac{2}{6}c + \frac{3}{6}c}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}c}{\frac{7}{6}} = \frac{5}{7}c$
- $\frac{5}{7}c$ is kleiner dan $\frac{3}{4}c$, dus de kogel zal de boeven niet bereiken

c Vul de lege cellen van onderstaande tabel.

op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder

- grond ten opzichte van grond = 0
- politie ten opzichte van politie = 0
- boeven ten opzichte van boeven = 0
- kogel ten opzichte van kogel = 0

kogel ten opzichte van de grond

- is berekend bij vraag b $\rightarrow v_A = \frac{5}{7}c$

boeven ten opzichte van de politie

- v_A is de snelheid van de boeven ten opzichte van de grond = $\frac{3}{4}c$
- v_B is de snelheid van de boeven ten opzichte van de politie = ???
- v_{AB} is de snelheid van de politie ten opzichte van de grond = $\frac{1}{2}c$
- $v_A = \frac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- $v_A = \frac{3}{4}c$ en $v_{AB} = \frac{1}{2}c$
- $\frac{3}{4}c = \frac{v_B + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{v_B \cdot \frac{1}{2}c}{c^2}} \rightarrow \frac{3}{4}c \cdot \left(1 + \frac{v_B \cdot \frac{1}{2}c}{c^2}\right) = v_B + \frac{1}{2}c$
- $\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c \cdot \left(\frac{v_B \cdot \frac{1}{2}c}{c^2}\right) = v_B + \frac{1}{2}c \rightarrow \frac{3}{4}c + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}v_B = v_B + \frac{1}{2}c \rightarrow \frac{6}{8}c + \frac{3}{8}v_B = v_B + \frac{4}{8}c$
- $\frac{2}{8}c = \frac{5}{8}v_B \rightarrow 2c = 5v_B \rightarrow v_B = \frac{2}{5}c$

kogel ten opzichte van de boeven

- v_A is de snelheid van de kogel ten opzichte van de grond = $\frac{5}{7}c$ (zie vraag b)
- v_B is de snelheid van de kogel ten opzichte van de boeven = ???
- v_{AB} is de snelheid van de boeven ten opzichte van de grond = $\frac{3}{4}c$
- $v_A = \frac{5}{7}c$ en $v_{AB} = \frac{3}{4}c$
- $$v_A = \frac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$$
- $$\frac{5}{7}c = \frac{v_B + \frac{3}{4}c}{1 + \frac{v_B \cdot \frac{3}{4}c}{c^2}} \rightarrow \frac{5}{7}c \cdot \left(1 + \frac{v_B \cdot \frac{3}{4}c}{c^2}\right) = v_B + \frac{3}{4}c \rightarrow \frac{5}{7}c + \frac{5}{7}c \cdot \left(\frac{v_B \cdot \frac{3}{4}c}{c^2}\right) = v_B + \frac{3}{4}c$$
- $$\frac{5}{7}c + \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4}v_B = v_B + \frac{3}{4}c \rightarrow \frac{20}{28}c + \frac{15}{28}v_B = v_B + \frac{21}{28}c \rightarrow 20c + 15v_B = 28v_B + 21c$$
- $-13v_B = c \rightarrow v_B = -\frac{1}{13}c$
- minteken $\rightarrow$ de afstand tussen de boeven en de kogel neemt toe dus de kogel bereikt de boeven niet (zie vraag b)

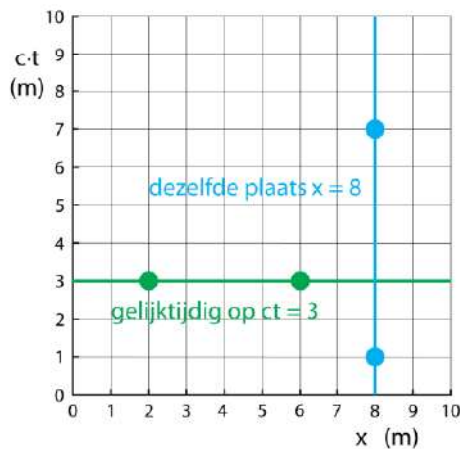
onder de diagonaal

- (politie ten opzichte van grond) = - (grond ten opzichte van politie)
- (boeven ten opzichte van grond) = - (grond ten opzichte van boeven)
- (kogel ten opzichte van politie) = - (politie ten opzichte van kogel)
- algemeen: zie je een bewegend voorwerp met snelheid v dan ziet een waarnemer op dit voorwerp dat jij beweegt met snelheid $-v$

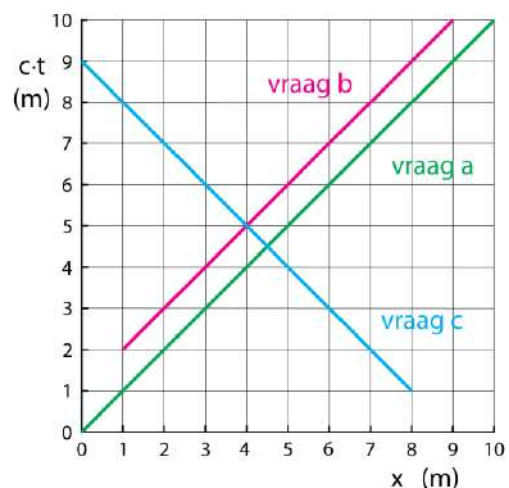
snelheid van $\rightarrow$ t.o.v. $\downarrow$	grond	politie	boeven	kogel
grond	0	$\frac{1}{2}c$	$\frac{3}{4}c$	$\frac{5}{7}c$
politie	$-\frac{1}{2}c$	0	$\frac{2}{5}c$	$\frac{1}{3}c$
boeven	$-\frac{3}{4}c$	$-\frac{2}{5}c$	0	$-\frac{1}{13}c$
kogel	$-\frac{5}{7}c$	$-\frac{1}{3}c$	$\frac{1}{13}c$	0

15.3 Ruimtetijd diagram

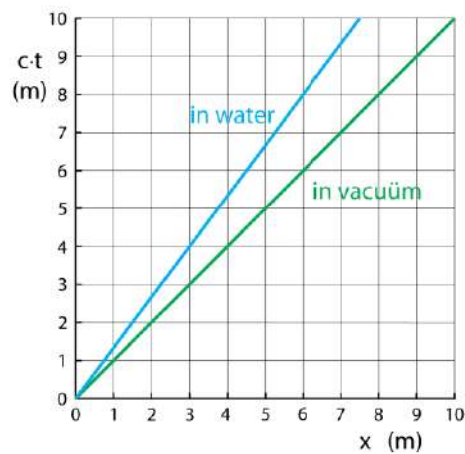
- 1***
- a Leg voor iedere bewering uit of het waar is.
- 1 NIET WAAR op de horizontale as staat de plaats
 - 2 NIETWAAR op de verticale as staat c·t en dit is ook plaats (afstand)
 - 3 WAAR c·t is een plaats in meter maar hieruit kun je t berekenen $t = c \cdot t / c$
 - 4 NIET WAAR verticaal staat c·t (m) en horizontaal x (m)
- 2***
- a Wat is de betekenis van het snijpunt van twee wereldlijnen.
- snijpunt: c·t is gelijk $\rightarrow t = c \cdot t / c$ is gelijk en x is gelijk
 - twee voorwerpen bevinden zich op het zelfde moment op dezelfde plaats
- b Kunnen twee wereldlijnen elkaar twee keer snijden?
- snijpunt: zelfde tijd en zelfde plaats
 - twee voorwerpen kunnen elkaar twee keer tegenkomen
 - dit geeft twee snijpunten van de wereldlijnen van deze voorwerpen
- c Teken in een ruimtetijddiagram twee gelijktijdige gebeurtenissen op $t = 3/c$ s.
- d Teken in hetzelfde ruimtetijddiagram twee gebeurtenissen op $x = 8$ m.



- 3****
- a Teken de wereldlijn van deze lichtpuls.
- b Teken de wereldlijn van deze lichtpuls.
- c Teken de wereldlijn van deze lichtpuls.
- d Bereken de snelheid van geel licht in water.
- $v_{\text{licht}} = \frac{c}{n} \quad | \quad n = 1,333$
 - $v_{\text{licht}} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{1,333} = 2,25 \cdot 10^8 \text{ m/s}$



- d** Teken in het ruimtetijd diagram van vraag a de grafiek van dit foton.
- om 6 meter af te leggen heeft licht in vacuüm $6 / c$ seconden nodig
 - om 6 meter af te leggen heeft licht in water $1,333 \cdot 6 / c = 8 / c$ seconden nodig



4**

- a** Bereken de lengte van de uitgezonden lichtstraal.

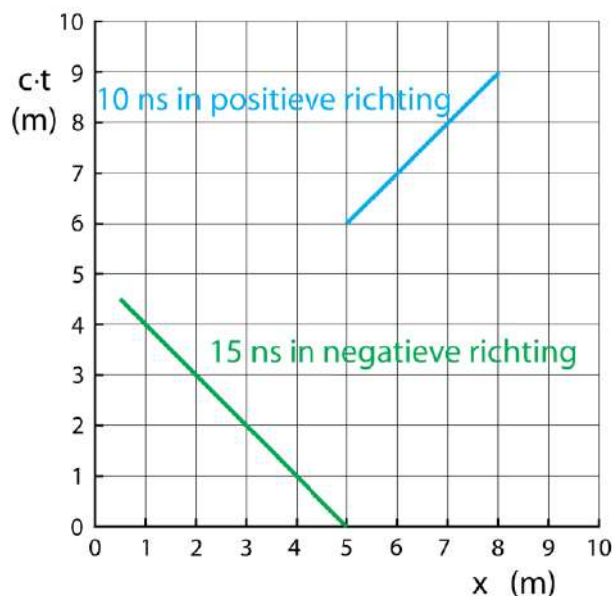
- $s = v_{\text{gem}} \cdot t$ met $v_{\text{gem}} = c$ en $t = 15 \cdot 10^{-9} \text{ s}$
- $s = 3,0 \cdot 10^8 \cdot 15 \cdot 10^{-9} = 4,5 \text{ m}$

- b** Teken de wereldlijn van de voorkant van de uitgezonden lichtstraal.

- begint op $t = 0$ op $x = 5,0 \text{ m}$
- legt in 15 ns $4,5 \text{ m}$ af in de richting van de oorsprong
- zie RT-diagram onder vraag c groene lijn

- c** Teken de wereldlijn van de voorkant van de uitgezonden lichtstraal.

- begint op $t = 20 \text{ ns} \rightarrow c \cdot t = 3,0 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-9} = 6$ op $x = 5,0 \text{ m}$
- legt in 10 ns $3,0 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 3,0 \text{ m}$ af in tegenovergestelde richting
- zie RT-diagram blauwe lijn



5*****a** Bepaal de afstand in plaats tussen de gebeurtenissen 1 en 2.

- aflezen coördinaten op de x-as
- $x_1 = 2 \text{ m}$ en $x_2 = 8 \text{ m}$
- de afstand in ruimte is $8 - 2 = 6 \text{ m}$

b Bepaal de afstand in tijd tussen de gebeurtenissen 1 en 2.

- aflezen coördinaten op de c·t-as
- $c \cdot t_1 = 4 \text{ m}$ en $c \cdot t_2 = 7 \text{ m}$
- de afstand is $7 - 4 = 3 \text{ m}$
- tijdafstand is $3 / 3,0 \cdot 10^8 = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

c Wat is de eenheid van s?

- c·t is afstand in meter en x is afstand in meter
- de eenheid van s^2 is dus m^2

d Bereken het ruimtetijdinterval van de gebeurtenissen 1 en 2.

- 1: $s^2 = (c \cdot t)^2 - x^2 \rightarrow s^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \text{ m}^2$
- 2: $s^2 = (c \cdot t)^2 - x^2 \rightarrow s^2 = 7^2 - 8^2 = 49 - 64 = -15 \text{ m}^2$

e Verklaar de begrippen tijdachtig bij $(\Delta s)^2 > 0$ en ruimteachtig bij $(\Delta s)^2 < 0$.

- $s > 0 \rightarrow (c \cdot t)^2 > x^2$
- er wordt meer afstand in de tijd c·t afgelegd dan in de ruimte x
- $s < 0 \rightarrow (c \cdot t)^2 < x^2$
- er wordt meer afstand in de ruimte x afgelegd dan in de tijd c·t

6*****a** Leg uit welke gebeurtenis volgens Bea als eerste plaatsvindt: 1 of 2.

- aflezen in het blauwe stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $c \cdot t_B = 5,5$
- gebeurtenis 2 ligt op $c \cdot t_B = 4$
- volgens Bea is gebeurtenis 2 eerder dan gebeurtenis 1

b Bepaal het tijdverschil tussen 1 en 2 volgens Bea.

- het tijdverschil is $c \cdot t_B = 5,5 - 4 = 1,5$
- $\Delta t_B = \frac{1,5}{c} = \frac{1,5}{3,0 \cdot 10^8} = 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ s}$

c Bepaal het plaatsverschil tussen 1 en 2 volgens Anna.

- aflezen in het zwarte stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $x_A = 2,4$
- gebeurtenis 2 ligt op $x_A = 6$
- plaatsverschil is $6 - 2,4 = 3,6 \text{ m}$

d Bepaal het plaatsverschil tussen 1 en 2 volgens Bea.

- aflezen in het blauwe stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $x_B = 0$

- gebeurtenis 2 ligt op $x_B = 4$
- plaatsverschil is $4 - 0 = 4$ m

7***

a Leg uit welke gebeurtenis volgens Anna als eerste plaatsvindt: 1 of 2.

- aflezen in het zwarte stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $c \cdot t_A = 6$
- gebeurtenis 2 ligt op $c \cdot t_A = 8$
- volgens Anna is gebeurtenis 1 eerder dan gebeurtenis 2

b Bepaal het tijdsverschil tussen 1 en 2 volgens Anna.

- het tijdsverschil is $c \cdot t_A = 8 - 6 = 2$
- $\Delta t_A = \frac{2,0}{c} = \frac{2,0}{3,0 \cdot 10^8} = 6,7 \cdot 10^{-9}$ s

c Bepaal het plaatsverschil tussen 1 en 2 volgens Bea.

- aflezen in het blauwe stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $x_B = 1,3$
- gebeurtenis 2 ligt op $x_B = 6$
- plaatsverschil is $6 - 1,3 = 4,7$ m

d Bepaal het plaatsverschil tussen 1 en 2 volgens Anna.

- aflezen in het zwarte stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $x_A = 3,8$
- gebeurtenis 2 ligt op $x_A = 8,8$
- plaatsverschil is $8,8 - 3,8 = 5,0$ m

8***

a Bepaal de snelheid van stelsel B ten opzichte van stelsel A.

- opmeten $\alpha = 22^\circ$
- $\tan \alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \tan 22 = \frac{v}{c} \rightarrow 0,404 = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,40 \cdot c$

OOK GOED

- $\Delta x_A = 4$ m | $\Delta t_A = \frac{10}{c}$ s | $v_{\text{gem}} = \dots$ m/s
- $v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- $v_{\text{gem}} = \frac{4}{10/c} \rightarrow v_{\text{gem}} = \frac{4}{10} \cdot c = 0,4 \cdot c$

b Welke van de lijnen 1 t/m 6 is de plaats-as van het blauwe stelsel?

- voor de hoek tussen de plaats-assen en tussen de tijd-assen geldt:

$$\tan \alpha = \frac{v_{BA}}{c} \rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_{BA}}{c} \right)$$

- blauwe lijn: $\tan \alpha = \frac{4}{10} = 0,4$

- lijn 3: $\tan \alpha = \frac{4}{10} = 0,4 \rightarrow$ lijn 3 is de ruimte as van het blauwe stelsel

c Welke van de lijnen 1 t/m 6 is de ruimte-as van het blauwe stelsel volgens Galilei?

- volgens Galilei is de tijd voor beide waarnemers gelijk $t_B = t_A$
- volgens Galilei is lijn 5 de ruimte as

9***

a Leg dit uit.

- na $ct = 10$ seconde heeft Bea 4 meter afgelegd
- $s = v_{\text{gem}} \cdot t \rightarrow 4 = v_{\text{gem}} \cdot \frac{10}{c} \rightarrow v_{\text{gem}} = \frac{4c}{10} = 0,4c$

OOK GOED

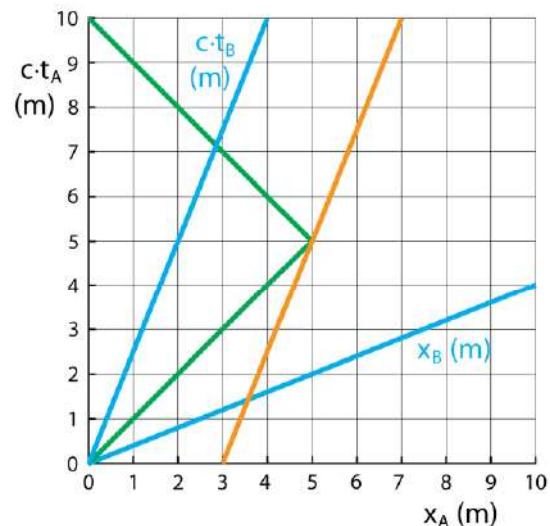
- $\tan \alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,4c$

b Teken de wereldlijn van de lichtpuls heen en terug.

- groene lijnen in de figuur hiernaast

c Teken de wereldlijn van de spiegel in het stelsel van Bea.

- oranje lijn in de figuur hiernaast



d Hoe groot is de afstand tussen Bea en de spiegel volgens Anna?

- op $t = 0$ bevindt Bea zich op $x = 0$ en de spiegel op $x = 3$ m
- volgens Anna is de afstand tussen Bea en de spiegel 3,0 m

e Hoe groot is de afstand tussen Bea en de spiegel volgens Bea?

- $v = 0,4c \quad | \quad \gamma = \dots$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,4c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,16}} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{0,84}} = 1,091$
- volgens Anna is de afstand tussen Bea en de spiegel 3,0 m
- in het stelsel van Bea: $L_b = \frac{L_e}{\gamma} \rightarrow 3 = \frac{L_e}{1,091} \rightarrow L_e = 3,27327 = 3,3$ m

10***

a In welk diagram is de snelheid tussen de stelsels A en B het grootst?

- de hoek met de x-as is bij het rechterdiagram het grootst

- de stelsel dat hoor bij het rechterdiagram heeft de grootste snelheid

b Bepaal voor beide gevallen de snelheid tussen de stelsels A en B.

LINKS

- opmeten $\alpha = 14^\circ$
- $\tan \alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \tan 14 = \frac{v}{c} \rightarrow 0,2493 = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,2493 c = 0,25 c$

RECHTS

- opmeten $\alpha = 40^\circ$
- $\tan \alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \tan 40 = \frac{v}{c} \rightarrow 0,839 = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,839 \cdot c = 0,84 c$

c Teken de tijd-as van de stelsels B.

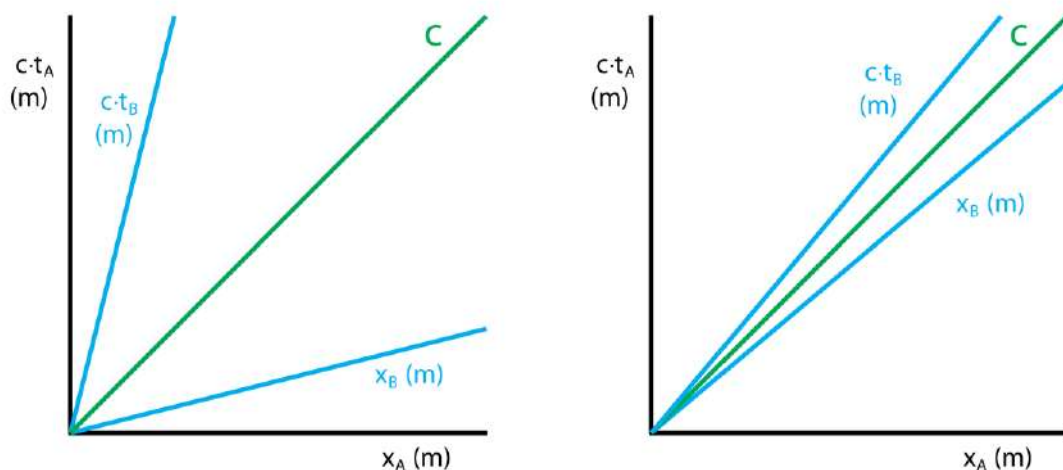
- zie figuur

d Teken de wereldlijn van een lichtpuls die op $t=0$ door $x=0$ gaat.

- zie figuur

e Is het mogelijk om een ruimtetijd diagram van stelsel B te tekenen als de snelheid tussen A en B groter is dan de lichtsnelheid?

- bij $v = c$ is vallen de x-as en de ct-as samen
- je kunt dan geen onderscheid meer maken tussen ruimte en tijd
- een ruimtetijd diagram voor een stelsel met een snelheid groter dan c kan niet worden getekend



11** a** Hoe groot is de snelheid tussen de stelsels A en B?

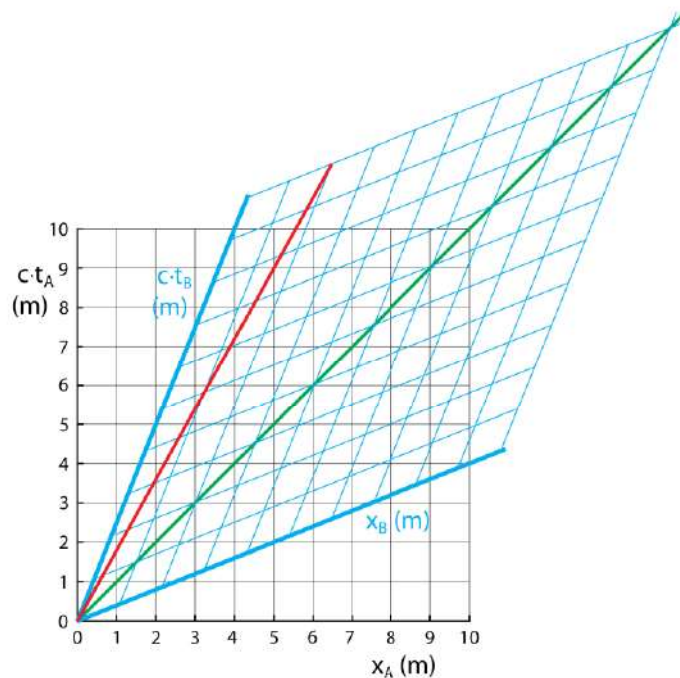
- opmeten $\alpha = 21,8^\circ$
- $\tan \alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \tan 21,8 = \frac{v}{c} \rightarrow 0,4 = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,4 \cdot c$

OOK GOED

- $\Delta x_A = 4 \text{ m} \quad | \quad \Delta t_A = \frac{10}{c} \text{ s} \quad | \quad v_{\text{gem}} = \dots \text{ m/s}$
- $v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- $v_{\text{gem}} = \frac{4}{10/c} \rightarrow v_{\text{gem}} = \frac{4}{10} \cdot c = 0,4 \cdot c$

b Teken de wereldlijn van de kogel.

- $v_{\text{gem}} = 0,2c \quad | \quad \Delta x = 2 \quad | \quad \Delta t = \dots \text{ s}$
- $v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow 0,2c = \frac{2}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{2}{0,2c} = \frac{10}{c} \rightarrow ct = 10$
- de wereldlijn gaat door het punt $(x = 2, ct = 10)$ in het blauwe stelsel



c Bepaal uit het RT-diagram de snelheid van de kogel volgens Anna.

- aflezen in het zwarte stelsel $\rightarrow$ de wereldlijn gaat door $(x=5, ct = 9)$
- $v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v_{\text{gem}} = \frac{5 \cdot c}{9} \rightarrow v_{\text{gem}} = 0,55555c = 0,56c$

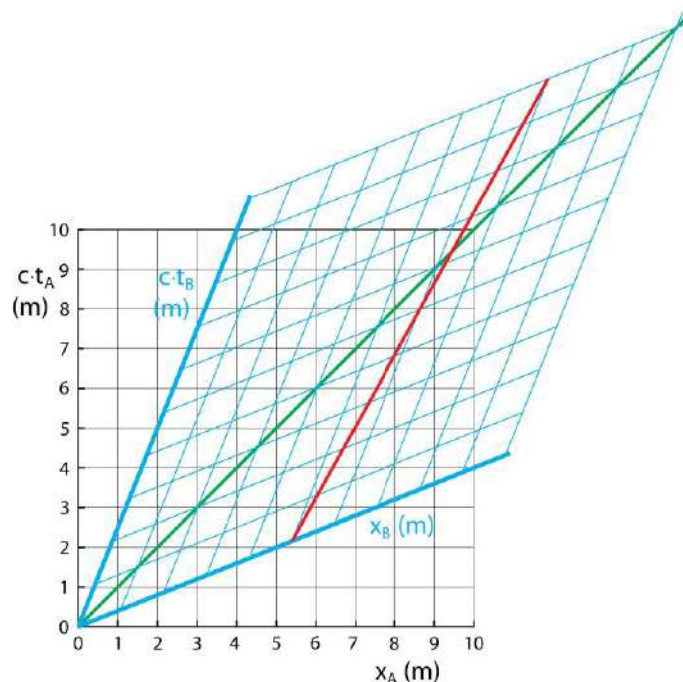
d Controleer met $v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$ of je bepaling klopt.

- $v_B = 0,2c \quad | \quad v_{BA} = 0,4c \quad | \quad v_A = \dots \text{ m/s}$
- $v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{0,2c + 0,4c}{1 + \frac{0,2c \cdot 0,4c}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{0,6c}{1 + \frac{0,08c^2}{c^2}} \rightarrow v_A = \frac{0,6c}{1 + 0,08}$
- $v_A = \frac{0,6c}{1,08} = 0,55555c = 0,56c \rightarrow$ klopt

e Teken de wereldlijn van de kogel.

- $v_{\text{gem}} = 0,2c \quad | \quad \Delta x = 2 \quad | \quad \Delta t = \dots \text{ s}$

- $v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow 0,2c = \frac{2}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{2}{0,2c} = \frac{10}{c} \rightarrow ct = 10$
- de wereldlijn gaat door het punt ($x = 7$, $ct = 10$) in het blauwe stelsel



f Bereken, zonder het RT-diagram te gebruiken, de plaats en de tijd waarop volgens Bea de kogel wordt ingehaald door een lichtstraal die op $t=0$ in de oorsprong vertrekt.

- blauwe stelsel: lichtstraal $x_{\text{licht}} = c \cdot t$ | $x_{\text{kogel}} = 5 + 0,2c \cdot t$
- inhalen $x_{\text{licht}} = x_{\text{kogel}}$
- $c \cdot t = 5 + 0,2c \cdot t \rightarrow 0,8c \cdot t = 5 \rightarrow t = \frac{5}{0,8 \cdot c} = \frac{6,25}{c} \text{ s} \rightarrow ct_{\text{inhalen}} = 6,25$
- $x_{\text{licht}} = c \cdot t \rightarrow x_{\text{inhalen}} = c \cdot \frac{6,25}{c} = 6,25 \text{ m}$

g Klopt je berekening met je antwoord op vraag e?

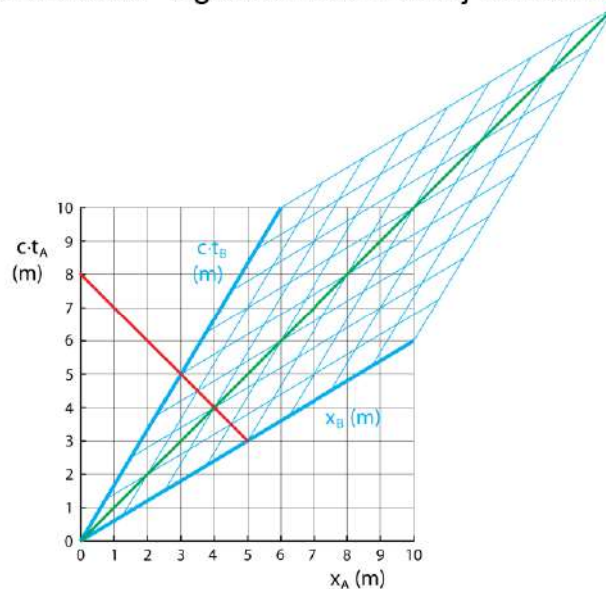
- aflezen in het blauwe stelsel het snijpunt van de groene en de rode wereldlijn
- ($x = 6,25$, $ct = 6,25$) $\rightarrow$ klopt

h Bepaal uit het RT-diagram de plaats en de tijd waarop volgens Anna de kogel wordt ingehaald door een lichtstraal die op $t=0$ in de oorsprong vertrekt.

- aflezen in het zwarte stelsel het snijpunt van de groene en de rode wereldlijn
- ($x = 9,4$, $ct = 9,4$)

- 12*** a** Waar en wanneer gaat deze schemerlamp aan volgens Anna?
- teken de wereldlijn van de lichtstraal vanuit het blauwe stelsel

- aflezen in het zwarte stelsel → gebeurtenis waarbij de lichtstraal vertrekt
- ($x = 5$, $ct = 3$)

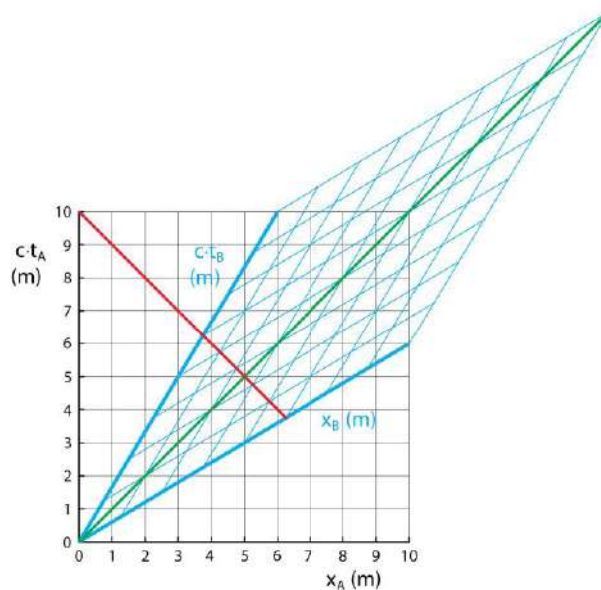


b Op welk tijdstip ziet Anna voor het eerst het licht van deze schemerlamp?

- aflezen in zwarte stelsel → de lichtstraal komt op $x = 0$ op $ct = 8$
- Anna ziet de lichtstraal op $t = \frac{8}{c}$ s

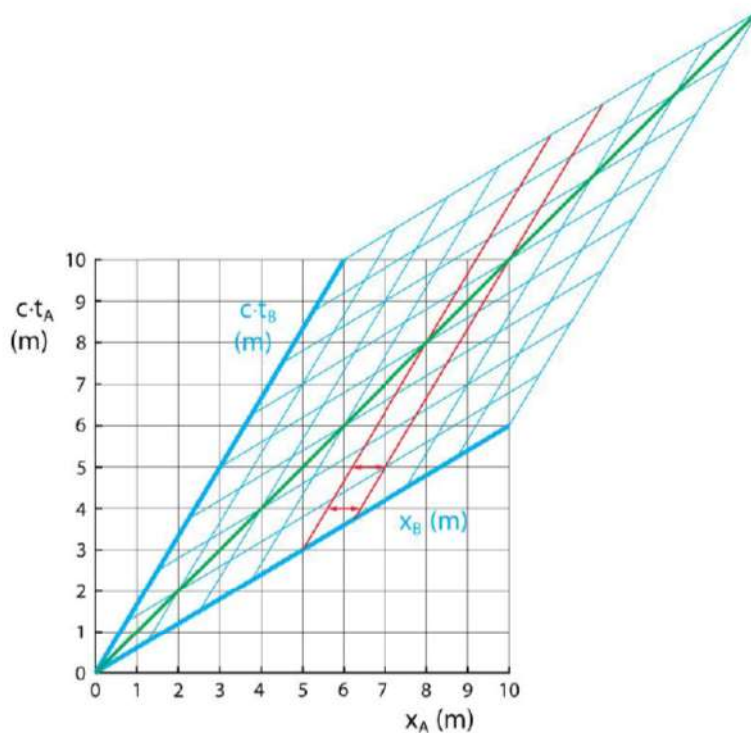
c Hoe groot is volgens Bea de afstand tussen de twee schemerlampen?

- teken de wereldlijn van de lichtstraal vanuit het zwarte stelsel
- aflezen in het blauwe stelsel → snijpunt van deze wereldlijn met de x -as
- ($x = 5$, $ct = 0$)
- schemerlamp 2 staat op 5 m van de oorsprong
- de afstand tussen de schemerlampen is volgens Bea $5 - 4 = 1,0$ m



d Hoe groot is volgens Anna de afstand tussen de twee schemerlampen?

- de wereldlijnen van de schemerlampen vanaf het tijdstip waarop ze aangaan zijn aangegeven in rood
- in het stelsel van Anna (zwart) moet de plaatsen van de schemerlampen op hetzelfde tijdstip worden afgelezen
- de rode pijl geeft de afstand op hetzelfde tijdstip in het stelsel van Anna
- aflezen op $ct = 5 \rightarrow$ lamp 1 op 6,2 meter en lamp 2 op 7,0 meter
- volgens Anna is de afstand $7,0 - 6,2 = 0,8$ m



e Zijn je antwoorden op c en d in overeenstemming met de lengtekrimp?

- $v = 0,6c \quad | \quad \gamma = \dots$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,36}} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{0,64}} = 1,25$
- in het stelsel van Bea staan de schemerlampen op 1,0 m
- gezien vanuit het stelsel van Anna: $L_b = \frac{L_e}{\gamma} \rightarrow L_b = \frac{1,0}{1,25} = 0,8$ m

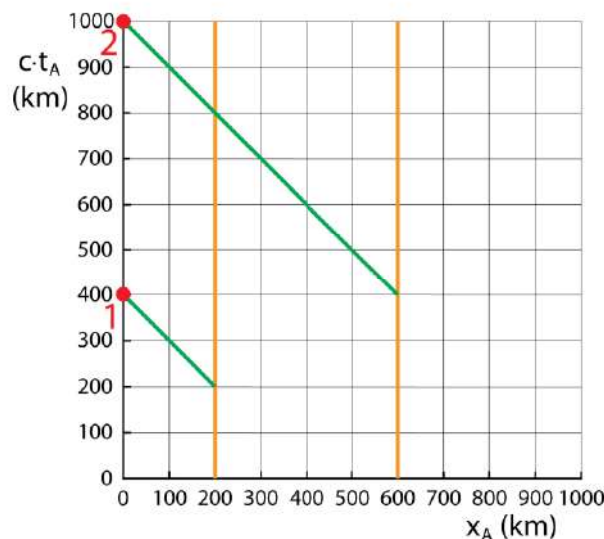
OOK GOED

- Anna neemt de bewegende schemerlampen waar met afstand 0,8 m
- gezien vanuit het stelsel van Bea: $L_b = \frac{L_e}{\gamma} \rightarrow 0,8 = \frac{L_e}{1,25} \rightarrow L_e = 1,0$ m

13**** a Teken de wereldlijnen van de Eiffeltoren en van de basiliek Notre-Dame de Fourvière.

- oranje lijnen in onderstaande figuur

- b** Is het werkelijke tijdverschil van aanzetten volgens Anna groter, kleiner of gelijk aan deze waarneming?
- het licht heeft meer tijd nodig om van Lyon naar Anna te reizen dan het licht uit Parijs
 - het tijdverschil dat Anna waarneemt is groter dan het werkelijke tijdverschil waarmee de verlichting wordt aanzet
- c** Bepaal de tijdstippen waarop de verlichting van de Eiffeltoren en van de Notre Dame de Fourvière volgens Anna worden aanzet.
- teken de wereldlijnen van het licht van de Eiffeltoren en van het licht van de Notre-Dame de Fourvière (groene lijnen in onderstaande figuur)
 - bepaal de snijpunten van de oranje wereldlijnen (gebouwen) en de groene wereldlijnen (licht)
 - aflezen: het licht van de Eiffeltoren gaat volgens Anna aan op $ct = 200 \cdot 10^3 \rightarrow t = 200 \cdot 10^3 / c$ sec.
het licht van de Notre-Dame de Fourvière gaat volgens Anna aan op $ct = 400 \cdot 10^3 \rightarrow t = 400 \cdot 10^3 / c$ sec.



d Bepaal de snelheid van de TGV.

- opmeten $\alpha = 26,5^\circ$
- $\tan \alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \tan 26,5 = \frac{v}{c} \rightarrow 0,5 = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0,5 \cdot c$

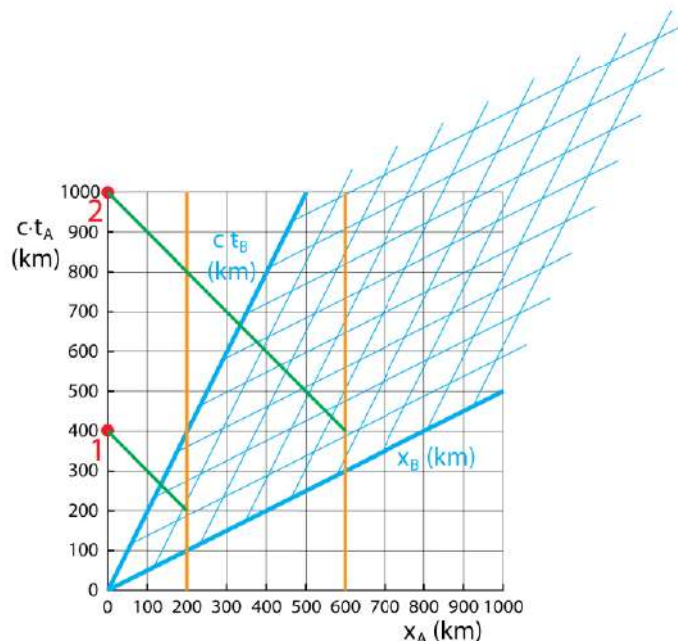
OOK GOED

- $\Delta x_A = 500 \cdot 10^3 \text{ m} \quad | \quad \Delta t_A = \frac{1000 \cdot 10^3}{c} \text{ s} \quad | \quad v_{\text{gem}} = \dots \text{ m/s}$
- $v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- $v_{\text{gem}} = \frac{500 \cdot 10^3}{1000 \cdot 10^3 / c} \rightarrow v_{\text{gem}} = \frac{500}{1000} \cdot c \rightarrow v_{\text{gem}} = 0,5 \cdot c$

e Bepaal het tijdstip waarop Bea de verlichting van de Eiffeltoren ziet aangaan.

- teken de wereldlijn van de Eiffeltoren (oranje)
- teken de wereldlijnen van het licht van de Eiffeltoren (groen)

- bepaal het snijpunt van de oranje en de groene wereldlijn
 - lees af in het blauwe stelsel op $x_B = 0 \rightarrow c \cdot t_B = 220 \cdot 10^3$
 - $t_B = \frac{220 \cdot 10^3}{c} = 7,3 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$
- f** Bepaal het tijdstip waarop Bea de verlichting van de Notre-Dame de Fourvière ziet aangaan.
- teken de wereldlijn van de Notre-Dame de Fourvière (oranje)
 - teken de wereldlijnen van het licht van de Notre-Dame de Fourvière (groen)
 - bepaal het snijpunt van de oranje en de groene wereldlijn
 - lees af in het blauwe stelsel op $x_B = 0 \rightarrow c \cdot t_B = 560 \cdot 10^3$
 - $t_B = \frac{560 \cdot 10^3}{c} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ sec.}$
- g** Bepaal de tijdstippen waarop de verlichting van de Eiffeltoren en van de Notre-Dame de Fourvière volgens Bea worden aangezet.
- aflezen in het blauwe stelsel $\rightarrow$ de wereldlijnen van de Eiffeltoren en van de lichtstraal snijden elkaar op $c \cdot t_B = 120 \cdot 10^3 \rightarrow t_B = 120 \cdot 10^3 / c = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$
 - aflezen in het blauwe stelsel $\rightarrow$ de wereldlijnen van de Notre-Dame de Fourvière en van de lichtstraal snijden elkaar op $c \cdot t_B = 120 \cdot 10^3 \rightarrow t_B = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$
 - Bea concludeert dat de verlichting op hetzelfde tijdstip wordt aangezet



14***

- a** Is het mogelijk dat Bea terugkeert voordat Anna wordt geboren?
- in de relativiteitstheorie is de volgorde van gebeurtenissen onafhankelijk van de snelheid tussen referentiestelsels
 - Bea kan niet eerder thuiskomen dan dat ze vertrekt
 - Bea kan niet vertrekken voor haar geboorte
 - Bea kan niet terugkeren voordat Anna wordt geboren

- b** Is het mogelijk dat de ouders jonger zijn dan Anna en Bea als ze weer thuis komen?
- tijdens de ruimtereis van de ouders is er tijddilatatie en lengtekrimp
 - de klok van de ouders loopt langzamer dan de klok van Anna en Bea
 - het is mogelijk dat de ouders jonger zijn dan Anna en Bea als ze weer thuis komen

15****

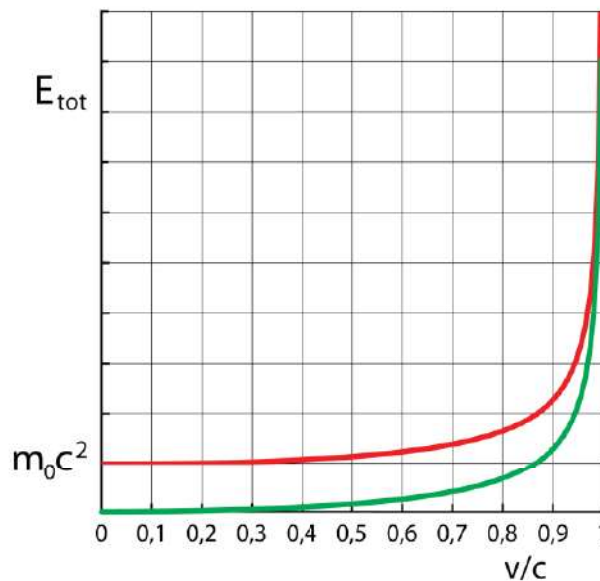
- a** Hoe oud is Charlotte als Bea arriveert?
- Anna en Charlotte bevinden zich in hetzelfde referentiestelsel
 - om 4 lichtjaar te overbruggen met een snelheid van $0,8c$ heeft Bea volgens Anna en Charlotte $\frac{4}{0,8} = 5$ jaar nodig
 - Anna en Charlotte zijn beiden $16 + 5 = 21$ jaar oud als Bea bij Charlotte arriveert
- b** Hoe oud is Anna als Bea thuiskomt?
- om 4 lichtjaar te overbruggen met een snelheid van $0,8c$ heeft Bea volgens Anna en Charlotte $\frac{4}{0,8} = 5$ jaar nodig
 - volgens Anna is Bea $5 + 1 + 5 = 11$ jaar weggewest
 - Anna is $16 + 11 = 27$ jaar oud als Bea arriveert
- c** Hoe oud Bea als ze thuiskomt?
- volgens Bea is de afstand tussen de aarde en de planeet minder dan 4 lichtjaar
 - lengtekrimp: $L_b = \frac{L_e}{\gamma}$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$
 - $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,8c)^2 / c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,64}} = \frac{1}{0,6} = 1,6667$
 - $L_b = \frac{4}{1,6667} = 2,4$ lichtjaar
 - Bea reist met $0,8c \rightarrow t = \frac{s}{v_{\text{gem}}} \rightarrow$ ze heeft $\frac{2,4}{0,8} = 3$ jaar nodig
 - Bea heeft 3 jaar nodig op de heenreis, blijft 1 jaar bij Charlotte en heeft 3 jaar nodig voor de terugreis
 - volgens Bea is ze $3 + 1 + 3 = 7$ jaar weggeweest
 - Bea is $16 + 7 = 23$ jaar oud als ze thuiskomt
- d** Is het niet in tegenspraak met het feit dat niets sneller beweegt dan licht terwijl 4 lichtjaar door Bea in 3 jaar kan worden afgelegd?
- nee, want vanwege lengtekrimp is de afstand volgens Bea geen 4 lichtjaar maar slechts 2,4 lichtjaar, zie vraag c
 - met een snelheid van $0,8c$ doe je 3 jaar over deze afstand

15.4 Massa en energie

1**

a Schets in de figuur hoe de kinetische energie afhangt van de snelheid.

- voor de totale energie geldt: $E_{\text{totaal}} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- de kinetische energie is het verschil: $E_K = E_{\text{totaal}} - E_{\text{rust}}$ met $E_{\text{rust}} = m_0 \cdot c^2$
- $E_K = E_{\text{totaal}} - m_0 \cdot c^2$
- de grafiek voor E_K is verschoven met $E_{\text{rust}} = m_0 \cdot c^2$



b Bereken de snelheid waarbij de kinetische energie gelijk is aan de rustenergie.

- $E_K = E_{\text{tot}} - E_{\text{rust}}$ en $E_K = E_{\text{rust}} \rightarrow E_{\text{tot}} = 2 \cdot E_{\text{rust}}$
- $E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 \rightarrow E_{\text{tot}} = \gamma \cdot E_{\text{rust}} \rightarrow \gamma = 2$
- $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2 \rightarrow \frac{1}{1 - v^2/c^2} = 4 \rightarrow 1 - v^2/c^2 = \frac{1}{4}$
- $\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \rightarrow v^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c^2 \rightarrow v = 0,866 \cdot c$

2**

a Leg uit dat bij deze formule de massa toeneemt als de snelheid groter wordt.

- als v groter wordt neemt $1 - \frac{v^2}{c^2}$ af
- $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ wordt kleiner
- de noemer van de breuk wordt kleiner $\rightarrow$ de breuk wordt groter

b Bereken de massa van Bea gezien vanuit het referentiestelsel van Anna.

- $m_b = \gamma \cdot m_0$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,9c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0,81c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,81}} = \frac{1}{\sqrt{0,19}} = 2,294$
- $m_b = 2,294 \cdot m_0 \rightarrow m_b = 2,294 \cdot 50 = 114,7 \text{ kg}$

c Bereken de massa van Anna gezien vanuit het referentiestelsel van Bea.

- gezien vanuit Bea heeft Anna een snelheid van $0,90c$
- gezien vanuit Bea heeft Anna een massa van $114,7 \text{ kg}$

d Bereken bij welke snelheid Bea 500 kg weegt volgens Anna.

- $m_b = \gamma \cdot m_0$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- $500 = \gamma \cdot 50 \rightarrow \gamma = 10 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 10 \rightarrow \frac{1}{1-v^2/c^2} = 100$
- $1 - \frac{v^2}{c^2} = 0,01 \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 0,99 \rightarrow \frac{v}{c} = 0,995 \rightarrow v = 0,995 \cdot c$

3***

a Bereken met de klassieke formule de kinetische energie van een voorwerp met een rustmassa van 20 kg en een snelheid van $0,7c$.

- $E_K = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2$
- $E_K = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (0,7c)^2 = 10 \cdot 0,49 \cdot c^2 = 4,9 \cdot c^2$
- $E_K = 4,9 \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2 = 4,41 \cdot 10^{17} \text{ J}$

b Bereken met de relativiteitstheorie de kinetische energie van een voorwerp met een rustmassa van 20 kg en een snelheid van $0,7c$.

- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,7c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0,49c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,49}} = \frac{1}{\sqrt{0,51}} = 1,4$
- $E_K = E_{\text{tot}} - E_{\text{rust}} \rightarrow E_K = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$
- $E_K = 0,4 \cdot 20 \cdot c^2 = 8,0 \cdot c^2 = 7,2 \cdot 10^{17} \text{ J}$

c Hoeveel procent verschil is er tussen de klassieke en de relativistische kinetische energie?

- klassiek: $E_K = 4,9 \cdot c^2$
- relativistisch: $E_K = 8,0 \cdot c^2$
- procent verschil: $\frac{8,0 - 4,9}{4,9} \cdot 100\% = 63\%$

4***

a Bereken de rustenergie van een heliumatoom.

- opzoeken in Binas tabel 25: massa ${}^4_2\text{He} = 4,002603 \text{ u}$
- massa ${}^4_2\text{He} = 4,002603 \cdot 1,660539 \cdot 10^{-27} = 6,64648 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

b Bereken de snelheid van de heliumatomen met $E_K = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2$

- $E_K = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 \rightarrow 3,5 \cdot 10^{-9} = \frac{1}{2} \cdot 6,64648 \cdot 10^{-27} \cdot v^2$
- $v = 1,026225 \cdot 10^9 = 1,03 \cdot 10^9 \text{ m/s}$

c Leg uit waarom je deze formule voor de kinetische energie niet mag gebruiken.

- de berekende snelheid is groter dan de lichtsnelheid
- deze snelheid is onmogelijk

d Bereken de snelheid van de heliumkernen met $E_{\text{tot}} = m_b \cdot c^2$

- $m_b = \gamma \cdot m_0$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- $E_{\text{tot}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot c^2 \rightarrow 3,5 \cdot 10^{-9} = \frac{6,64648 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot c^2$
- $\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{6,64648 \cdot 10^{-27}}{3,5 \cdot 10^{-9}} \cdot c^2 = 0,170673 \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 2,91293 \cdot 10^{-2}$
- $\frac{v^2}{c^2} = 0,97087 \rightarrow v = 0,98533 \cdot c = 2,95395 \cdot 10^8 = 2,95 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

5***

a Bereken met hoeveel procent de totale energie van het ruimteschip toeneemt.

- $E_{\text{totaal}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \quad | \quad E_{\text{rust}} = m_0 \cdot c^2$
- $\frac{E_{\text{totaal}}}{E_{\text{rust}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{met} \quad v = \frac{1}{3}c$
- $\frac{E_{\text{totaal}}}{E_{\text{rust}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(\frac{1}{3}c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = \frac{1}{0,94281} = 1,06066$
- $\frac{E_{\text{totaal}}}{E_{\text{rust}}} = 1,06066 \rightarrow \text{toename is } 6,0\%$

b Bereken de snelheid van het ruimteschip bij deze energie.

- $E_{\text{totaal}} = 3 E_{\text{rust}}$
- $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = 3 \cdot m_0 \cdot c^2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 3$
- $\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 9 \rightarrow 1 = 9 \cdot (1-\frac{v^2}{c^2}) \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{8}{9}$

- $v^2 = \frac{8}{9}c^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{8}{9}} \cdot c \rightarrow v = 0,94281 \cdot c = 0,94 \cdot c$

6***

a Toon aan dat bij deze reactie 23,8 MeV energie vrijkomt.

- voor de reactie: $2 \cdot \text{massa } {}^2_1\text{H} - 2 \cdot m_e$
- na de reactie: $\text{massa } {}^4_2\text{He} - 2 \cdot m_e$
- verschil $2 \cdot 2,014102 - 4,002603 = 2,5601 \cdot 10^{-2} \text{ u}$
- $1 \text{ u} = 931,4941 \text{ MeV}$
- $2,5601 \cdot 10^{-2} \cdot 931,4941 = 23,84718 = 23,8 \text{ MeV}$

b Bereken hoeveel ${}^2_1\text{H}$ kernen er jaarlijks nodig zijn om Nederland van energie te voorzien.

- $1 \text{ MeV} = 1,60218 \cdot 10^{-13} \text{ J} \rightarrow 23,847 \text{ MeV} = 3,82075 \cdot 10^{-12} \text{ J}$
- twee ${}^2_1\text{H}$ kernen geven $3,82075 \cdot 10^{-12} \text{ J} \rightarrow$ één kern geeft $1,910374 \cdot 10^{-12} \text{ J}$
- nodig: $2600 \text{ PJ} = 2600 \cdot 10^{15} \text{ J}$
- aantal kernen nodig per jaar: $\frac{2600 \cdot 10^{15}}{1,910374 \cdot 10^{-12}} = 1,36099 \cdot 10^{30} = 1,36 \cdot 10^{30} \text{ kernen}$

c Bereken hoeveel ${}^2_1\text{H}$ kernen er in een kilogram water zitten.

- de molecuulmassa van water is $18 \text{ u} = 18 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} = 2,988972 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$
- aantal H_2O moleculen per kg $\frac{1}{2,988972 \cdot 10^{-26}} = 3,34563 \cdot 10^{25}$
- twee waterstofkernen per H_2O molecuul $\rightarrow 2 \cdot 0,0115 \% \text{ hiervan bevat } {}^2_1\text{H}$
- $2 \cdot \frac{0,0115}{100} \cdot 3,34563 \cdot 10^{25} = 7,69495 \cdot 10^{21} \text{ } {}^2_1\text{H} \text{ kernen per kg water}$

d Bereken hoeveel kilogram water er jaarlijks nodig is om Nederland van energie te voorzien.

- aantal ${}^2_1\text{H}$ kernen nodig per jaar: $1,36099 \cdot 10^{30}$
- aantal ${}^2_1\text{H}$ kernen per kg water: $7,69495 \cdot 10^{21}$
- aantal kg water nodig per jaar: $\frac{1,36099 \cdot 10^{30}}{7,69495 \cdot 10^{21}} = 1,76868 \cdot 10^8 = 1,77 \cdot 10^8 \text{ kg}$

15.5 Algemene relativiteitstheorie

1**

- a Beschrijf het equivalentieprincipe met eigen woorden.
- je kunt geen natuurkundig onderscheid maken tussen een referentiestelsel dat versnelt en een referentiestelsel waarin zwaartekracht werkt
 - experimenten die je uitvoert in een referentiestelsel dat versnelt geven dezelfde resultaten als dezelfde experimenten uitgevoerd in een referentiestelsel waarin zwaartekracht aanwezig is
- b Leg uit wat Vincent met deze stelling bedoelt.
- Vincent doelt op de invloed die massa heeft op de kromming van de ruimte
 - een voorwerp valt niet vanwege een kracht (de zwaartekracht) maar beweegt in een rechte lijn in een ruimte die gekromd is
- c Ben je het met Vincent eens?
- in de theorie van Newton is kracht is de oorzaak van een versnelling of vertraging
 - bij het vallen is er sprake van een versnelling en er moet dus een kracht werken
 - Vincent hanteert de relativiteitstheorie maar gaat voorbij aan de definitie van kracht in de theorie van Newton

2**

- a Welke twee manieren zijn dit?
- trage massa, afkomstig uit de 2e wet: $\Sigma F = m \cdot a \rightarrow m = \frac{\Sigma F}{a}$
 - zware massa, afkomstig uit de gravitatiewet: $F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
- b Leg uit hoe de grootheid massa in de theorie van Newton wordt gebruikt.
- trage massa: de kracht die nodig is om een voorwerp een versnelling te geven is afhankelijk van de massa
 - er is een rechtevenredig verband tussen de resulterende kracht en de versnelling
 - zware massa: massa's oefenen krachten op elkaar uit
 - er is een rechtevenredig verband tussen de massa en de kracht die het uitoefent op andere massa's

3***

- a Leg uit waarom licht door de zwaartekracht afbuigt.
- versnelt het voorwerp en gaat het licht in een rechte lijn dan ziet de waarnemer in het referentiestelsel van het versnelde voorwerp dat licht afbuigt
 - zwaartekracht is equivalent met een versnelling
 - bij aanwezigheid van zwaartekracht buigt het licht af
- b Leg uit hoe je met $E = mc^2$ kunt concluderen dat licht afbuigt door de zwaartekracht.
- licht bestaat uit fotonen met energie: $E_{\text{foton}} = h \cdot f$

- de foton-energie correspondeert met massa
- deze massa ingevuld in de gravitatiewet van Newton geeft een zwaartekracht
- door de zwaartekracht buigt het foton af

c Bereken de massa van een foton met een golflengte van 500 nm.

- $h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = m \cdot c^2 \rightarrow \frac{h}{\lambda} = m \cdot c$
- $\frac{h}{\lambda} = m \cdot c \rightarrow m = \frac{h}{\lambda \cdot c}$
- $m = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{500 \cdot 10^{-9} \cdot 3,00 \cdot 10^8} = 4,42 \cdot 10^{-36}$

d Bereken de zwaartekracht op dit foton bij de oppervlakte van de aarde.

- $F_z = m \cdot g$ met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $F_z = 4,42 \cdot 10^{-36} \cdot 9,81 = 4,33 \cdot 10^{-35} \text{ N}$

Vallend foton

2p **a** Geef de reactievergelijking van het ontstaan van $^{57}_{26}\text{Fe}$.

- $^{57}_{27}\text{Co} + {}^0_{-1}\text{e} \rightarrow ^{57}_{26}\text{Fe}$
- $^{57}_{27}\text{Co}$ en elektron aan linkerkant 1
- massagetal en atoomnummer klopt 1

2p **b** Leg uit dat de korte halveringstijd geen probleem is voor deze voortdurende stroom γ -fotonen.

- de halveringstijd van $^{57}_{27}\text{Co}$ is groot (270 dagen) 1
- tijdens het experiment wordt steeds nieuwe $^{57}_{26}\text{Fe}$ kernen aangemaakt 1

3p **c** Leid de uitdrukking voor E_z af.

- $E = mc^2 = hf \rightarrow m = \frac{hf}{c^2}$ 1
- $E_z = m \cdot g \cdot h \rightarrow E_z = \frac{hf_h}{c^2} \cdot g \cdot H$ 1
- completeren (afleiding helemaal correct) 1

3p **d** Bereken deze verhouding bij dit experiment.

- gebruik $E_{\text{foton}} = h \cdot f$ 1
- $E_z = \frac{hf_h}{c^2} gH \rightarrow \frac{E_z}{E_{\text{foton}}} = \frac{gH}{c^2}$ 1
- $\frac{E_z}{E_{\text{foton}}} = \frac{9,81 \cdot 22,6}{(2,9979 \cdot 10^8)^2} = 2,47 \cdot 10^{-15}$ 1

15.6 Gekromde ruimte

1**

a Bereken de dichtheid van Europa.

- inhoud van een bol is $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$
- $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \rho = \frac{4,8 \cdot 10^{22}}{\frac{4}{3} \pi \cdot (1,568 \cdot 10^6)^3} = 2,97 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

b Breken de ontsnappingssnelheid van Europa.

- $v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{m}{r}}$
- $v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4,8 \cdot 10^{22}}{1,568 \cdot 10^6}} = 2,0214 \cdot 10^3 = 2,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

c Bereken de schwarzschildstraal van Europa.

- $R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$
- $R_s = \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 4,8 \cdot 10^{22}}{(2,9979 \cdot 10^8)^2} = 7,1287 \cdot 10^{-5} = 7,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

2**

a Verandert de schwarzschildstraal van de zon als ze een rode reus is geworden?

- de schwarzschildstraal bereken je met $R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$
- G en c zijn constant
- de schwarzschildstraal is alleen afhankelijk van de massa
- als de zon een rode reus is geworden maar nog geen massa heeft verloren blijft de schwarzschildstraal hetzelfde

3**

a Leg uit waarom neutronenster met een straal van 10 km geen zwart gat is.

- de schwarzschildstraal van de zon is 2,95 km $\rightarrow$ dit is minder dan 10 km
- licht aan het oppervlak kan ontsnappen aan de gravitatiekracht
- een neutronenster met een straal van 10 km is geen zwart gat

b Bereken de dichtheid van een neutronenster. Gebruik de massa van de zon.

- opzoeken: de massa van de zon is $m_{\text{zon}} = 1,9884 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- bol met een straal van 10 km: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot (1,0 \cdot 10^4)^3 = 4,1888 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$
- $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \rho = \frac{1,9884 \cdot 10^{30}}{4,18879 \cdot 10^{12}} = 4,747 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$

c Leid deze formule af.

- $R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$ en $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \left\{ \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \right\}$
- stel gelijk: $R_s = r$
- $r = \frac{2 \cdot G}{c^2} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \rightarrow 1 = \frac{8\pi \cdot G \cdot \rho}{3c^2} \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}$
- $r = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}}$

d Bereken bij welke straal een neutronenster een zwart gat wordt.

- $r = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}}$
- $r = \sqrt{\frac{3 \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2}{8\pi \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 4,747 \cdot 10^{17}}} = \sqrt{3,3916 \cdot 10^8} = 1,84 \cdot 10^4 \text{ m} = 18,4 \text{ km}$

e Bereken de massa van deze neutronenster uitgedrukt in zonmassa's.

- de zon als neutronenster heeft een straal van 10 km
- een neutronenster die nét een zwart gat is geworden heeft een straal van 18,4 km
- de straal is: $18,4 / 10 = 1,84$ groter geworden
- het volume is $1,84^3 = 6,23$ keer zo groot geworden
- de massa van de neutronenster is 6,23 keer de zonmassa.

4++ a Leid deze formule af.

- $r = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}} \rightarrow r^3 = \left(\frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho} \right)^{3/2}$ (zie vorige vraag)
- $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho} \right)^{3/2}$
- $m = \rho \cdot V = \frac{4}{3} \pi \cdot \rho \cdot \left(\frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho} \right)^{3/2} \rightarrow m = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{3c^2}{8\pi \cdot G} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
- $\sqrt{\rho} = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{3c^2}{8\pi \cdot G} \right)^{3/2} \frac{1}{m} \rightarrow$
- $\rho = \frac{4^2}{3^2} \pi^2 \cdot \left(\frac{3c^2}{8\pi \cdot G} \right)^3 \cdot \frac{1}{m^2} \rightarrow \rho = \frac{4^2}{3^2} \pi^2 \cdot \frac{3^3 \cdot c^6}{8^3 \pi^3 \cdot G^3 \cdot m^2}$
- $\rho = \frac{4^2 \cdot 3 \cdot c^6}{8^3 \pi \cdot G^3 \cdot m^2} = \frac{3 \cdot c^6}{32\pi \cdot G^3 \cdot m^2}$

b Bereken de minimale dichtheid van een zwart gat met een schwarzschildstraal van 1,0 mm.

- gebruik: $r = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}} \rightarrow r^2 = \frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}$
- $\rho = \frac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot r^2} \quad | \quad r = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $\rho = \frac{3 \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2}{8\pi \cdot 6,6726 \cdot 10^{-11} \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^2} \rightarrow \rho = 1,61 \cdot 10^{32} \text{ kg/m}^3$

5***

a Beredeneer of de speciale relativiteit ervoor zorgt dat de GPS-klok voorloopt of achterloopt met een klok op aarde.

- speciale relativiteit: de GPS-klok heeft een snelheid
- de GPS-klok loopt achter

b Beredeneer of de algemene relativiteit ervoor zorgt dat de GPS-klok voorloopt of achterloopt met een klok op aarde.

- algemene relativiteit: de zwaartekracht is kleiner bij de GPS-klok
- de GPS-klok loopt voor

c Bereken de dagelijkse afwijking van de GPS-klok vanwege zijn snelheid (speciale relativiteit).

- $\frac{\Delta t_{\text{klok B}}}{\Delta t_{\text{klok A}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- $\frac{\Delta t_{\text{klok B}}}{\Delta t_{\text{klok A}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(4,0 \cdot 10^3)^2}{(3,0 \cdot 10^8)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1,778 \cdot 10^{-10}}}$

d Leg uit waarom je rekenmachine dit niet kan uitrekenen.

- je rekenmachine rekent maar met 9 cijfers
- dit is niet genoeg voor deze berekening

e Vul de formule in waarmee je de dagelijkse afwijking van de GPS-klok vanwege zijn hoogte (algemene relativiteit) kunt uitrekenen.

- $R_{\text{S aarde}} = 8,86 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad | \quad r_{\text{aarde}} = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m} \quad | \quad \frac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \dots$
- $\frac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{R_{\text{S}}}{r}}$
- $\frac{\Delta t_{\text{aarde}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{8,86 \cdot 10^{-3}}{6,371 \cdot 10^6}} \rightarrow \frac{\Delta t_{\text{aarde}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - 1,39 \cdot 10^{-9}}$

f Leg uit waarom je rekenmachine dit niet kan uitrekenen.

- je rekenmachine rekent maar met 9 cijfers
- dit is niet genoeg voor deze berekening