

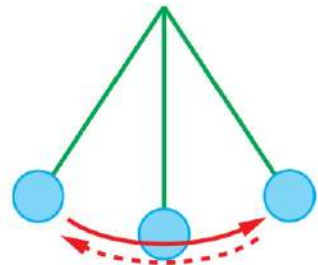
9 Trillingen

vwo

9.1 Wat is een trilling?

Trillingstijd, frequentie, uitwijking en amplitude

- 1*** Leg uit welke van de volgende voorbeelden trillingen zijn.
- a De trapper van een fiets tijdens het fietsen.
 - b De beweging van je trommelvlies als je iets hoort.
 - c Een robot die dozen van een lopende band pakt.
 - d Eb en vloed aan de kust.
 - e De beweging van een satelliet om de aarde.
 - g Een kind op een wipkip.
 - h Een tak aan een boom die heen-en-weer zwiept.
- 2*** Een fluitketel geeft een fluittoon met een frequentie van 650 Hz.
- a Bereken de trillingstijd.
- 3**** Een slinger beweegt tussen de uiterste standen A en C. Op een bepaald moment is de slinger in stand A. Over 10 slingeringen doet de slinger 4,0 seconden.
- a Hoe vaak is de slinger in deze tijd in punt A geweest?
 - b Hoe vaak is de slinger in deze tijd in punt B geweest?
 - c Hoe groot is de trillingstijd?
 - d Bereken de frequentie.
- 4**** Een naaimachine maakt 300 steken per minuut
- a Welke frequentie heeft deze machine?
- Een auto heeft een toerental van 2400 per minuut.
- b Met welke frequentie draait de motor?
- 5**** Soldaten marcheren met een ritme van 120 stappen per minuut. Een gemiddelde stap is 80 cm. De soldaten moeten 10 km marcheren.
- a Hoeveel seconden duurt een stap?
 - b Bereken hoeveel minuten ze er over doen.



6** Een hondenfluitje maakt een fluittoon van $2,1 \cdot 10^4$ Hz.

a Bereken de trillingstijd.

Je geeft een kort signaal dat 0,20 s duurt.

b Hoeveel trillingen bevat dit signaal?



7** Je laat een blokje aan een touw slingeren. In het begin geef je het blokje een uitwijking van 15 cm. Daarna laat je het blokje los. Het blokje beweegt steeds in 0,20 s van de uiterste stand naar de evenwichtsstand.

a Leg uit wat er NIET verandert als je het blokje een tijdje laat slingeren:

- de frequentie
- de uitwijking
- de amplitude
- de trillingstijd

b Wat weet je van de snelheid in de uiterste stand?

c Wat weet je van de snelheid in de evenwichtsstand?

d Bereken de frequentie van deze slinger.

8** Een tak aan een boom zwiept 18 keer per minuut heen-en-weer door de wind.

a Bereken de trillingstijd.

b Bereken de frequentie.

9*** Een blokje hangt aan een veer en voert een trilling uit. Met een stopwatch wil je de trillingstijd bepalen.

a Leg uit in welke stand je het beste de stopwatch kunt starten.

Om de trillingstijd te bepalen meet Arend de tijd van één heen en weer gaande beweging. Simon meet de tijd van 10 heen en weer gaande bewegingen en deelt daarna het resultaat door 10.

b Wie van hen voert de nauwkeurigste meting uit: Arend of Simon, of zijn beide metingen even nauwkeurig?

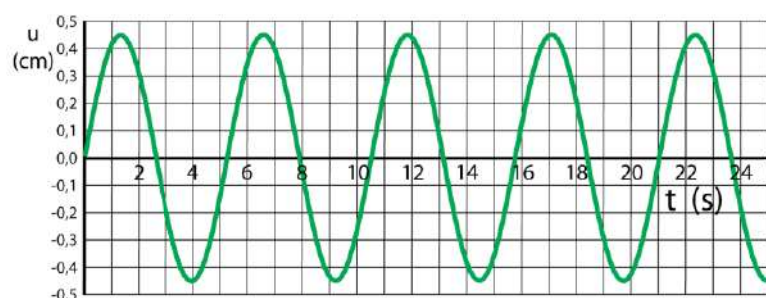
(u, t)-diagram

10** De figuur is het (u, t)-diagram van een trilling.

a Bepaal de amplitude.

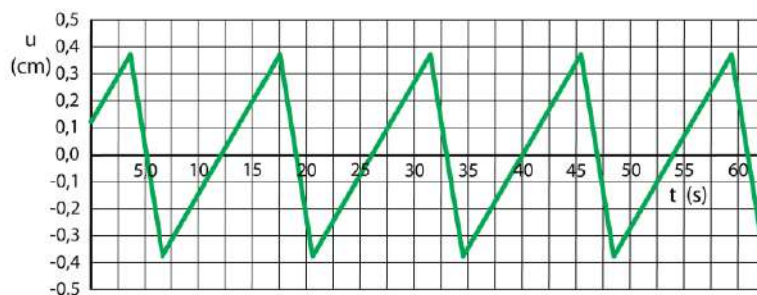
b Bepaal de trillingstijd.

c Bepaal de frequentie.



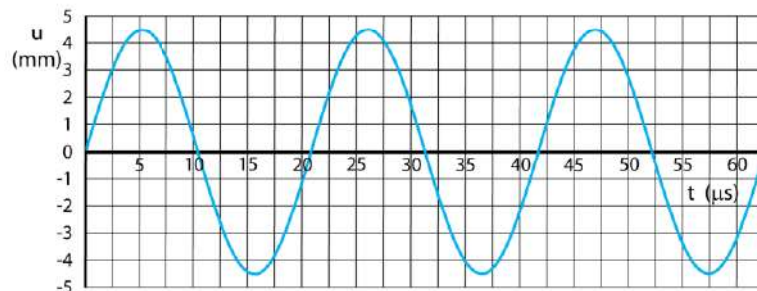
11** De figuur is het (u, t) -diagram van een trilling.

- a** Bepaal de amplitude.
- b** Bepaal de trillingstijd.
- c** Bepaal de frequentie.



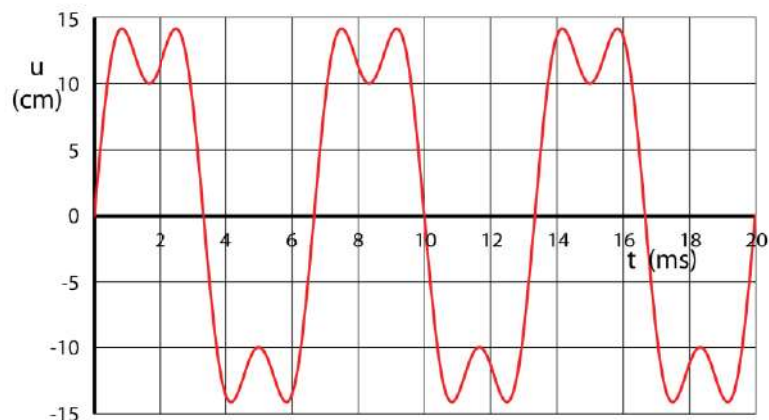
12** De figuur is het (u, t) -diagram van een trilling.

- a** Bepaal de amplitude.
- b** Bepaal de trillingstijd.
- c** Bepaal de frequentie.



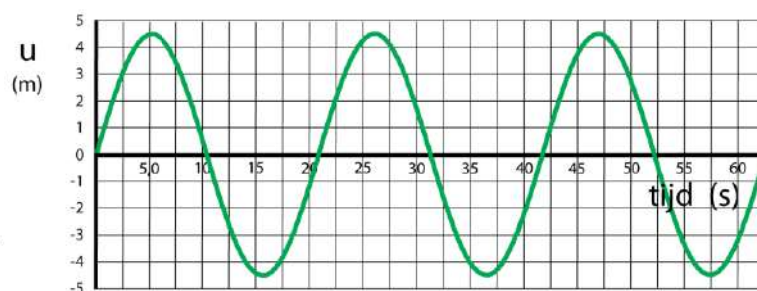
13*** De figuur is het (u, t) -diagram van een trilling.

- a** Bepaal de amplitude.
- b** Bepaal de trillingstijd.
- c** Bepaal de frequentie.



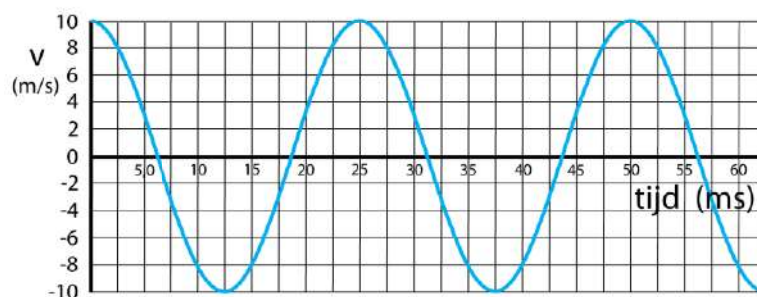
14*** De figuur is het (u, t) -diagram van een trilling.

- a** Bepaal de trillingstijd.
- b** Bepaal de frequentie.
- c** Bepaal de maximale snelheid.
- d** Bepaal de snelheid op $t = 35$ s.



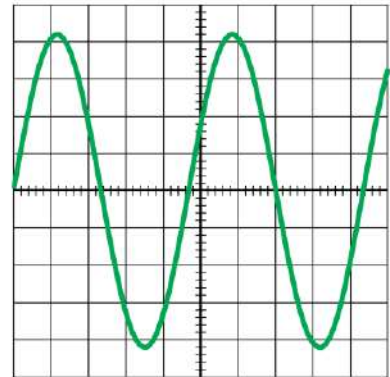
15*** De figuur is het (v, t) -diagram van een trilling.

- a** Bepaal de trillingstijd.
- b** Bepaal de frequentie.
- c** Bepaal de amplitude.
- d** Bepaal de afstand tussen $t = 10$ en $t = 15$ ms.

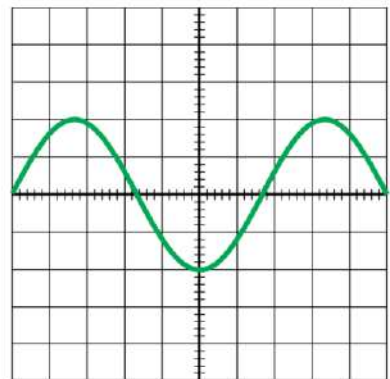


9.2 Het meten van een trilling

- 1**** De figuur is het beeld op een oscilloscoop.
De tijdbasis is $20 \mu\text{s} / \text{div}$. De gevoeligheid is $0,5 \text{ V} / \text{div}$.
- a** Bepaal de trillingstijd.
 - b** Bepaal de frequentie.
 - c** Bepaal de amplitude.



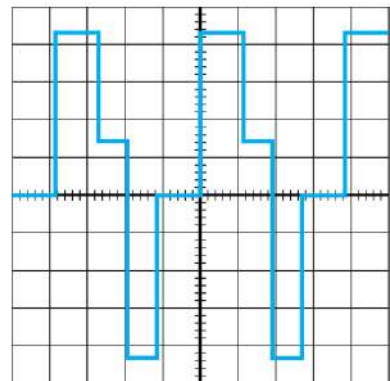
- 2***** De figuur is het beeld op een oscilloscoop.
De tijdbasis is $5 \mu\text{s} / \text{div}$.
De gevoeligheid is $0,2 \text{ mV} / \text{div}$.
- a** Bepaal de trillingstijd.
 - b** Bepaal de frequentie.
 - c** Bepaal de amplitude.



Je wilt dat het signaal van boven tot onder het scherm vult.

- d** Leg uit wat je moet doen met de tijdbasis.
- e** Leg uit wat je moet doen met de gevoeligheid.

- 3**** De figuur is het beeld op een oscilloscoop.
De tijdbasis is $50 \text{ ms} / \text{div}$. De gevoeligheid is $0,2 \text{ V} / \text{div}$.
- a** Bepaal de trillingstijd.
 - b** Bepaal de frequentie.
 - c** Bepaal de amplitude.



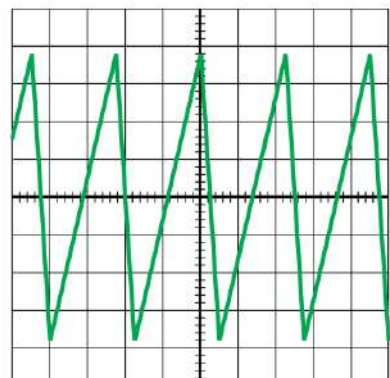
Je verandert de tijdbasis naar $20 \text{ ms} / \text{div}$.

- d** Leg uit of je nu meer of minder trillingen op het scherm ziet.

- 4***** De figuur is het beeld van een oscilloscoop. De frequentie is $8,889 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ en de amplitude is 19 mV .
- a** Bepaal de tijdbasis.
 - b** Bepaal de gevoeligheid.

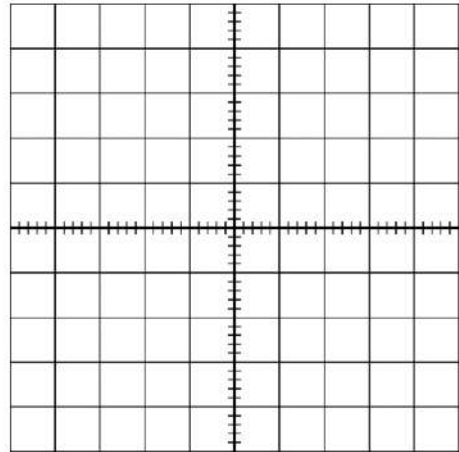
Je maakt de tijdbasis 2,5 keer kleiner.

- c** Bepaal hoeveel trillingen je nu op het scherm ziet.



5*** Een stemvork trilt met 440 Hz (muzieknoet a1). Het geluid wordt opgenomen door een microfoon die is aangesloten op een oscilloscoop. De amplitude van het signaal is 7,0 volt. De tijdbasis is 0,50 ms / div. De gevoeligheid is 2,0 V / div.

- Teken in de figuur het signaal dat je ziet op de oscilloscoop.
- Wat verandert er aan het beeld op het scherm als je een hardere tik tegen de stemvork geeft?
- Hoe zie je aan het beeld dat de toon langzaam uitdooft?



6*** De figuur is een elektrocardiogram (ECG). De tijdbasis is 20 ms / div. De gevoeligheid is 200 μ V / div.

- Hoeveel tijd zit er tussen de punten P en T?
- Hoeveel slagen geeft het hart per minuut?
- Hoeveel millivolt is het signaal bij punt R?



7*** De figuur is een elektrocardiogram (ECG). De hartslag is 116 slagen per minuut

- Hoe groot is de tijdbasis?

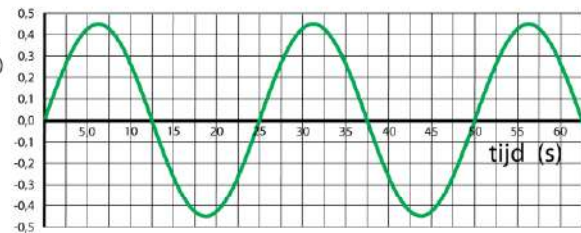
Bij de piek is de spanning 1,6 mV.

- Hoe groot is de gevoeligheid?

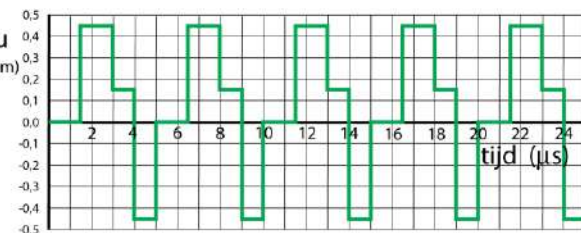


9.3 Fase en gereduceerde fase

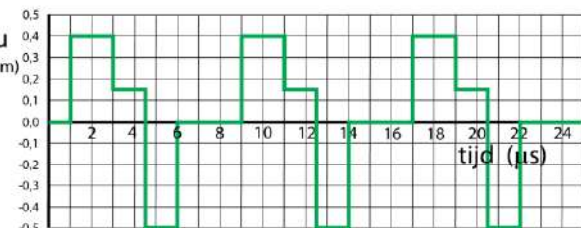
- 1**** De figuur is het (u, t)-diagram van een trilling. u (m)
- Bepaal de fase op $t = 18$ s.
 - Bepaal de fase op $t = 55$ s.
 - Bepaal de gereduceerde fase op $t = 18$ s.
 - Bepaal de gereduceerde fase op $t = 55$ s.



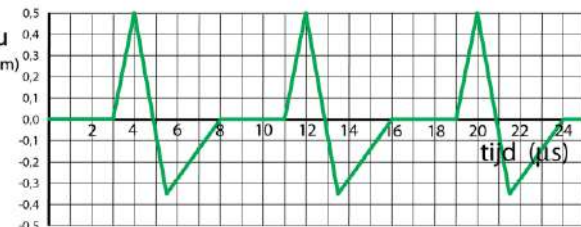
- 2**** De figuur is het (u, t)-diagram van een trilling. u (mm)
- Bepaal het gereduceerde faseverschil tussen $t = 3,0$ en $t = 20$ μ s.
 - Bepaal het gereduceerde faseverschil tussen $t = 2,0$ en $t = 22$ μ s.



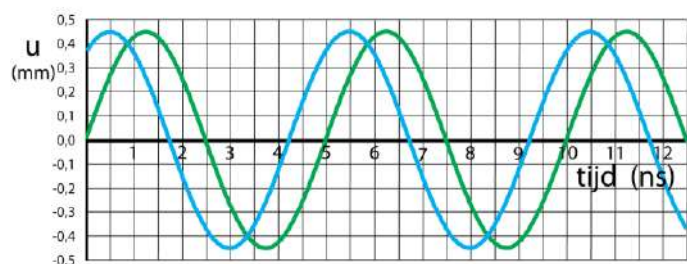
- 3**** De figuur is het (u, t)-diagram van een trilling. u (mm)
- Teken in de figuur de trilling in tegenfase met de gegeven trilling.



- 4**** De figuur is het (u, t)-diagram van een trilling. u (mm)
- Teken in de figuur de trilling met een faseverschil van $0,25$.
 - Leg uit of de trilling die je getekend hebt voor of achter loopt op de gegeven trilling.



- 5***** De figuur is het (u, t)-diagram van een trilling.
- Bepaal het faseverschil tussen de trillingen als je er vanuit gaat dat de trilling met de blauwe grafiek voor loopt op de trilling met de groene grafiek.



- Bepaal het faseverschil tussen de trillingen als je er vanuit gaat dat de trilling met de blauwe grafiek achter loopt op de trilling met de groene grafiek.

9.4 Harmonische trilling

Massaveersysteem

1** Voor een massaveersysteem geldt $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$

- a** Bereken de trillingstijd als $m = 400$ g en $C = 2,0$ N/m.
- b** Bereken de trillingstijd als $m = 800$ g en $C = 2,0$ N/m.
- c** Bereken de trillingstijd als $m = 400$ g en $C = 4,0$ N/m.

2** Voor een massaveersysteem geldt $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$

- a** Bereken de massa als $T = 1,0$ s en $C = 10$ N/m.
- b** Bereken de massa als $T = 2,0$ s en $C = 10$ N/m.
- c** Bereken de massa als $T = 1,0$ s en $C = 20$ N/m.

3*** Voor een massaveersysteem geldt $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$

- a** Bereken de veerconstante als $T = 10$ s en $m = 5,0$ kg.
- b** Bereken de veerconstante als $T = 20$ s en $m = 5,0$ kg.
- c** Bereken de veerconstante als $T = 10$ s en $m = 10$ kg.

4** Een auto heeft een massa van 950 kg. De veerconstante van de vering van de auto is $4,0 \cdot 10^4$ N/m. Op een hobbelige weg gaat de auto op en neer trillen.

- a** Hoe groot is de trillingstijd van de auto?
- b** Hoe groot is de frequentie van de auto?
- c** Waar dienen de schokdempers bij een auto voor?



5*** Een chauffeur bepaalt haar massa met een verende stoel. De veerconstante van de stoel is 800 N/m. De lege stoel trilt met 1,00 Hz. Als de chauffeur op de stoel zit is de frequentie 0,500 Hz.

- a** Bereken de massa van de stoel.
- b** Bereken de massa van de chauffeur.

6*** Je hangt een blokje met een massa van 20 gram aan een veer en laat het blokje trillen. De trillingstijd is 0,50 s. Je wilt een trillingstijd van precies één seconde krijgen.

- a** Beredeneer met behulp van de formule van een massaveersysteem hoeveel extra massa je aan de veer moet hangen.

Je kunt ook een trillingstijd van precies één seconde krijgen door niet extra gewicht toe te voegen maar door een andere veer te nemen.

- b** Leg uit of je een veer moet kiezen met een grotere of met een kleinere veerconstante.
- c** Beredeneer met behulp van de formule hoeveel groter of kleiner de veerconstante moet zijn.

7**** In de wieg van een baby hangt een poppetje aan een veer. De massa van het poppetje is 50 gram. Als je het poppetje naar beneden trekt en daarna loslaat gaat hij trillen met een trillingstijd van 0,80 s.

- a** Bereken de veerconstante van de veer.

Als het poppetje stil hangt heeft de veer een lengte van 20 cm.

- b** Bereken de lengte van de veer als er geen poppetje aan hangt.

HINT gebruik $F_{\text{veer}} = C \cdot u$ met $F_{\text{veer}} = F_Z = m \cdot g$

8**** Je hangt een blokje van 250 gram aan een spiraalveer. De veer rekt hierdoor 150 mm uit.

- a** Bereken de veerconstante van de spiraalveer.

HINT gebruik $F_{\text{veer}} = C \cdot u$ met $F_{\text{veer}} = F_Z = m \cdot g$

Daarna breng je het blokje in trilling door de veer 5,0 cm verder uit te rekken en daarna los te laten.

- b** Hoe groot is de amplitude?
- c** Met welke trillingstijd gaat het blokje trillen?
- d** Hoe groot is de frequentie?
- e** Hoeveel trillingen zijn er per minuut?

Als het blokje tot stilstand is gekomen breng je het opnieuw in trilling door de veer 10 cm verder uit te rekken en daarna los te laten.

- f** Hoe groot zullen de trillingstijd en de frequentie nu zijn?
- g** Bereken de versnelling van het blokje onmiddellijk na het loslaten.

HINT vergeet de zwaartekracht niet

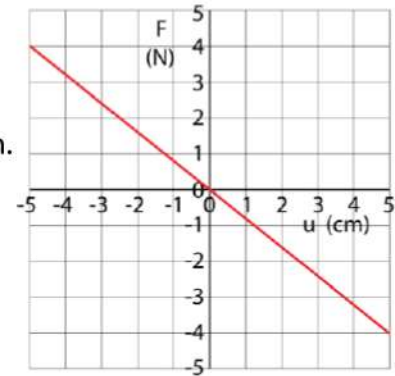
- h** Leg uit of de gemiddelde snelheid bij een amplitude van 10 cm groter, kleiner of gelijk is aan de gemiddelde snelheid bij een amplitude van 5,0 cm.

9** Om een elastiekje 1,0 cm uit te rekken heb je 0,30 N kracht nodig. Om het elastiekje 5,0 cm uit te rekken heb je 2,0 N kracht nodig. Je hangt een blokje aan het elastiekje en brengt het in trilling.

- a** Leg uit of het blokje een harmonische trilling gaat uitvoeren.



- 10****** In de figuur zie je het (F, u)-diagram van een veer. Je hangt een steen aan de veer enrekt de veer 5,0 cm uit. Daarna laat je het blokje los en gaat het trillen. De trillingstijd is 2,0 s.
- Leg uit of de steen een harmonische trilling gaat uitvoeren.
 - Schets de (u, t)-grafiek van de steen voor één trilling.
 - Schets de (F, t)-grafiek van de steen voor één trilling.
 - Schets de (v, t)-grafiek van de steen voor één trilling.
 - Bereken de massa van de steen.



- 11***** Een dobber trilt harmonisch in het water.
- Geef het wiskundig verband tussen de resulterende kracht en de uitwijking.

Om de dobber 2,0 cm op te tillen heb je een kracht van 0,028 N nodig.

- Bereken de veerconstante.



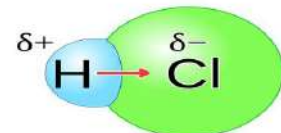
Je duwt de dobber met een kracht van 0,020 N naar beneden.

- Hoeveel centimeter gaat de dobber naar beneden?

Je laat de dobber los die dan gaat hij trillen met een trillingstijd van 1,2 s.

- Hoeveel gram weegt de dobber?

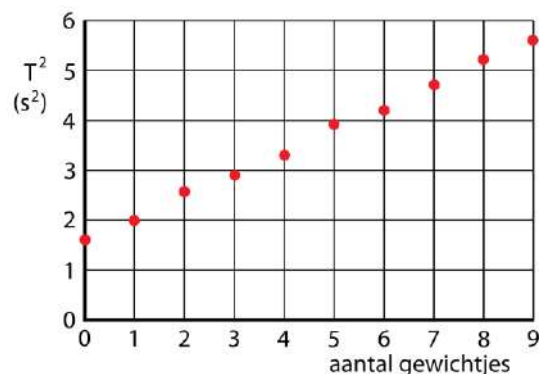
- 12***** In een HCl molecuul zijn een H^+ -ion (een proton) en een Cl^- ion aan elkaar gebonden. Deze binding kan worden voorgesteld als een veer, waarbij de veerconstante een maat is voor de sterkte van de binding. Om de veerconstante te bepalen wordt het HCl molecuul in trilling gebracht. De frequentie waarmee het gaat trillen is $8,970 \cdot 10^{13}$ Hz.



Omdat de massa van het Cl^- ion veel groter is dan dat van het proton nemen we aan dat alleen het proton beweegt en dat het Cl^- ion stilstaat.

- Bereken de "veerconstante" van een H-Cl binding.

- 13****** Je wil de massa van een steen bepalen. Daartoe hang je de steen aan een spiraalveer en laat het trillen. Je meet de trillingstijd. Vervolgens maak je de massa groter door er steeds een gewichtje van 100 g aan toe te voegen en opnieuw de trillingstijd te meten. Het resultaat van je metingen is weergegeven in de figuur. Er is een lineair verband ($y = ax + b$) tussen het aantal gewichtjes en T^2 .



- a Toon aan dat dit in overeenstemming is met de formule van een massaveersysteem.
- b Bepaal de veerconstante.
- c Bepaal de massa van de steen.

Slinger

14** Voor een slinger geldt $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

- a Bereken de trillingstijd als $\ell = 2,0$ m.
- b Bereken de frequentie als $\ell = 4,0$ cm.

15** Voor een slinger geldt $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

- a Bereken de lengte als $T = 4,0$ s.
- b Bereken de lengte als $T = 1,6$ minuten.
- c Bereken de lengte als $T = 25$ ms (milliseconden).

- 16**** Ella zit op een schommel. Sofie trekt de schommel 1 meter naar achteren en laat dan los. Ella beweert dat ze een amplitude heeft van 2 m. Sofie beweert dat Ella een uitwijking heeft van 2 m.
- a Wie heeft er gelijk, Ella, Sofie of geen van beiden?
 - b Wanneer is tijdens het schommelen de snelheid nul?
 - c Wanneer is de snelheid maximaal?



Sofie wil ook op de schommel. Sofie is zwaarder dan Ella.

- d Wie heeft de grootste trillingstijd, Ella, Sofie of is de trillingstijd gelijk?

- 17****** Op de wereldtentoonstelling van 1851 in Parijs werd de eerste slinger van Foucault tentoongesteld. Met zo'n slinger kan de draaisnelheid van de aarde om haar as worden bepaald. Het bijzondere is dat dit kan in een afgesloten ruimte, dus zonder zicht op de zon of de sterren of andere astronomische waarnemingen. De originele slinger van Foucault bestond uit een bol van 28 kg die met een lang koord aan het plafond van het Panthéon in Parijs was vastgemaakt.



De afstand tussen het zwaartepunt van de bol en het ophangpunt aan het plafond is 67 meter. De slinger heeft een maximale uitwijking van 3,0 m.

- a Bereken de trillingstijd van deze slinger met de formule $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.
- b Bereken de frequentie van deze slinger.

Vanwege de draaiing van de aarde draait het slingervlak onder de slinger. Om het slingervlak 360 graden te draaien doet de aarde $24/\sin \alpha$ uur. Hoek α is de geografische breedte. Parijs ligt op 49 graden noorderbreedte.

- c Bereken hoeveel graden het slingervlak na 100 slingerbewegingen is gedraaid.

18*** Drie slingers van verschillende lengte zijn naast elkaar opgehangen. Hun lengtes zijn 1,0 m, 4,0 m en 9,0 m.

- a Bereken voor iedere slinger de trillingstijd. Gebruik $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.
- b Bereken de verhouding van de trillingstijden.

De slingers worden in dezelfde richting uit evenwicht gebracht en op $t = 0$ losgelaten. Op $t = 0$ is de fase de drie slingers nul en zijn ze in fase

- c Op welk moment zijn de slingers voor de eerste keer opnieuw in fase?
- d Bereken de fase en de gereduceerde fase van de langste slinger op $t = 100$ s.

19**** Een sloopkogel hangt aan een lange kabel. Hij wordt met een touw naar rechts getrokken en vervolgens losgelaten zonder beginsnelheid. De kabel is precies verticaal op het moment dat de kogel tegen een muur botst. De tijdsduur tussen het loslaten van het touw en het botsen tegen de muur is 2,6 s.



- a Bereken de lengte van de kabel.

20*** De trillingstijd van een slinger kan op aarde worden benaderd met $T = 2,0 \cdot \sqrt{\ell}$

- a Toon dit aan.

Volgens deze formule is de trillingstijd van een slinger van 1,00 m lengte 2,00 s.

- b Bereken de echte trillingstijd van een slinger van 1,00 m lengte.
- c Bereken de procentuele afwijking tussen deze twee trillingstijden.

Op de maan geldt ook $T = k \cdot \sqrt{\ell}$ alleen is k daar niet gelijk aan 2,0.

- d Bereken de waarde van k op de maan.

Een astronaut wil onderzoeken wat de slingertijd in de ruimte is bij een toestand van gewichtsloosheid.

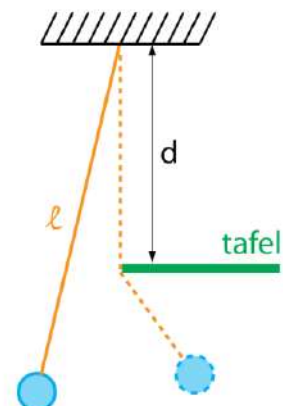
- e Wat zal de conclusie van de astronaut zijn?

21**** Onder het ophangpunt van een slinger staat een tafel. Tijdens het slingeren botst de slinger tegen de tafelrand, zie figuur. De lengte ℓ van de slinger is 200 cm. De afstand d is 120 cm.

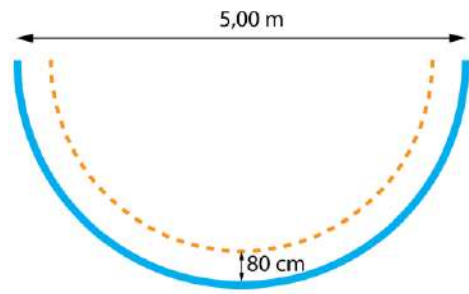
- a Bereken de trillingstijd van deze gebroken trilling.

Je wilt dat de slinger een trillingstijd krijgt van 2,00 s. Daartoe pas je de afstand d aan.

- b Bereken d bij deze trillingstijd.



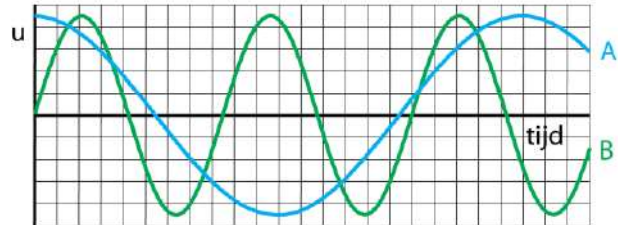
- 22****** Een skater gaat heen-en-weer in een halfpipe met een diameter van 5,00 m. Het zwaartepunt van de skater is 80 cm boven de vloer. Onder in de pijp is de beweging van de skater is gelijk aan die van een slinger.
- a** Bereken de tijd T (de periode) onder in de pijp.
 - b** Hoeveel keer passeert de skater het onderste punt in 20 s?



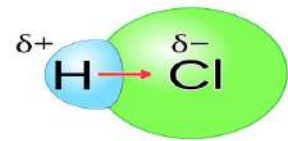
9.5 De energie van een trillend voorwerp

1** Andrea (A) en Bas (B) zijn ieder op hun eigen schommel aan het schommelen. In de figuur zie je de (u, t)-diagram van beide kinderen. Bas is 8,0 kg zwaarder dan Andrea.

- Leg uit wie van de kinderen op de schommel met de langste koorden zit.
- Leg uit voor wie de maximale snelheid het grootste is.
- Leg uit wie de meeste trillings-energie bezit.



2*** In een HCl molecuul zijn een H^+ -ion (een proton) en een Cl^- ion aan elkaar gebonden. Deze binding kan worden voorgesteld als een veer. De veerconstante is een maat voor de sterkte van de binding. Om de veerconstante te bepalen wordt het HCl molecuul in trilling gebracht.



De frequentie waarmee het HCl gaat trillen is $8,97 \cdot 10^{13}$ Hz. Omdat de massa van het Cl^- ion veel groter is dan dat van het proton mogen we aannemen dat alleen het proton beweegt en dat het Cl^- ion stilstaat. De trillings-energie van een HCl molecuul bedraagt $5,95 \cdot 10^{-20}$ J.

- Bereken de maximale snelheid van het trillende proton.
- Bereken de amplitude van het trillende proton.

De bindingslengte is de gemiddelde afstand tussen de kernen van de atomen. De bindingslengte van een HCl molecuul is 127 pm (pico-meter).

- Bereken hoeveel procent de afstand tussen het H^+ -ion en het Cl^- -ion bij een trilling maximaal verandert.

3** Een koolstofatoom trilt met een frequentie van $1,5 \cdot 10^{13}$ Hz en een amplitude van $1,2 \cdot 10^{-12}$ m.

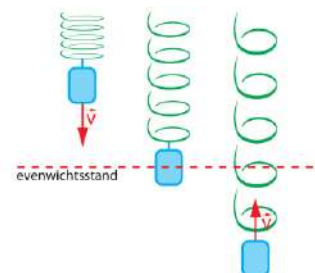
- Bereken de maximale snelheid van het koolstofatoom.

De massa van het koolstofatoom is 12 u, waarbij u de atomaire massa-eenheid is.
 $1 \text{ u} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

- Bereken de trillings-energie van het koolstofatoom.

4*** Een blokje van 100 g hangt aan een spiraalveer. Het blokje trilt met een amplitude van 12 cm en een frequentie van 1,5 Hz. Wrijving wordt verwaarloosd.

- Bereken de energie van het trillende blokje.
- Bereken de veerconstante C



Op een bepaald tijdstip is de uitwijking 5,0 cm.

c Hoe groot de trillings-energie op dit tijdstip?

d Hoe groot de kinetische energie op dit tijdstip?

e Hoe groot is de snelheid op dit tijdstip?

5*** Een harmonisch trillend voorwerp heeft een amplitude van 5,0 cm. Op een bepaald moment is vanwege wrijving de helft van de energie in warmte omgezet.

a Met welke factor is $v_{\max}$ afgenomen?

b Hoe groot de amplitude op dat moment?

6*** Bij een harmonische trilling wordt de relatie tussen de snelheid en de uitwijking gegeven

door de formule $v = \sqrt{\frac{C}{m} \cdot (A^2 - u^2)}$.

a Toon dit aan.

Bij $u = 0$ is de snelheid maximaal.

b Leg dit uit.

Hieruit volgt $v_{\max} = A \cdot \sqrt{\frac{C}{m}}$.

c Toon dit aan.

Voor $v_{\max}$ geldt ook $v_{\max} = \frac{2\pi \cdot A}{T}$.

d Toon aan dat de twee formules voor $v_{\max}$ in elkaar kunnen worden omgezet.

7*** Voor de totale energie van een harmonische trilling geldt: $E_{\text{tot}} = 2\pi^2 \cdot m \cdot A^2 \cdot f^2$.

a Toon dit aan.

Als de frequentie twee keer zo groot wordt dan trilt het voorwerp twee keer zo vaak. Het is opvallend dat de energie dan niet twee keer maar vier keer zo groot wordt. De energie is kwadratisch afhankelijk van de frequentie.

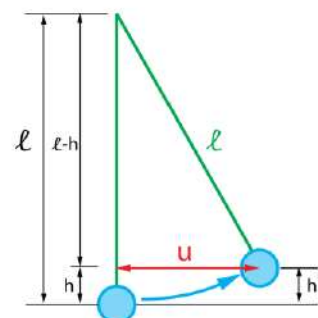
b Leg uit waarom dit het geval is.

8**** Van een slinger met een lengte ℓ en een massa m willen we weten hoe de zwaarte-energie tijdens het slingeren verandert. Daartoe leiden we het verband af tussen de uitwijking u en de hoogte h .

De uitwijking u is een benadering van de lengte van de boog. Voor een kleine slingerhoek is deze benadering toegestaan.

Er geldt $(\ell - h)^2 + u^2 = \ell^2$.

a Toon dit aan.



Als h veel kleiner is dan ℓ mogen we de volgende benadering maken:

$$(\ell - h)^2 = \ell^2 - 2 \cdot h \cdot \ell + h^2 \rightarrow (\ell - h)^2 \approx \ell^2 - 2 \cdot h \cdot \ell$$

b Leg dit uit.

Met deze benadering vinden we $h = \frac{u^2}{2\ell}$.

c Toon dit aan.

Voor de zwaarte energie van een slinger met een kleine uitwijkingen geldt daarom:

$$E_z = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot \frac{u^2}{2\ell}.$$

In de uiterste stand geldt: $E_{\text{tril}} = \frac{1}{2} C \cdot A^2$ en voor een slinger is dit gelijk aan de zwaarte-energie. Dit geeft $\frac{1}{2} C \cdot A^2 = m \cdot g \cdot \frac{A^2}{2\ell}$ waaruit volg $C = \frac{m \cdot g}{\ell}$.

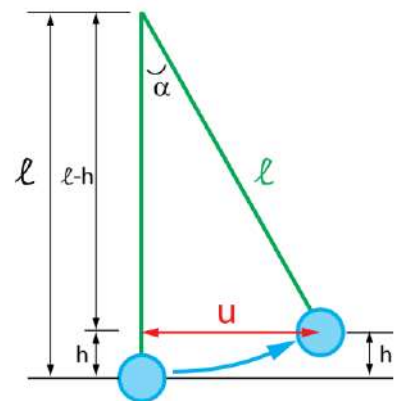
d Toon dit aan.

Voor een harmonische trilling geldt $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$. Hieruit volgt voor een slinger met kleine

uitwijking: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

e Toon dit aan.

9**** De originele slinger van Foucault bestond uit een bol van 28 kg die met een lang koord aan het plafond van het Panthéon in Parijs was vastgemaakt. De afstand tussen het zwaartepunt van de bol en het ophangpunt aan het plafond is 67 meter. De slinger heeft een maximale uitwijking van 3,0 m. Als de uitwijking veel kleiner is dan de lengte van de slinger geldt bij benadering $E_{\text{tril}} = E_z = m \cdot g \cdot \frac{A^2}{2\ell}$.



a Bereken de trillingsenergie van de slinger van Foucault met deze benadering.

We kunnen de trillingsenergie ook op een andere manier uitrekenen.

Er geldt $\sin \alpha = \frac{u}{\ell}$

$$\ell - h = \ell \cdot \cos \alpha \rightarrow h = \ell - \ell \cdot \cos \alpha$$

$$E_z = m \cdot g \cdot h \rightarrow E_z = m \cdot g \cdot (\ell - \ell \cdot \cos \alpha)$$

$$E_{\text{tril}} = E_z = m \cdot g \cdot (\ell - \ell \cdot \cos \alpha)$$

b Bereken opnieuw de trillingsenergie van de slinger van Foucault.

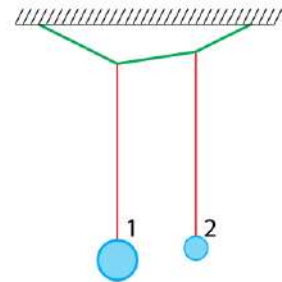
c Hoeveel procent wijken de twee berekende waarden van elkaar af?

HINT gebruik de niet afgeronde waarden

9.6 Resonantie

- 1**** Als je een stemvork aanslaat gaat hij met 440 Hz trillen. Je hoort dan zachtjes de muzieknoot a1. Om het geluid harder te maken kun je de stemvork met de achterkant tegen een klankkast houden. Als je de stemvork tegen de klankkast houdt dooft het geluid sneller uit.
- Leg uit waardoor er versterking optreedt.
 - Leg uit waarom het geluid sneller uitdooft als je de stemvork tegen de klankkast houdt.

- 2**** Twee slingers zijn naast elkaar opgehangen, zie figuur. De massa van slinger 1 is vijf keer zo groot als de massa van slinger 2. Slinger 1 heeft een lengte van 1,5 m. Slinger 1 wordt in trilling gebracht en na een poosje gaat slinger 2 ook bewegen. Er is sprake van resonantie.
- Leg uit wat met resonantie wordt bedoeld.
 - Bereken de lengte van slinger 2.



- 3***** Een auto rijdt over een weg waarop iedere 10 meter een hobbel is aangebracht. De auto is geveerd met $C = 5,0 \cdot 10^4$ N/m. Bij een snelheid van 12 m/s gaat de auto heftig op en neer vanwege resonantie.
- Hoe groot is de massa van de auto met chauffeur?
HINT bereken de tijd tussen twee hobbels en stel dit gelijk aan T_{eigen}



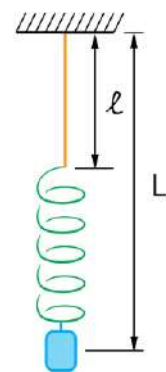
Er stappen 2 passagiers in de auto met een gezamenlijke massa van 150 kg.

- Bereken bij welke snelheid er nu resonantie optreedt.
HINT bereken eerst T_{eigen}

- 4***** Een spiraalveer zonder gewicht eraan heeft een lengte van 15 cm. Je hangt een blokje van 250 g aan de veer. Het blokje gaat trillen met een frequentie van 1,2 Hz.
- Bereken de veerconstante.
 - Bereken de lengte van de veer als de massa stil hangt.

Je wilt dat de veer afwisselend gaat slingeren en op-en-neer gaat bewegen. Daarom bevestig je de veer aan een draad met lengte ℓ . Zie figuur. We kiezen de lengte van de draad zo dat de periode van de slinger twee keer die van het massaveersysteem is.

- Bereken de lengte L van de slinger.
- Bereken de lengte ℓ van de draad.



9.7 Wiskundige beschrijving

1** Een voorwerp voert een harmonische trilling uit waarvoor geldt: $u = 0,10 \cdot \sin(2,0 \cdot t)$.

- a Hoe groot is de amplitude?
- b Hoe groot de trillingstijd?
- c Hoe groot zijn de fase en de gereduceerde fase op $t = 10$ s?

2** Een voorwerp voert een harmonische trilling uit. De amplitude is 3,0 cm en de frequentie 10 Hz. Op $t = 0$ is de fase 0. Je hoeft niet op significante cijfers te letten.

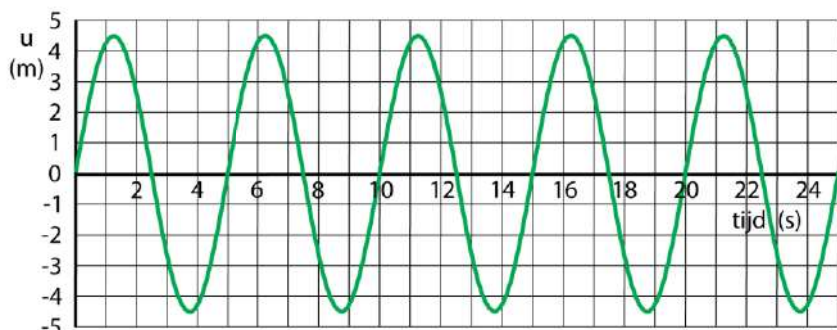
- a Geef de formule voor de uitwijking als functie van de tijd.
- + b Geef de formule voor de snelheid als functie van de tijd
- + c Geef de formule voor de versnelling als functie van de tijd.

3*** Een voorwerp voert een harmonische trilling uit. De amplitude is 3,0 cm en de frequentie 10 Hz. Op $t = 0$ is de fase 0,25.

HINT op $t = 0$ heeft het voorwerp $\frac{1}{4}$ trilling uitgevoerd

- a Geef de formule voor de uitwijking als functie van de tijd.

4*** Een voorwerp voert een harmonische trilling uit. Het (u, t) -diagram is gegeven in de figuur.



$$u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad v = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad a = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

- a Geef het functievoorschrift voor de uitwijking.
- b Bereken de snelheid op $t = 10$ s en op $t = 12$ s.
- c Bereken de versnelling op $t = 10$ s en op $t = 12$ s.

HINT zet je rekenmachine op radialen

HINT zet je rekenmachine op radialen

alleen voor wiskunde B leerlingen

- + d Op welke tijdstippen in het interval $[0 \text{ s}, 10 \text{ s}]$ is de uitwijking 3,0 cm?

- 5***** Je schudt een pak chocolademelk van 1,0 liter heen-en-weer met een amplitude van 10 cm. Om de chocolademelk goed te mengen wil je dat de maximale versnelling 40 m s^{-2} is. Neem aan dat de dichtheid van chocolademelk gelijk is aan $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Voor de versnelling geldt $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow a = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$.

Hieruit volgt voor de maximale versnelling $a_{\max} = A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$.

- a** Leg dit uit.
- b** Met welke frequentie moet je schudden?
- c** Hoe groot is de maximale kracht die je moet uitoefenen bij het schudden?

- 6***** Voor een harmonische trilling geldt

$$u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad v = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad a = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

De maximale snelheid van een harmonische trilling is $v_{\max} = \frac{2\pi \cdot A}{T} = 2\pi \cdot A \cdot f$.

- a** Toon dit aan.

De maximale snelheid wordt bereikt voor $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{1}{2}$

- b** Toon dit aan.

De maximale versnelling van een harmonische trilling is $a_{\max} = \frac{4\pi^2 \cdot A}{T^2}$

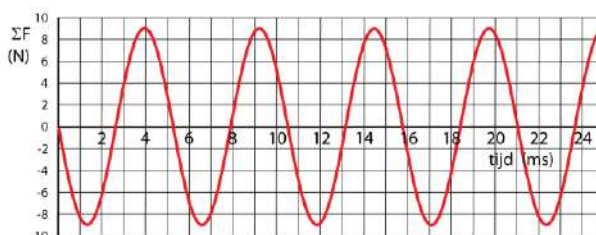
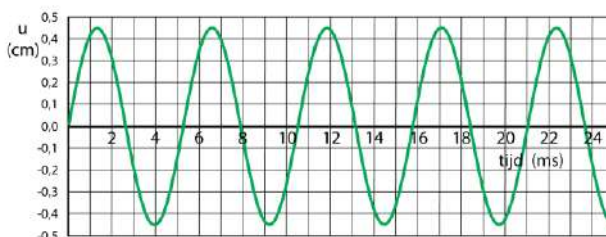
- c** Toon dit aan.

De maximale versnelling wordt bereikt voor $\varphi = \frac{1}{4}$ en $\varphi = \frac{3}{4}$

- d** Toon dit aan.

- 7***** In de figuur zie je het (u, t)-diagram en het (F, t)-diagram van een harmonische trilling.

- a** Leg uit waaraan je kunt zien dat de trilling harmonisch is.
- b** Bepaal de krachtconstante C.
- c** Bepaal de massa van het trillende voorwerp.



Examenvragen havo

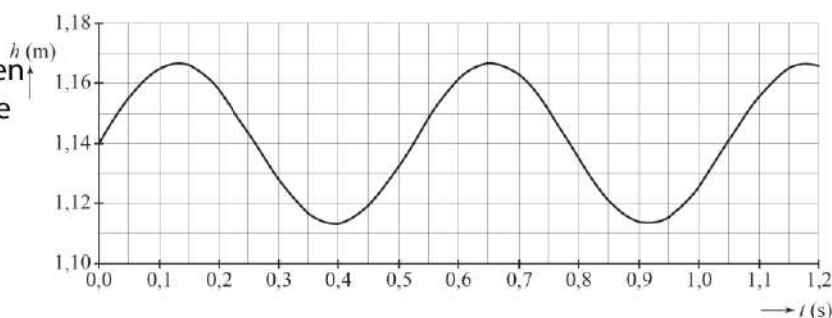
Rugzakgenerator

Als een wandelaar met een rugzak loopt, gaat de rugzak op en neer. Daardoor verandert tijdens iedere stap de hoogte van het zwaartepunt van de rugzak. De wandelaar loopt met constante snelheid. Figuur 1 is de grafiek van de hoogte van het zwaartepunt van de rugzak als functie van de tijd. De massa van de rugzak is 29 kg.

3p

- 1 Bepaal met behulp van figuur 1 het verschil tussen de maximale en minimale zwaarte-energie van de rugzak.

Figuur 1



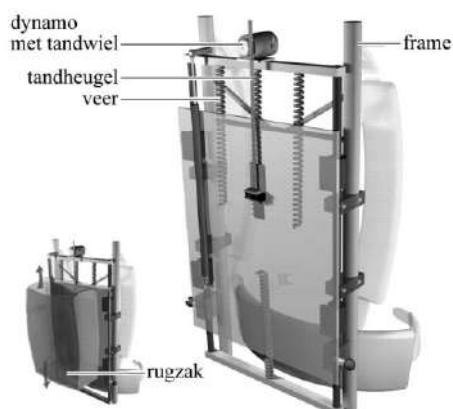
Bij iedere stap legt de wandelaar 0,70 m af. Eén periode in het diagram komt overeen met één stap.

3p

- 2 Bepaal met behulp van figuur 1 de horizontale snelheid van de wandelaar in km/h.

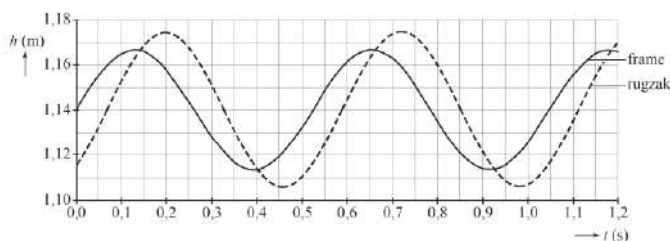
Een Amerikaanse bioloog heeft een manier bedacht om uit de verticale beweging van de rugzak elektrische energie te halen. Hij ontwierp een rugzakgenerator. Deze bestaat uit een frame waarop een dynamo is bevestigd. Aan het frame dat vastzit aan de rug van de wandelaar, wordt de rugzak verend opgehangen. Tijdens het lopen beweegt de rugzak ten opzichte van het frame en drijft, via een zo geheten tandheugel, de dynamo aan. Zie figuur 2.

Figuur 2



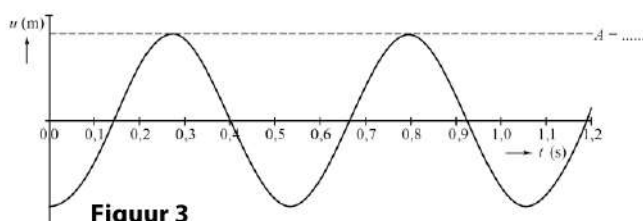
De wandelaar gaat met deze rugzak op dezelfde manier lopen als hiervoor. Figuur 3 is de grafiek van de hoogte van het frame en van de rugzak als functie van de tijd.

Het verschil van de twee grafieken geeft weer hoe de rugzak beweegt ten opzichte van het frame. De grootte van de amplitude A van de trilling die de rugzak ten opzichte van het frame uitvoert, kan worden bepaald met behulp van figuur 3.



2p

- 3 Bepaal met behulp van figuur 3 de grootte van de amplitude A . Licht toe hoe je de grootte van A hebt bepaald.



Figuur 3

De dynamo levert een gemiddeld vermogen van 3,7 W.

- 3p **4** Bereken de hoeveelheid energie die is opgewekt na 3,5 uur lopen.

De veerconstante van de twee veren samen is gelijk aan $4,1 \cdot 10^3$ N/m.
De massa van de rugzak is nog steeds 29 kg.

- 3p **5** Bereken de eigenfrequentie van de rugzak.

De rugzakgenerator wekt de meeste energie op als de eigenfrequentie van de rugzak gelijk is aan de stapfrequentie. Stel dat aan deze voorwaarde is voldaan. De wandelaar gaat nu sneller lopen door zijn stapfrequentie op te voeren. Om weer de maximale energieoverdracht naar de generator te krijgen, zou de wandelaar de massa van de rugzak moeten veranderen.

- 2p **6** Moet hij daarvoor de massa groter of kleiner maken? Licht je antwoord toe.

Railbaan

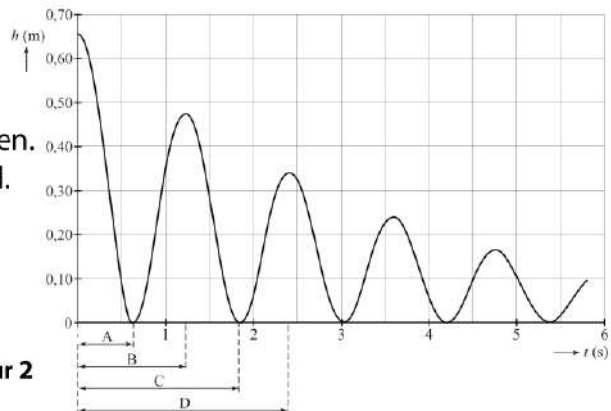
In een speeltuin staat een railbaan waarop een skateboard is bevestigd. Fermi stapt op het skateboard en beweegt heen en weer op de railbaan. Zie figuur 1. In figuur 2 is de hoogte van het skateboard als functie van de tijd weergegeven. De hoogte is gemeten ten opzichte van het laagste punt in de railbaan. Fermi startte op $t = 0$ s links op de railbaan.



Figuur 1

De trillingstijd van de beweging is de tijd die verstrijkt vanaf $t = 0$ s tot het moment dat Fermi weer in het hoogste punt links is. In figuur 2 zijn vier tijdsintervallen aangegeven. Eén van deze tijdsintervallen is de trillingstijd.

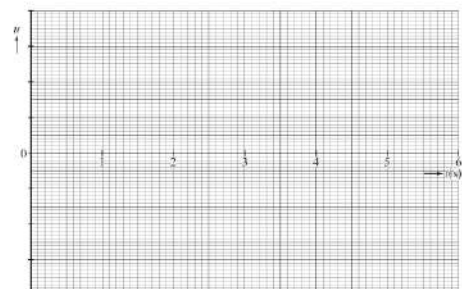
- 2p **1** Leg uit welk tijdsinterval overeenkomt met de trillingstijd van deze beweging.



Figuur 2

Het laagste punt op de railbaan is de even-wichtsstand van de trilling. De uitwijking u van trilling is de horizontale afstand tot de evenwichtsstand.

- 4p **2** Schets in figuur 3 het (u,t) -diagram van deze beweging tussen $t = 0$ s en $t = 5,5$ s. De schaalverdeling op de verticale as is niet van belang.



Figuur 3

In figuur 1 beweegt Fermi versneld omlaag. Hiervoor is een resulterende kracht in voorwaartse richting nodig. In figuur 4 is deze kracht met een vectorpijl op schaal weergegeven. In de figuur is ook de zwaartekracht op Fermi met een vectorpijl op schaal weergegeven. De totale massa van Fermi en het skateboard is 31 kg.

5p

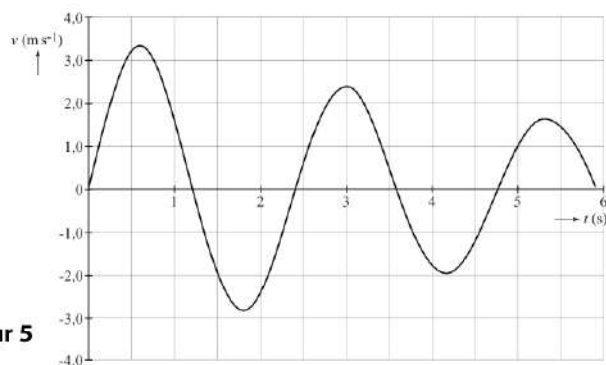
3 Voer de volgende opdrachten uit:

- Construeer in figuur 4 de component van de zwaartekracht langs de railbaan.
- Bepaal met behulp van figuur 4 de grootte van de wrijvingskracht (in Newton) langs de railbaan op het moment van de foto.



Figuur 4

In figuur 5 staat het (v,t) -diagram van de beweging. Als Fermi van links naar rechts beweegt is de snelheid positief; als Fermi van rechts naar links beweegt is de snelheid negatief.



Figuur 5

Op een bepaald moment is Fermi voor de eerste keer op het hoogste punt van zijn beweging rechts op de railbaan.

3p

4 Bepaal met behulp van figuur 5 de afstand die hij dan langs de baan heeft afgelegd.

Slinger van Wilberforce

De slinger van Wilberforce bestaat uit een veer waar een blok aan hangt. Zie figuur 1. Als het blok verticaal omlaag getrokken wordt en dan wordt losgelaten, ontstaat er een bijzondere beweging. Eerst beweegt het blok op en neer en draait nauwelijks heen en weer. Het draaien neemt toe en het op en neer bewegen neemt af. Na een tijdje draait het blok alleen nog maar heen en weer en is de verticale trilling verdwenen. Vervolgens komt de verticale beweging weer langzaam op gang en neemt het draaien af totdat het blok alleen nog maar op en neer beweegt en niet meer heen en weer draait. Dit herhaalt zich net zo lang totdat het blok door demping tot stilstand komt.



Figuur 1

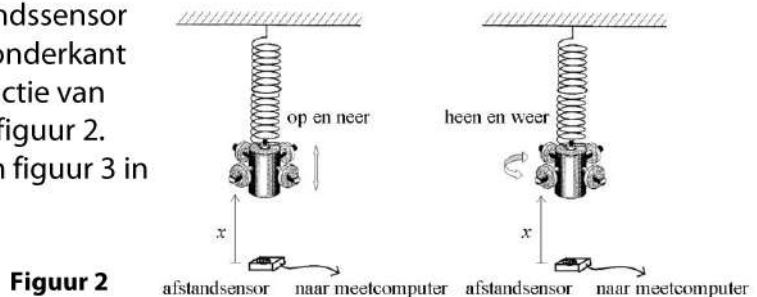
In de opstelling van figuur 1 heeft het blok een massa van 2,8 kg. De veerconstante van de veer is gelijk aan 49 N m^{-1} . Om de beweging te demonstreren, wordt het blok aan de veer voorzichtig 9,0 cm omlaag getrokken, maar nog niet losgelaten.

3p **1** Bereken de kracht van de veer die dan op het blok werkt.

Als het blok wordt losgelaten, gaat de veer trillen met een frequentie van 0,67 Hz.

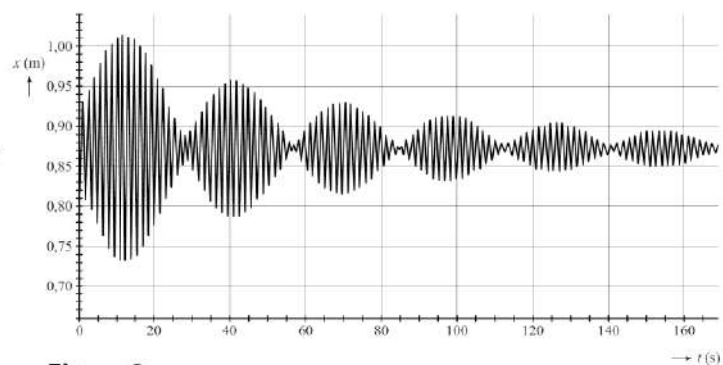
3p **2** Toon dit aan met behulp van een berekening.

Onder de slinger wordt een afstandssensor gelegd, zodat de afstand van de onderkant van het blok tot de sensor als functie van de tijd gemeten kan worden. Zie figuur 2. Het resultaat van zo'n meting is in figuur 3 in een (x,t)-diagram weergegeven.



1p **3** Bepaal met behulp van figuur 3 de afstand van de onderkant van het blok tot de sensor, als het blok tot stilstand is gekomen.

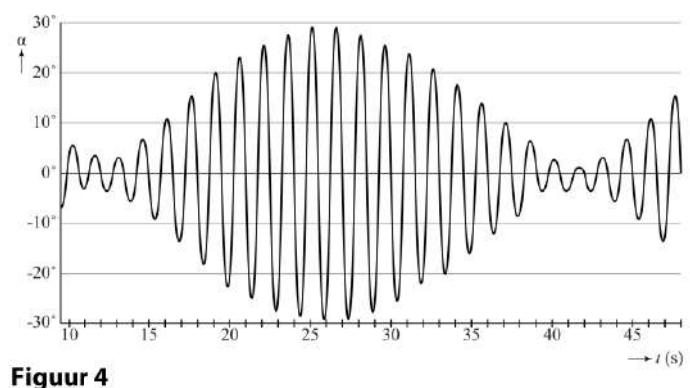
2p **4** Geef figuur 3 met de letter V alle tijdstippen aan waarop het blok alléén verticaal op en neer beweegt en niet draait.



Met een draaihoeksensor wordt vervolgens de hoek waarover het blok draait als functie van de tijd gemeten. Het resultaat van deze meting is in figuur 4 weergegeven.

4p **5** Beantwoord nu de volgende vragen:

- Bepaal met behulp van de figuur 4 de draaifrequentie van de slinger van Wilberforce. Licht je antwoord toe.
- Leg uit of er bij de slinger van Wilberforce sprake is van resonantie.

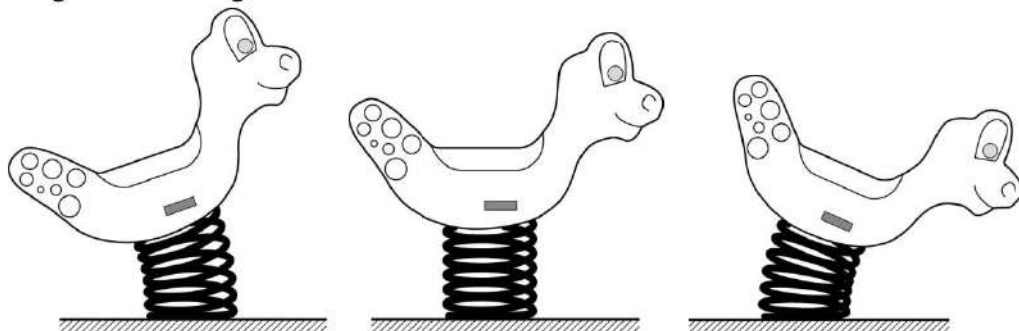


Examenvragen vwo

Schommelbeest (aangepast)

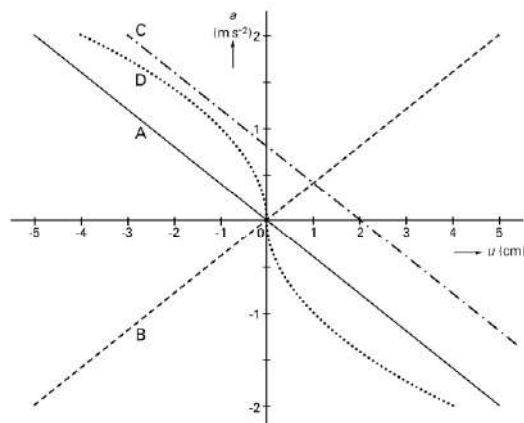
In stadsparken tref je vaak 'schommelbeesten' aan. Schommelbeesten zijn figuren van dieren die op een stugge veer in de grond bevestigd zijn. Kinderen kunnen hier leuk op schommelen. Zo'n schommelbeest wordt een eindje uit zijn evenwichtsstand getrokken en vervolgens losgelaten. Zie figuur 1.

Figuur 1



Van de beweging van het zwaartepunt is een (u,t) -diagram geregistreerd met behulp van een plaatssensor. Vervolgens is aan de hand van dit diagram de versnelling bepaald voor verschillende waarden van de uitwijking van het zwaartepunt. De beweging blijkt een harmonische trilling te zijn. In figuur 2 is in grafiek A de versnelling a uitgezet tegen de uitwijking u

Figuur 2



- 4p **1** Geef een kenmerk van een harmonische trilling en leg met behulp van dat kenmerk uit waarom ieder van de grafieken B, C en D niet bij een harmonische trilling horen. B niet omdat, C niet omdat, D niet omdat

Grafiek A is ook in figuur 3 weergegeven.

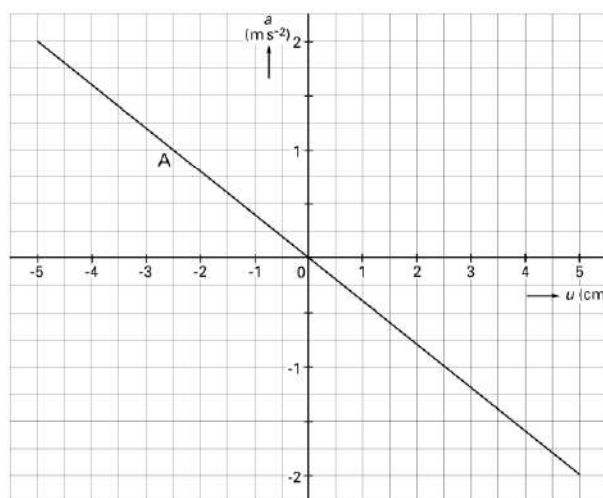
Voor een harmonische trilling geldt:

$$a = -4\pi^2 f^2 \cdot u$$

- 3p **2** Toon dit aan.

- 2p **3** Bepaal de schommelfrequentie met behulp van de figuur 3 in twee significante cijfers.

Figuur 3



Sloopkogel (aangepast)

Cindy en Dirk zien dat een oude flat gesloopt wordt met een sloopkogel. Zie figuur 1. De kogel hangt aan een kabel. Hij wordt met een touw naar rechts getrokken en vervolgens losgelaten zonder beginsnelheid. Cindy merkt op dat de kabel precies verticaal is op het moment dat de kogel tegen een muur botst. Ze meet een tijdsduur van 2,3 s tussen het loslaten van het touw en het botsen van de kogel.



Figuur 1

- 3p **1** Bereken de lengte van de kabel. Neem hierbij aan dat de sloopinstallatie is op te vatten als een gewone slinger.

Cindy veronderstelt dat de snelheid van de kogel in het laagste punt afhangt van de lengte van de slinger, zelfs als steeds met dezelfde uitwijkhoek wordt begonnen. Om deze hypothese te onderzoeken, doen Cindy en Dirk op school een proef met een blokje aan een dun draadje. Zij gebruiken onder andere een laser, een lichtsensor en een elektronische klok.

- 4p **2** Beschrijf hoe Cindy en Dirk met behulp van deze instrumenten de hypothese van Cindy kunnen toetsen. Neem in je antwoord de volgende elementen op:
- één of meer grootheden die gevarieerd worden;
 - één of meer grootheden die constant gehouden worden;
 - de manier waarop de snelheid in het laagste punt kan worden bepaald;
 - hoe uit de metingen geconcludeerd kan worden of Cindy's hypothese al dan niet juist is.

Als de uitwijkingshoek in het begin klein is geldt voor de snelheid op het laagste punt:

$$v_{\max} = A \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

- A is de amplitude in meter (m)
- g is de valversnelling (m/s^2)
- ℓ is de lengte van de slinger in meter (m)

- 3p **3** Toon dit aan.

Wipwap met paarden (aangepast)

In figuur 1 zie je een foto van een geveerde wipwap met paarden. De twee veren zijn even stug. Vera en Linda gaan wipwappen. Ze bewegen vanuit de evenwichtstand 50 cm omhoog en omlaag.

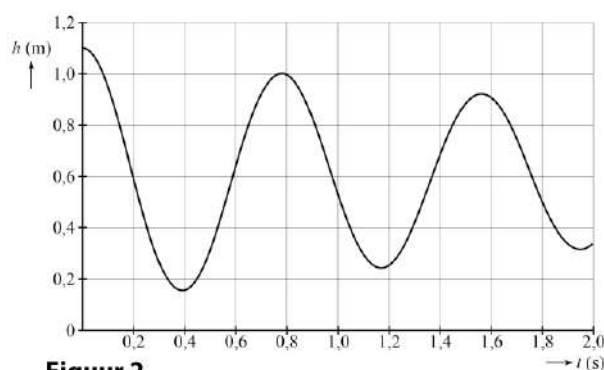
Vanaf een bepaald moment zetten ze zich niet meer tegen de grond af en bewegen ze zich niet meer naar voren of naar achteren. Dit tijdstip noemen we $t = 0$ s.



Figuur 1

Met behulp van een afstandssensor wordt vanaf dit tijdstip de afstand van de grond tot de onderkant van de rechter zitplank gemeten. Het resultaat van deze metingen vind je in figuur 2.

- 3p **1** Bepaal met behulp van de figuur de grootste snelheid van de kinderen in dit tijdsinterval.



Figuur 2

De wipwap met de twee meisjes kan beschreven worden met een model, waarbij aangenomen wordt dat de formule voor de trillingstijd van een massaveersysteem geldt. Dat model gaat uit van één veer met een veerconstante van $4,5 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-1}$.

- 3p **2** Bepaal de massa van dit massaveersysteem die uit dat model volgt.

Linda en Vera zetten zich weer af tegen de grond, zodat ze na verloop van tijd weer bewegen met een amplitude van 50 cm. Met het gebruikte model van het massaveersysteem is de extra energie te berekenen die de kinderen daarbij gedurende één trillingstijd moeten leveren.

- 4p **3** Bepaal met behulp van figuur 2 deze extra energie.

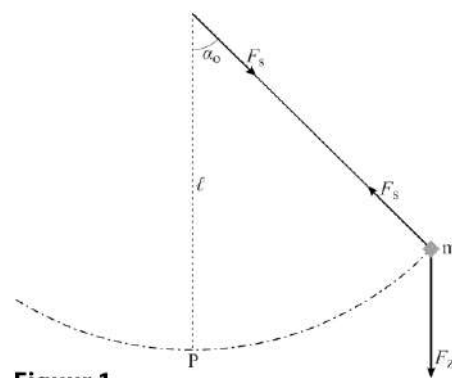
Spankracht in een slingerkoord (aangepast)

Sanne onderzoekt met een krachtsensor de spankracht F_s in het koord van een slinger. Op $t = 0 \text{ s}$ laat zij het blokje los bij een beginhoek α_0 . Zie figuur 1. Deze figuur is niet op schaal.

Voor de opstelling geldt:

- slingerlengte $\ell = 40 \text{ cm}$
- massa $m = 50 \text{ g}$.

De massa van het koord wordt verwaarloosd.

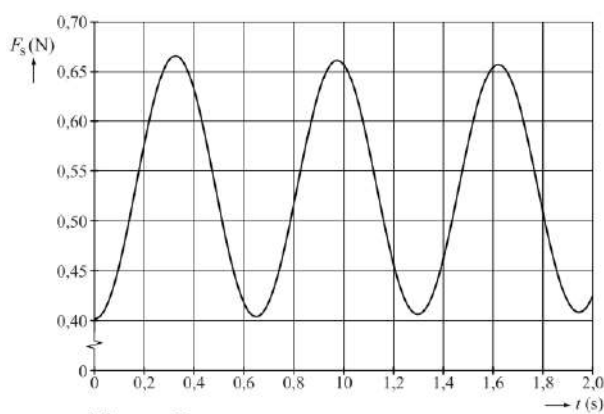


Figuur 1

De resultaten van de metingen in het onderzoek van Sanne staan in figuur 2.

Sanne constateert dat de frequentie van spankracht F_s tweemaal zo groot is als de slingerfrequentie.

- 4p **1** Voer de volgende opdrachten uit:
- Laat dat zien, met onder andere een berekening.
 - Geef de reden hiervoor.



Figuur 2

Sanne gebruikt de waarde van F_s bij $t = 0$ s in figuur 2 om de beginhoek α_0 te bepalen. Hiertoe splitst ze de zwaartekracht in een component evenwijdig aan de spankracht en een component loodrecht op de spankracht.

- 4p **2** Voer de volgende opdrachten uit:
- teken in figuur 1 de component van F_z evenwijdig aan de spankracht
 - toon aan dat $F_s = F_z \cdot \cos \alpha$
 - bepaal de waarde van α_0

In het laagste punt P van de beweging geldt voor de grootte van de spankracht:

$$F_{sp} = m \cdot g + \frac{m \cdot v_p^2}{\ell}$$

- v_p is de snelheid in punt P (m/s).
- ℓ is de slingerlengte (m)

- 2p **3** Toon aan dat $\frac{m \cdot v_p^2}{\ell}$ dezelfde eenheid heeft als de eenheid van F_{sp} .

- 2p **4** Bepaal met behulp van figuur 2 de grootte van v_p .

In figuur 3 is het resultaat van de metingen tot $t = 10$ s weergegeven. Na 100 s hangt de massa stil.

- 2p **5** Hoe groot is dan de waarde van de spankracht? Licht je antwoord toe.

Figuur 3

