

9 Trillingen

vwo

9.0 Inleiding

Trillingen zijn overal, want ieder atoom trilt. Hoe hoger de temperatuur is hoe harder atomen trillen. Uit de kwantummechanica volgt dat atomen nooit stil kunnen staan, zelfs niet als je ze afkoelt tot het absolute nulpunt. Lang voor de ontwikkeling van de kwantummechanica zijn natuurkundigen al geïnteresseerd in trillingen. Een belangrijke reden is de behoefte om tijd nauwkeurig te kunnen meten. Tijd meet je met een klok en in een klok moet er iets met een vast ritme bewegen.

In de oudheid wordt de tijd gemeten via beweging van de hemellichamen. De draaiing van de aarde om haar as en om de zon veroorzaakt een periodieke verandering van dag en nacht en van seizoenen in een jaar. Waterklokken worden vanaf de 16^e eeuw v. Chr. gebruikt om de tijd te meten. Een dun straaltje water loopt uit een vat en wordt opgevangen in een ander vat. De hoeveelheid opgevangen water is een maat voor de verstreken tijd. Maar uit de beweging van hemellichamen en de opgevangen hoeveelheid water kun je de tijd niet nauwkeurig meten.



Een waterklok

Galileo Galilei (1564–1642) wil de versnelling meten waarmee voorwerpen vallen. Hij realiseert zich dat luchtweerstand een rol speelt en dat de valhoogte daarom niet te groot mag zijn. Maar als je iets van een lage hoogte laat vallen gaat het zo snel dat hij onmogelijk de valtijd kan meten. In 1602 start hij zijn onderzoek aan de slinger, waarbij hij ontdekt dat de slingertijd niet afhankelijk is van de massa of de uitwijking maar dat er een recht evenredig verband is tussen de slingertijd en de wortel van de lengte. Aan het einde van zijn leven ontwerpt hij een slinger die door zijn zoon Vincenzo wordt vervaardigd. Deze slinger geeft maar enkele tikken en kan daarom niet als klok worden gebruikt.

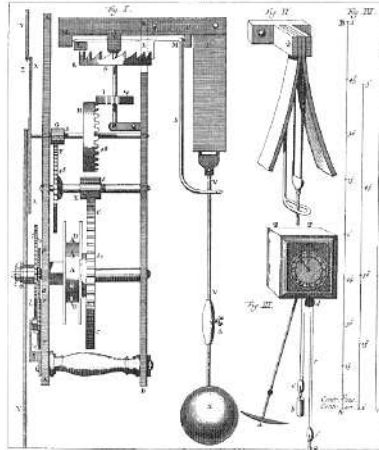


Slinger van Galilei

Christiaan Huygens (1629–1695) vindt in 1657 de slingerklok uit en publiceert in 1673 de natuurkundige formule waarmee je de slingertijd kunt berekenen. Voor het eerst is er een klok waarmee je de tijd nauwkeurig kunt meten. Voor navigatie op zee en in de sterrenkunde is een nauwkeurig tijdmeting cruciaal. De klok van Huygens heeft een afwijking van maar 15 seconden per dag.



Christaan Huygens



Ontwerp voor slingerklok



Slingerklok van Huygens

Johann Bernoulli (1667–1748) houdt zich bezig differentiaalvergelijkingen, waarbij hij gebruikmaakt van de wiskunde die door Leibnitz en Newton is ontwikkeld. In 1727 vindt hij de formule van de trillingstijd van een massaveersysteem. Zijn leerling **Leonhard Euler** (1707–1783) zet zijn werk voort en publiceert in 1739 de theorie van harmonische trillingen. Behalve de formule voor de trillingstijd leidt Euler ook de formule af voor een aangedreven massaveersysteem, waarmee je resonantie kunt verklaren. Niet alle trillingen zijn harmonisch, maar **Joseph Fourier** (1768–1830) toont aan dat je iedere trilling kunt opvatten als een optelling van harmonische trillingen.



Johann Bernoulli



Leonhard Euler



Joseph Fourier

Golven worden veroorzaakt door trillingen in een elastisch medium. Om golven te kunnen begrijpen moet je je dus eerst verdiepen in trillingen.

Inhoud

9.1	Wat is een trilling?	4
	– Een periodieke beweging	4
	– De evenwichtsstand	4
	– Het (uitwijking, tijd)-diagram	7
	– Damping	7
9.2	Het meten van een trilling	8
	– Oscilloscoop	8
	– Elektrocardiogram	9
	– Seismograaf	10
9.3	Fase en gereduceerde fase	11
	– Fase	11
	– Gereduceerde fase	11
	– Faseverschil	12
	– In fase en in tegenfase	12
	– Coherente trillingsbronnen	13
9.4	Harmonische trilling	14
	– Harmonische trilling	14
	– Massaveersysteem	15
	– Slinger	16
9.5	De energie van een trillend voorwerp	18
	– Energie	18
	– Damping	19
	– De maximale snelheid bij een harmonische trilling	21
9.6	Resonantie	23
	– Eigenfrequentie en aandrijffrequentie	23
	– Resonantie	23
9.7	Wiskundige beschrijving	27
	– Radiaal als eenheid van hoek	27
	– Sinusfunctie	27
	– Massaveersysteem	29
	– Samengestelde trillingen	30
	– Drieklanken in de muziek	30
	– Een trilling opgevat als optelling van harmonische trillingen	30
9.8	Samenvatting	32

9.1 Wat is een trilling?

Een periodieke beweging

Een voorwerp heeft een periodiek beweging als na een bepaalde tijd de **plaats**, de **snelheid** en de **versnelling** van het voorwerp precies hetzelfde is.

Bij een periodieke beweging zijn na een vaste tijd T (de periode) de plaats, de snelheid en de versnelling hetzelfde.

VOORBEELD periodieke bewegingen

- De wijzers van een analoge klok:
 - secondenwijzer: $T = 60$ seconden (1 minuut)
 - minutenwijzer: $T = 3600$ seconden (1 uur)
 - urenwijzer: $T = 43200$ seconden (12 uur)
- De maan die om de aarde draait: $T = 27,322$ dagen.
- De aarde die om de zon draait: $T = 365,256$ dagen.

De evenwichtsstand

Het bewegen van voorwerpen wordt vaak tegengewerkt door wrijvingskrachten. Om de beweging in stand te houden moet er dan een kracht worden uitgeoefend. Stopt deze kracht, dan zorgen de wrijvingskrachten ervoor dat het voorwerp snelheid verliest en tot stilstand komt. Bij een periodieke beweging onderscheiden we twee situaties:

- stilstaan gebeurt op een willekeurige plaats → er is GEEN evenwichtsstand
- stilstaan gebeurt altijd op dezelfde plaats → er is WEL een evenwichtsstand

Alleen in de tweede situatie is er een **evenwichtsstand**.

De evenwichtsstand is de plaats waar bij een periodieke beweging het voorwerp tot stilstand komt als het wordt afgeremd door een wrijvingskracht.

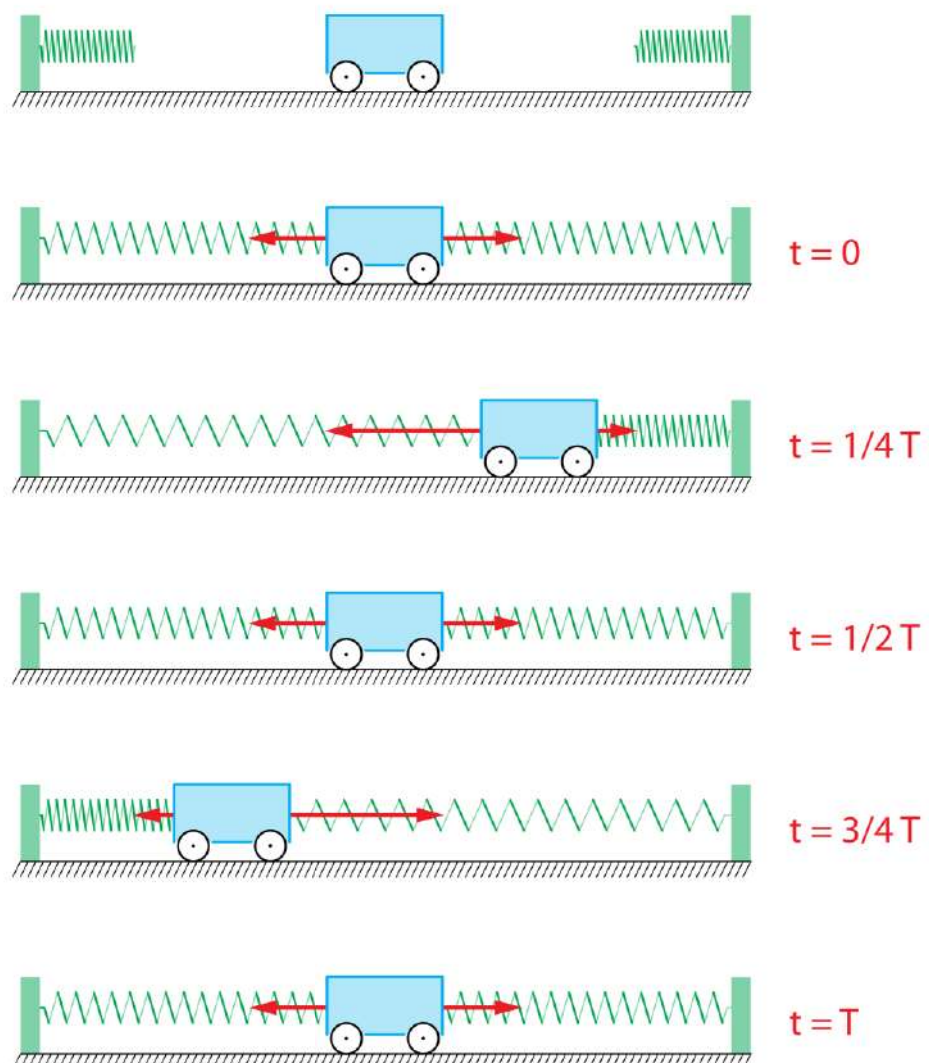
De evenwichtsstand is de plaats van het voorwerp als het met rust wordt gelaten. Deze situatie nemen we als uitgangspunt. Vervolgens brengen we het voorwerp uit de evenwichtsstand en laten het daarna los, waardoor het in beweging komt. Het voorwerp gaat een trilling uitvoeren als er een kracht werkt die gericht is naar de evenwichtsstand.

Een trilling is een periodieke beweging om een evenwichtsstand.

Bij een trilling veranderen de uitwijking de snelheid en de versnelling voortdurend.

Als voorbeeld nemen we een kar die aan twee kanten met spiraalveren is vastgemaakt. Zie figuur 1. In het bovenste plaatje is de kar nog niet aan de veren bevestigd zodat er geen horizontale krachten werken. We plaatsen de kar midden tussen de veren en maken de veren vast. De krachten waarmee de veren aan de kar trekken zijn even groot en tegengesteld gericht. Zie figuur 1, $t = 0$. De kar bevindt zich nu in de evenwichtsstand. Met een externe kracht verplaats je de kar naar rechts en laat je hem los. Je krijgt dan de situatie die is weergegeven in figuur 1, $t = \frac{1}{4} T$. De linkerveer is uitgerekt en oefent een grotere kracht op de kar uit dan de rechterveer, die minder ver is uitgerekt. De resulterende kracht is naar het midden gericht, waardoor de kar gaat versnellen naar de evenwichtsstand. Als dit gebeurt wordt de kracht naar links steeds kleiner en de kracht naar rechts steeds groter.

Op een bepaald moment bevindt de kar zich in de evenwichtsstand. Zie figuur 1, $t = \frac{1}{2} T$. Op dit tijdstip zijn beide krachten weer gelijk en is de versnelling dus nul. De kar heeft nu zijn hoogste snelheid bereikt. De kar rijdt verder naar links en dan gebeurt het omgekeerde, de kracht naar rechts wordt groter dan de kracht naar links en de resulterende kracht is weer gericht naar de evenwichtsstand. Deze resulterende kracht is tegengesteld aan de bewegingsrichting en zorgt voor een vertraging. Op $t = \frac{3}{4} T$ bevindt de kar zich in de uiterste stand links en op $t = T$ bevindt de kar zich opnieuw in de evenwichtsstand. Dit proces herhaalt zich, waardoor de kar heen en weer gaat bewegen om de evenwichtsstand. De kar voert een trilling uit.

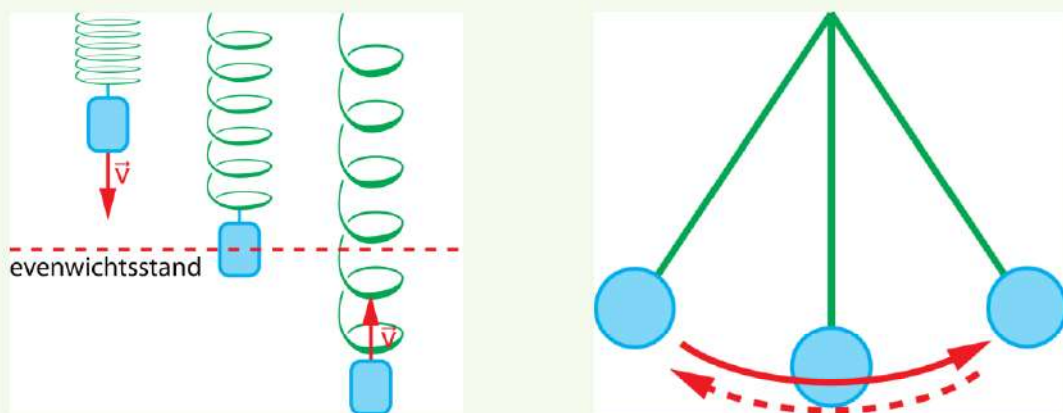


Figuur 1 Kar aan twee veren.

Bij een trillend voorwerp is de resulterende kracht steeds gericht naar de evenwichtsstand. In de evenwichtsstand geldt $\Sigma F = 0$.

Trillingen zijn overal te vinden. Ieder atoom is voortdurend aan het trillen. De meeste trillingen houden na een tijdje op, doordat vanwege wrijving de beweging afremt. Hierdoor komt het voorwerp in de evenwichtsstand tot rust. Een externe kracht kan het voorwerp opnieuw uit de evenwichtsstand brengen, waarna het weer een tijdje trilt. Twee voorbeelden die je vaak tegenkomt zijn een massa aan een spiraalveer en een slinger. Zie figuur 2.

VOORBEELD massa aan een veer en een slinger



Figuur 2 Massa-veersysteem (links) en een slinger (rechts).

Om een trilling te kunnen beschrijven gaan we eerst een aantal grootheden en eenheden afspreken. Zie onderstaande tabel.

Grootheid	Eenheid	Definitie
uitwijking u	meter (m)	u is de plaats van het voorwerp ten opzichte van de evenwichtsstand.
amplitude A	meter (m)	A is de maximale grootte van de uitwijking.
trillingstijd of periode T	seconde (s)	T is de tijd waarin één volledige trilling wordt uitgevoerd.
frequentie f	Hertz (Hz) $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$	f is het aantal trillingen dat per seconde wordt uitgevoerd.

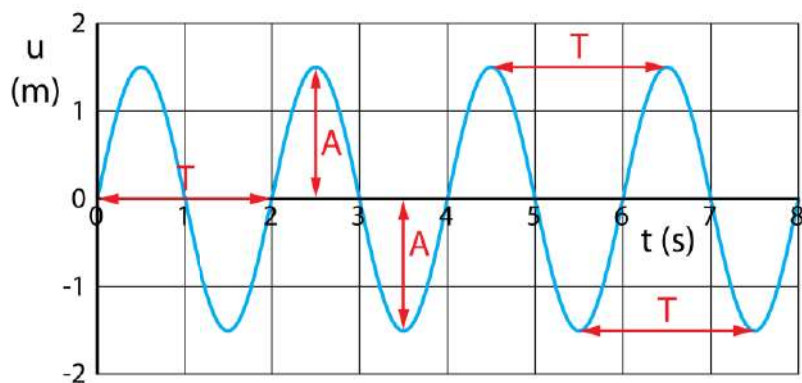
De **frequentie** is het omgekeerde van de trillingstijd (periode).

$$f = \frac{1}{T} \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{f}$$

- T is de trillingstijd (periode) in seconde (s)
- f is de frequentie in Hertz (Hz)

Het (uitwijking, tijd)-diagram

Een (u, t)-diagram geeft op ieder tijdstip de uitwijking weer. Op de verticale as staat de uitwijking en op de horizontale as de tijd. Zie figuur 3. In een (u, t)-diagram kun je de amplitude en de trillingstijd aflezen.



Figuur 3 (u, t)-diagram. In de figuur zijn T en A aangegeven.

In de **uiterste stand** is de uitwijking maximaal, is de snelheid nul en is de versnelling maximaal. In de **evenwichtsstand** is de uitwijking nul, is de snelheid maximaal en is de versnelling nul. In tabel hier-naast zijn deze eigenschappen samengevat.

situatie	u (m)	v (m/s)	a (m/s ²)
uiterste stand positief	maximaal	0	maximaal
evenwichtsstand	0	maximaal	0
uiterste stand negatief	maximaal	0	maximaal

Damping

Bij een **gedempte** trilling is er een wrijvingskracht die de beweging afremt. Hierbij wordt energie omgezet in warmte, waardoor de amplitude langzaam afneemt en uiteindelijk nul wordt. Hoe groter de wrijving is hoe sneller de amplitude afneemt. Het is opvallend dat bij een gedempte trilling de frequentie niet verandert. Als de damping klein is merk je in één periode vrijwel niet dat de amplitude afneemt. Hoewel de beweging dan niet helemaal periodiek is blijven we toch van een trilling spreken.

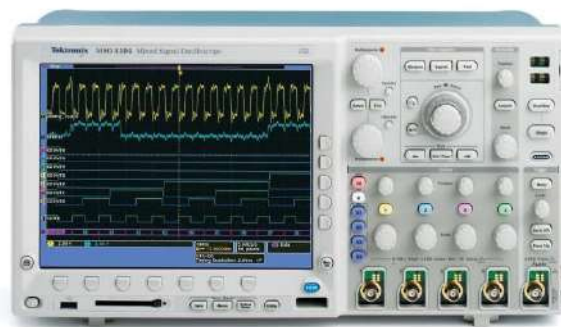
Bij een gedempte trilling neemt de amplitude af en blijft de frequentie gelijk.

9.2 Het meten van een trilling

Om van een trilling het (u, t)-diagram te krijgen moet je snel achter elkaar de plaats meten. Hoe hoger de frequentie van het signaal is, hoe sneller je moet meten. In iedere periode moet je minimaal twee meting uitvoeren, omdat in één periode de trilling twee keer door de evenwichtsstand gaat. Met een moderne oscilloscoop is het mogelijk om meer dan een miljard keer per seconde een meting te verrichten.

Oscilloscoop

Met een oscilloscoop kan je snel achter elkaar een elektrische spanning meten. Om een oscilloscoop te gebruiken moet je dus eerst de beweging omzetten in een spanning. Hoe dat gaat is voor dit hoofdstuk niet belangrijk. Het resultaat wordt op een beeldscherm weergegeven. Horizontaal staat de tijd en verticaal de spanning. De tijd waarin het scherm van links naar rechts wordt doorlopen kan worden aangepast. Is deze tijd gelijk aan de trillingstijd, dan zie je één trilling op het scherm. Met instelling van de verticale schaal kun je ervoor zorgen dat de trilling goed op het scherm past. Zie figuur 4.



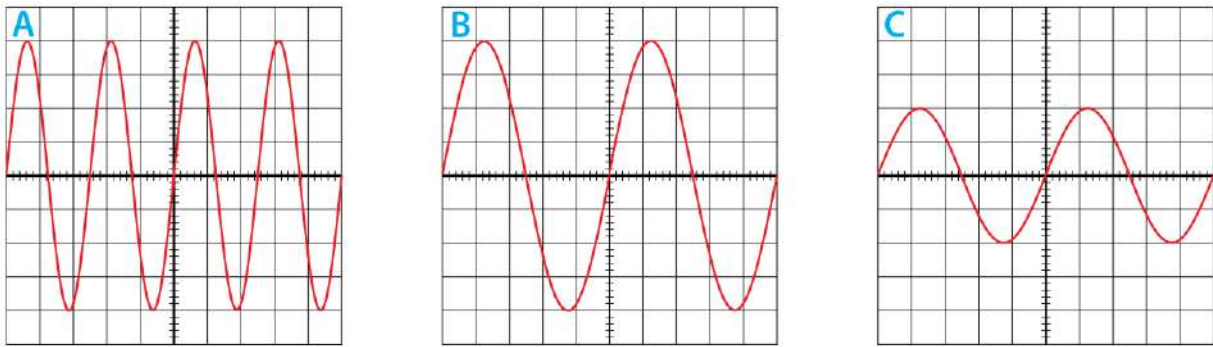
Figuur 4 Digitale oscilloscoop.

De **tijdbasis** geeft aan hoeveel seconden één hokje horizontaal is en wordt uitgedrukt in seconden per schaaldeel (hokje): **time / div**. Hierin is **div**. de afkorting van division (Engels: verdeling). Door het aantal hokjes horizontaal te tellen en dit te vermenigvuldigen met de tijdbasis kun je de tijd tussen twee gebeurtenissen bepalen.

De **gevoeligheid** geeft aan hoeveel volt één hokje verticaal is en wordt uitgedrukt in volt per schaaldeel (hokje): **volt / div**. Door het aantal hokjes verticaal te tellen en dit te vermenigvuldigen met de gevoeligheid kun je de spanning van een gebeurtenis bepalen.

Tijdbasis (time / div)	→	de tijdsduur van één hokje	(horizontaal)
Gevoeligheid (volt / div)	→	de spanning van één hokje	(verticaal)

In figuur 5 zie je drie oscilloscoopbeelden van dezelfde trilling. Uitgaande van de instelling bij A is de tijdbasis bij B gehalveerd. De meting is twee keer zo snel en daarom zie je in plaats van 4 trillingen nog maar 2 trillingen op het scherm. Bij instelling C is de gevoeligheid verdubbeld, zodat de amplitude van 4 naar 2 hokjes is gegaan.



Figuur 5 Oscilloscoopbeeld met verschillende instellingen. Bij instelling B is de tijdbasis de helft van die van A. Bij instelling C is de gevoeligheid het dubbele van die van A en B.

VOORBEELD oscilloscoop

In figuur 6 is het (u, t)-diagram van een trilling weergegeven op een oscilloscoop.

De tijdbasis is 0,50 s / div

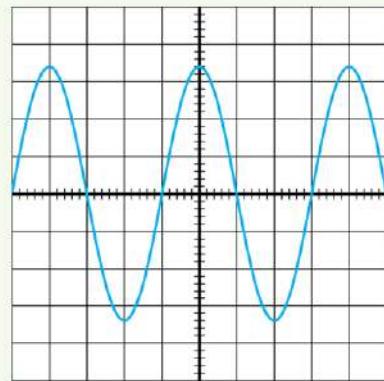
De gevoeligheid is 2,0 V / div

Bepaal de amplitude.

- amplitude = 3,4 hokjes
- $A = 3,4 \cdot 2 = 6,8 \text{ V}$

Bepaal de frequentie.

- trillingstijd is 4 hokjes $\rightarrow T = 4 \cdot 0,5 = 2,0 \text{ s}$
- $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{2,0} = 0,5 \text{ Hz}$



Figuur 6

Elektrocardiogram (ECG)

Een elektrocardiogram is een registratie van de spanningen die de hardspier laat samen-trekken en ontspannen. Deze spanningen hebben een grootte van enkele millivolt. Zie figuur 7. De ECG is in 1903 door Willen Einthoven (1860–1927) uitgevonden, waarvoor hij in 1924 de Nobelprijs voor geneeskunde krijgt.

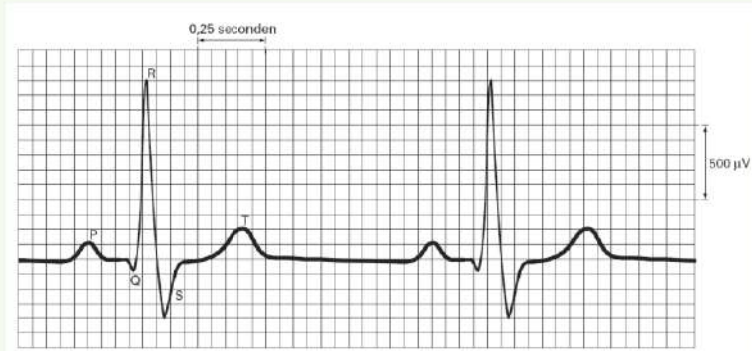


Figuur 7 Links: apparaat voor ECG-meting. Rechts: monitor op een intensive care.

VOORBEELD elektrocardiogram (ECG)

Een kloppend hart kun je zien als een trillend voorwerp. Bij een mens varieert de hartslag tussen 40 en 180 slagen per minuut. Om de harfspier te laten samentrekken worden elektrische spanningen in het hart opgewekt. Deze spanningen kun je meten en geven een elektrocardiogram (ECG). Zie figuur 8.

Tijdbasis is 0,05 s / div.
Gevoeligheid is 100 μV / div.



Figuur 8 ECG

Bepaal de frequentie van het hart.

- tussen de maxima R zitten 25 hokjes en 1 hokje correspondeert met 0,05 s
- trillingstijd (periode) is $25 \cdot 0,05 = 1,25$ s
- $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{1,25} = 0,80$ Hz

Bepaal het aantal hartslagen per minuut.

- $f = 0,80$ Hz $\rightarrow$ 0,80 slagen per seconde
- per minuut: $0,80 \cdot 60 = 48$ slagen per minuut

Seismograaf

Trillingen van de aardkorst worden geregistreerd door een seismograaf. Zie figuur 9.

Figuur 9 Een seismograaf waarmee trillingen van de aardkorst worden geregistreerd.

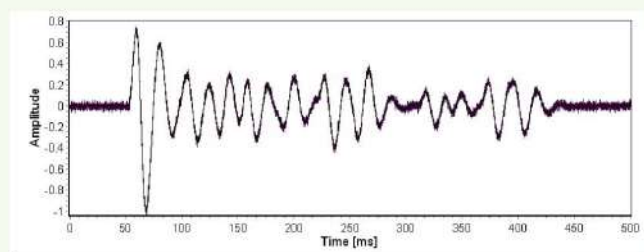


VOORBEELD seismogram

Met een seismograaf worden trillingen in de aardkorst gemeten. Zie figuur 10.

Bepaal de frequentie.

- 1^e minimum is op $t = 70$ ms
- 11^e minimum is op $t = 280$ ms
- tussen 1^e en 11^e minimum zitten 10 periodes
- trillingstijd is $\frac{280 - 70}{10} = 21$ ms
- $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{21 \cdot 10^{-3}} = 47,6$ Hz



Figuur 10

9.3 Fase en gereduceerde fase

Fase

Om een periodieke beweging te beschrijven moet je een tijdstip kiezen waarop de tijds-meting start. Dit moment is $t=0$. Meestal wordt hiervoor een moment gekozen waarop het voorwerp de evenwichtsstand in positieve richting passeert, maar noodzakelijk is dit niet, je mag ook een ander tijdstip kiezen.

Heb je het tijdstip $t=0$ vastgelegd dan kun je voor een willekeurig moment bepalen hoeveel trillingen er geheel of gedeeltelijk zijn uitgevoerd. Dit is de **fase** op tijdstip t . Voor de fase geldt: $\varphi = t / T$. Zie figuur 11.

De fase φ (fie) geeft aan hoeveel trillingen er geheel of gedeeltelijk zijn uitgevoerd vanaf $t = 0$.

$$\varphi = \frac{t}{T}$$

- φ is de fase (Griekse letter "fie") zonder eenheid (want een verhouding)
- t is het tijdstip waarop de fase wordt berekend in seconden (s)
- T is de trillingstijd in seconden (s)

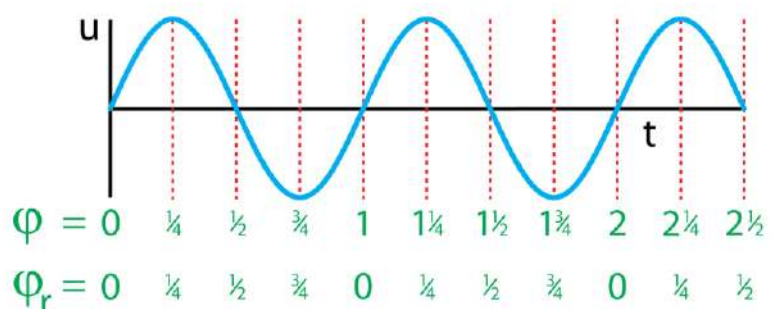
Gereduceerde fase

De gereduceerde fase φ_r geeft aan welk deel van de laatst begonnen trilling op tijdstip t is uitgevoerd. Een gereduceerde fase van 0,75 geeft aan dat op tijdstip t driekwart van de laatst begonnen trilling is uitgevoerd. Om φ_r te berekenen moet je het aantal hele trillingen niet meetellen. Heeft een voorwerp 7,75 trilling uitgevoerd vanaf $t=0$ dan is de fase 7,75 en de gereduceerde fase 0,75. Zie figuur 11.

$\varphi_r = \varphi$ min het aantal volledig uitgevoerde trillingen

- φ_r heeft geen eenheid en is een getal tussen 0 en 1

De gereduceerde fase geeft aan in welk deel van de cyclus het trillende voorwerp zich bevindt. Zijn op tijdstippen t_1 en t_2 de gereduceerde fasen gelijk, dan heeft het voorwerp op t_1 en t_2 dezelfde plaats, dezelfde snelheid en dezelfde versnelling.



Figuur 11 Fase φ en gereduceerde fase φ_r .

Faseverschil

Het faseverschil $\Delta\phi$ is het verschil in fase op tijdstippen t_1 en t_2 . De fase op t_1 is ϕ_1 en de fase op t_2 is ϕ_2 . Voor het faseverschil $\Delta\phi$ geldt:

$$\Delta\phi = \frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{\Delta t}{T}$$

- $\Delta\phi$ is het faseverschil (geen eenheid)
- Δt is het tijdsverschil tussen t_1 en t_2 in seconden (s)
- T is de trillingstijd in seconden (s)

BEWIJS $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{t_2}{T} - \frac{t_1}{T} = \frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{\Delta t}{T}$

VOORBEELD getijden (eb en vloed)

Door de zwaartekracht van de maan zijn er getijden. Twee keer per dag is het hoogtij en twee keer per dag laagtij. Op een dag is het hoogtij om 3 uur 's middags. Fase 0 is het moment waarop het water eerder op die dag door de evenwichtsstand van eb naar vloed is gegaan.

Bereken het tijdstip waarop $\phi = 0$.

- trillingstijd (periode) is 12 uur
- gerekend vanaf $\phi = 0$ duurt het $1/4$ periode = 3 uur voordat het hoogtij is
- $\phi = 0$ is om 12 uur 's middags

Bereken de fase van de zee de volgende dag om 9.00 uur 's avonds.

- tussen 12 uur 's middags en de volgende dag 9.00 uur 's avonds zitten $24 + 9 = 33$ uur
- $\phi = \frac{t}{T} \rightarrow \phi = \frac{33}{12} = 2,75$

Bereken de gereduceerde fase.

- $\phi_r = \phi$ min het aantal hele trillingen
- $\phi_r = 2,75 - 2 = 0,75$

Bereken het faseverschil tussen 10 uur 's avonds en 2 uur 's nachts.

- $\Delta\phi = \frac{\Delta t}{T} \mid T = 12 \text{ h}$
- tussen 10 uur 's avonds en 2 uur 's nachts zitten 4 uur $\rightarrow \Delta t = 4 \text{ uur}$
- $\Delta\phi = \frac{4}{12} = 0,33$

In fase en in tegenfase

Twee trillende voorwerpen A en B zijn **in fase** als ze op ieder moment dezelfde gereduceerde fase hebben. Twee trillende voorwerpen zijn **in tegenfase** als ze op ieder moment een gereduceerd faseverschil van 0,5 hebben. Zie figuur 12.

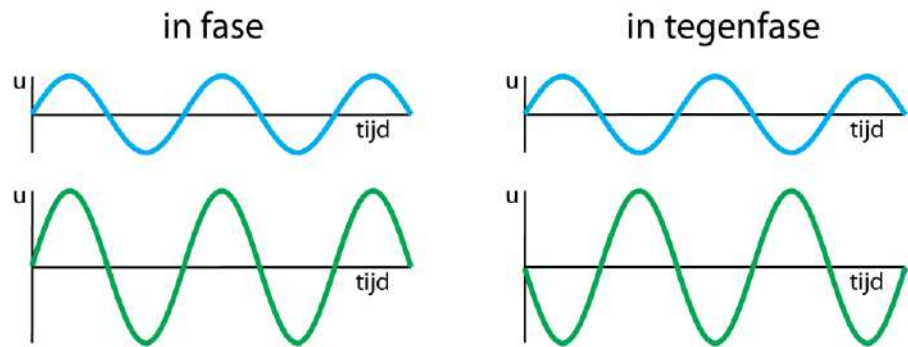
In fase A en B hebben steeds dezelfde gereduceerde fase.

$$\varphi_{rA} = \varphi_{rB}$$

In tegenfase A en B hebben steeds een gereduceerd faseverschil van $1/2$.

$$\varphi_{rA} = \varphi_{rB} \pm \frac{1}{2}$$

Figuur 12 Fase en tegenfase.



Coherente trillingsbronnen

Coherente trillingsbronnen hebben een constant faseverschil én hetzelfde tijdsverloop (dezelfde vorm). In figuur 12 zie je (u, t)-diagrammen van coherente trillingsbronnen.

Coherente trillingsbronnen zijn trillingsbronnen met:

- een constant faseverschil (dus dezelfde frequentie)
- hetzelfde tijdsverloop (dezelfde vorm)

9.4 Harmonische trilling

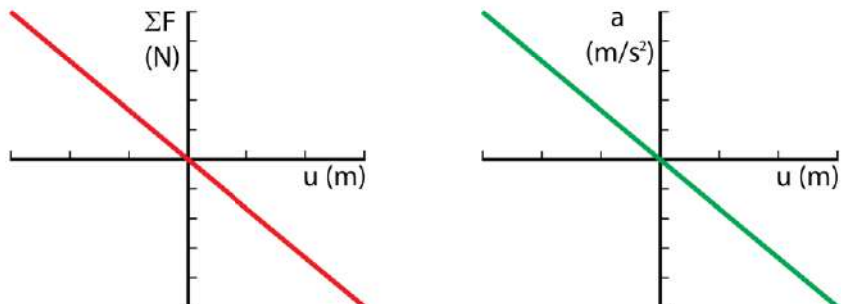
Harmonische trilling

Een speciaal soort trilling die vaak voorkomt is de **harmonische** trilling. Bij een harmonische trilling is de resulterende kracht **recht evenredig** met de uitwijking. Omdat de richting van resulterende kracht tegenovergesteld is aan de uitwijking is er een **negatieve richtingscoëfficiënt**.

$$\Sigma F = -C \cdot u$$

- ΣF is de resulterende kracht in newton (N)
- C is de veerconstante in newton per meter (N/m)
- u is uitwijking in meter (m)

Omdat $\Sigma F = m \cdot a$ mogen we schrijven: $m \cdot a = -C \cdot u \rightarrow a = (-C/m) \cdot u$. Hieraan zie je dat bij een harmonische trilling er ook een recht evenredig verband is tussen de versnelling en de uitwijking. Zie figuur 13. Bij een (F, u) -diagram is de richtingscoëfficiënt gelijk aan $-C$. Bij een (a, u) -diagram is de richtingscoëfficiënt gelijk aan $-C/m$.



Figuur 13 (F, u) -diagram en (a, u) -diagram voor een harmonische trilling.

Bij een harmonische trilling beweegt het voorwerp in een vloeiende beweging om de evenwichtsstand. De afstand van het voorwerp tot de evenwichtsstand verandert met een **sinusfunctie**. Later leer je hier meer over. In figuur 14 zie je het (u, t) -diagram van een harmonische trilling. Aan de (u, t) -grafiek is te zien dat de raaklijn het steilst is op de tijdstippen waarop het voorwerp door de evenwichtsstand gaat.

- evenwichtsstand: $v = v_{\max} = \frac{dx}{dt}$

richtingscoëfficiënt van de raaklijn

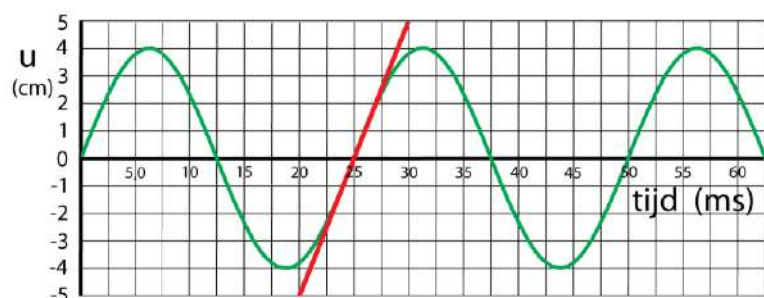
- uiterste stand:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0 \text{ m/s}$$

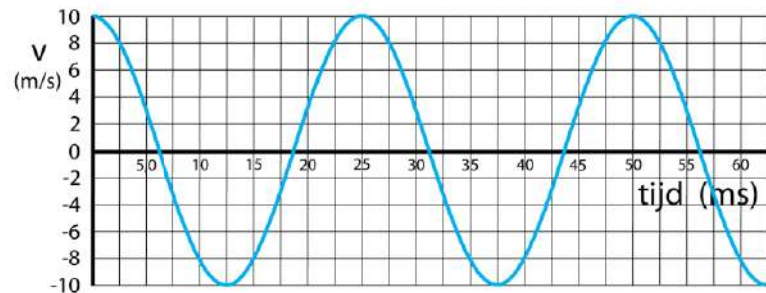
Uit figuur 14 volgt dat

$$v_{\max} = \frac{0,1}{0,01} = 10 \text{ m/s}$$

Figuur 14 (u, t) -diagram van een harmonische trilling.



Als we uit het (u, t)-diagram het (v, t)-diagram afleiden vinden we figuur 15. Zoals je ziet is dit ook een sinusvormige grafiek. Op de tijdstippen waarop u = 0 is de snelheid maximaal. Op de tijdstippen waarop u = maximaal is de snelheid nul.



Figuur 15 (v, t)-diagram van een harmonische trilling.

Uit het (v, t)-diagram kun je een (a, t)-diagram afgeleiden door steeds de raaklijn te nemen. Je vindt dan opnieuw een sinusvormige grafiek. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de (v, t)-grafiek is maximaal als v = 0. Dit gebeurt op de tijdstippen waarop de bewegingsrichting omkeert. Op deze tijdstippen is de uitwijking maximaal.

Een harmonische trilling heeft sinusvormige (u, t)-, (v, t)- en (a, t)- grafieken.

Massaveersysteem

Hang je een voorwerp aan een spiraalveer dan rekt de veer uit tot de evenwichtsstand. Geef je het voorwerp daarna een uitwijking A dan gaat het voorwerp trillen met amplitude A. Er geldt $\Sigma F = -C \cdot u$ en het voorwerp gaat dus een harmonische trilling uitvoeren. Voor de trillingstijd geldt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$$

- T is de trillingstijd in seconden (s)
- m is de massa van het voorwerp in kilogram (kg) [verwaarloos de massa van de veer](#)
- C is de veerconstante in newton per meter (N/m)

MERK OP dat de trillingstijd niet afhankelijk is van de amplitude.

Het bewijs van deze formule vind je in paragraaf 9.7.

De trillingstijd en de frequentie worden bepaald door de massa en de veerconstante. Dit zijn eigenschappen van het systeem en vandaar dat je spreekt van de **eigen trillingstijd** en de **eigen frequentie**. Het maakt niet uit hoe de trilling wordt veroorzaakt, eenmaal aan zichzelf overgelaten gaat het massaveersysteem steeds met dezelfde frequentie trillen. Aan de formule zie je ook dat de amplitude geen invloed heeft op de trillingstijd. Maak je de amplitude groter dan krijgt het voorwerp een grotere snelheid zodat een trilling in dezelfde tijd wordt uitgevoerd.

De eigen trillingstijd en eigen frequentie zijn de trillingstijd en frequentie als het systeem niet van buiten wordt beïnvloed.

VOORBEELD **dobber**

Een dobber drijft in het water. De kracht die nodig is om een dobber dieper in het water te duwen of een stukje uit het water omhoog te trekken is recht evenredig met de uitwijking. Er geldt $\Sigma F = -C \cdot u$. De dobber gedraagt zich daarom als massaveersysteem. Je hebt 0,20 N nodig om de dobber 5,0 cm dieper in het water te drukken. De dobber heeft een massa van 80 gram.



Bereken de trillingstijd van de dobber.

- $F = C \cdot u \rightarrow C = \frac{F}{u}$
- $C = \frac{0,20}{5,0 \cdot 10^{-2}} = 4,0 \text{ N/m}$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{80 \cdot 10^{-3}}{4}} = 0,8886 = 0,89 \text{ s}$

Slinger

Een slinger is een gewicht dat vrij kan bewegen aan een koord. Als je een slinger uit de evenwichtsstand brengt gaat het heen-en-weer bewegen. Voor slingerhoeken die niet te groot zijn is ΣF vrijwel recht evenredig met de uitwijking. De slinger voert dan een harmonische trilling uit. Voor trillingstijd T van een harmonische slinger geldt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Deze formule geldt alleen als de slingerhoek kleiner is dan ongeveer 15 graden.

- T is de trillingstijd in seconden (s)
- ℓ is lengte van de slinger tussen het ophangpunt en het zwaartepunt in meter (m)
- g is valversnelling (m/s^2) **op aarde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$**

MERK OP dat de trillingstijd niet afhankelijk is van de massa.

VOORBEELD **secondeslinger**

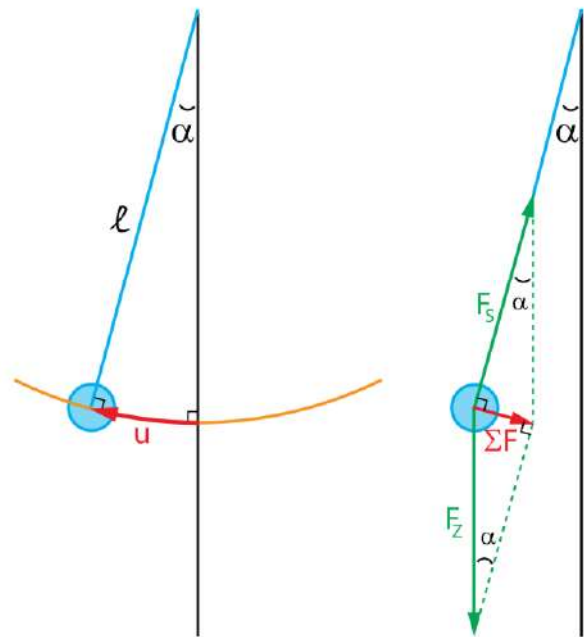
Om de tijd te meten wil je een slinger maken met een periode van 1,00 s

Bereken de lengte van de slinger.

- $T = 1,00 \text{ s} \mid g = 9,81 \text{ m/s}^2 \mid \ell = \dots \text{ m}$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \rightarrow 1,00 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{9,81}} \rightarrow \ell = 0,24849 = 0,248 \text{ m}$

BEWIJS trillingstijd van een slinger
(voor de liefhebber)

- figuur 16 links: benader als rechthoekige driehoek → mag alleen voor kleine hoek α
- $\tan \alpha \approx \frac{u}{\ell}$ en $\sin \alpha \approx \frac{u}{\ell}$
- figuur 16 rechts: $\sin \alpha = \frac{\Sigma F}{F_z}$
- geeft $\frac{\Sigma F}{F_z} = \frac{u}{\ell}$
- ΣF en u tegengesteld gericht
- $\Sigma F = -F_z \cdot \frac{u}{\ell} \rightarrow \Sigma F = -m \cdot g \cdot \frac{u}{\ell}$
- harmonisch: $\Sigma F = -C \cdot u$
- $C = \frac{m \cdot g}{\ell} \rightarrow \frac{m}{C} = \frac{\ell}{g}$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$ invullen geeft $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$



Figuur 16

9.5 De energie van een trillend voorwerp

Energie

Deze paragraaf gaat over de energie van een trillend voorwerp. Twee soorten energie spelen hierbij een rol, de **veerenergie** E_v en de **kinetische energie** E_k . Veerenergie vanwege het uitrekken of induwen van een veer en kinetische energie vanwege de snelheid. Het is opmerkelijk dat zwaarte energie geen rol speelt, ook niet bij een verticale trilling. Niet omdat we de zwaarte energie verwaarlozen, maar omdat de verandering van de zwaarte energie wegvalt in de formule. Aan het einde van deze paragraaf zal ik dit toelichten.

Op een willekeurig tijdstip heeft het voorwerp een uitwijking én een snelheid en bevat het veerenergie én kinetische energie: $E_v = \frac{1}{2}C \cdot u^2$ | $E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2$ $\rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}C \cdot u^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2$

Een trillend voorwerp bevat veerenergie én kinetische energie.

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}C \cdot u^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

In het begin oefen je een kracht uit om het voorwerp uit de evenwichtsstand te brengen. Deze kracht verricht arbeid die in het voorwerp wordt opgeslagen als veerenergie. Als je loslaat krijgt het voorwerp een snelheid en omdat energie behouden is zal een toename van de kinetische energie ten koste gaan van de veerenergie. We zien het volgende:

- uiterste stand $\rightarrow u = A$ én $v = 0$ $\rightarrow$ alleen veerenergie.
- evenwichtsstand $\rightarrow u = 0$ én $v = v_{\text{max}}$ $\rightarrow$ alleen kinetische energie

Bij een trillend voorwerp worden de veerenergie en de kinetische energie voortdurend in elkaar omgezet, waarbij de totale energie niet verandert. Het verlies aan veerenergie wordt gecompenseerd door een toename van kinetische energie.

uiterste stand	$\rightarrow$	$u = A$	én	$v = 0$	$\rightarrow$	$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}C \cdot A^2$
evenwichtsstand	$\rightarrow$	$u = 0$	én	$v = v_{\text{max}}$	$\rightarrow$	$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2$

VOORBEELD massa-veersysteem

Een voorwerp met een massa van 50 gram trilt met een amplitude van 2,0 cm. De totale energie is 10 J.

Bereken de veerconstante.

- $A = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ | $E_{\text{tot}} = 10 \text{ J}$ | $C = \dots \text{ N/m}$
- uiterste stand: $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}C \cdot A^2$
- $10 = \frac{1}{2}C \cdot (2,0 \cdot 10^{-2})^2 \rightarrow C = 5,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}$

Bereken de maximale snelheid.

- $m = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \mid E_{\text{tot}} = 10 \text{ J} \mid v_{\text{max}} = \dots \text{ m/s}$
- evenwichtsstand: $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{max}}^2$
- $10 = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \cdot v_{\text{max}}^2 \rightarrow v_{\text{max}} = 20 \text{ m/s}$

Bereken de veerenergie als de uitwijking 1,0 cm is.

- $u = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \mid C = 5,0 \cdot 10^4 \text{ N/m} \mid E_v = \dots \text{ J}$
- $E_v = \frac{1}{2} C \cdot u^2$
- $E_v = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 10^4 \cdot (1,0 \cdot 10^{-2})^2 \rightarrow E_v = 2,5 \text{ J}$

Bereken de kinetische energie als de uitwijking 1,0 cm is.

- $E_{\text{tot}} = 10 \text{ J} \mid E_v = 2,5 \text{ J} \mid E_k = \dots \text{ J}$
- $E_{\text{tot}} = E_v + E_k$
- $10 = 2,5 + E_k \rightarrow E_k = 7,5 \text{ J}$

Bereken de snelheid als de uitwijking 1,0 cm is.

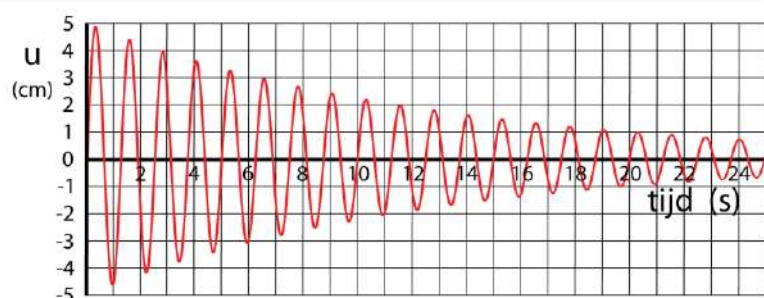
- $m = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \mid E_k = 7,5 \text{ J} \mid v = \dots \text{ m/s}$
- $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
- $7,5 = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \cdot v^2 \rightarrow v = 17,32 = 17 \text{ m/s}$

Aan dit voorbeeld zie je dat er geen recht evenredig verband is tussen de uitwijking en de snelheid. Als de uitwijking de helft is van zijn maximale waarde (zoals in het voorbeeld) heeft de snelheid niet de helft van zijn maximale waarde. Je mag dus geen verhoudings-tabel gebruiken. Alleen met de wet van behoud van energie kun je de snelheid uitrekenen.

Damping

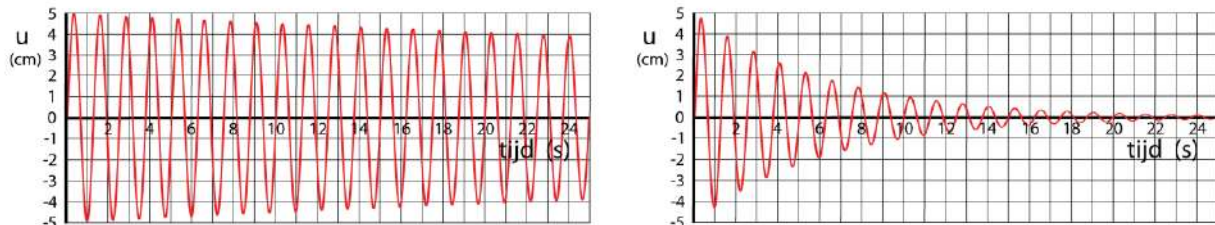
Als er geen wrijving is verandert de totale energie niet, zodat de omzetting $E_v \rightarrow E_k \rightarrow E_v \rightarrow E_k \rightarrow E_v \rightarrow E_k \rightarrow E_v \rightarrow E_k \rightarrow E_v \rightarrow \dots$ nooit ophoudt. In de praktijk is er meestal wel wrijving, waardoor er energie in warmte wordt omgezet. Deze energie verdwijnt uit het trillende voorwerp. In de uiterste stand is er alleen veerenergie en de afname van de totale energie leidt daarom tot een afname van de amplitude. Deze afname heet damping. Zie figuur 17.

wrijving $\rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} C \cdot A^2$ neemt af $\rightarrow A$ wordt kleiner $\rightarrow$ damping



Figuur 17 Damping.

Hoe groter de wrijvingskracht is hoe meer demping. In figuur 18 links is de demping klein en verandert de amplitude nauwelijks in één periode. In figuur 18 rechts is de demping groot. Je ziet dat bij een gedempte trilling alleen de amplitude kleiner wordt. De frequentie verandert niet. Dit klopt met wat je eerder hebt geleerd, want de trillingstijd wordt alleen bepaald door de massa en de veerconstante en is een eigenschap van het systeem. Demping is niet een eigenschap van het systeem maar wordt veroorzaakt door het contact tussen het systeem en de omgeving.



Figuur 18 (u, t)-diagram van een gedempte trilling.

VOORBEELD

Een voorwerp trilt met een frequentie van 5,0 Hz en een amplitude van 2,0 cm. In het begin is de totale energie 10 J. Vanwege wrijving wordt de trilling gedempt. Na een minuut is de amplitude gehalveerd.

Hoeveel warmte is er in de eerste minuut ontstaan?

- $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} C \cdot A^2$
- A is 2 keer zo klein geworden $\rightarrow A^2$ is 4 keer zo klein $\rightarrow E_v$ is 4 keer zo klein
- E_{tot} is nu $10 / 4 = 2,5 \text{ J} \rightarrow$ er is $10 - 2,5 = 7,5 \text{ J}$ aan energie in warmte omgezet

Met hoeveel procent neemt de amplitude gemiddeld in één periode af?

- in één minuut neemt de amplitude 50% af
- $f = 5,0 \text{ Hz} \rightarrow$ in één minuut zijn er $5 \cdot 60 = 300$ perioden
- $\frac{1}{300} \cdot 50\% = 0,16667 \rightarrow$ per periode neemt de amplitude gemiddeld met 0,17% af

VOORBEELD

Bij een gedempte trilling met een energie van 100 J wordt in één periode steeds 1,0% van aanwezige energie omgezet in warmte.

Hoeveel energie is er na 100 trillingen in warmte omgezet?

- per trilling is het energieverlies 1,0%
- na een trilling blijft er steeds $99\% = 0,99$ deel van de energie over
- 100 trillingen $\rightarrow 0,99^{100} = 0,366$
- 0,366^e deel van de energie blijft aanwezig
- na 100 trillingen is er $100 \cdot 0,366 = 36,6 \text{ J}$ energie aanwezig
- na 100 trillingen is er $100 - 36,6 = 63,4 \text{ J}$ energie omgezet in warmte

De maximale snelheid bij een harmonische trilling

Door de formule voor de energie van een harmonische trilling te gebruiken vind je:

$$v_{\max} = \frac{2\pi \cdot A}{T} \quad | \quad v_{\max} = 2\pi \cdot A \cdot f$$

BEWIJS

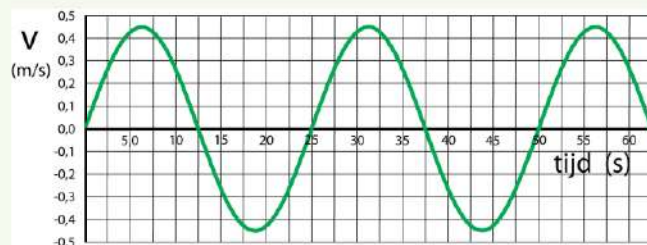
- $\frac{1}{2}m \cdot v_{\max}^2 = \frac{1}{2}C \cdot A^2$
- $m \cdot v_{\max}^2 = C \cdot A^2 \rightarrow v_{\max}^2 = \frac{C \cdot A^2}{m}$
- $v_{\max} = \sqrt{\frac{C \cdot A^2}{m}} \rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot A$
- massaveersysteem: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} \rightarrow \sqrt{\frac{C}{m}} = \frac{2\pi}{T}$
- invullen $\rightarrow v_{\max} = \frac{2\pi}{T} \cdot A \rightarrow v_{\max} = \frac{2\pi \cdot A}{T} = 2\pi \cdot A \cdot f$

VOORBEELD

Figuur 19 is het (v, t)-diagram van een harmonische trilling.

Bepaal de amplitude van deze trilling.

- aflezen: $v_{\max} = 0,45 \text{ m/s}$
- aflezen: $T = 25 \text{ s}$
- $v_{\max} = \frac{2\pi \cdot A}{T}$
- $0,45 = \frac{2\pi \cdot A}{25} \rightarrow A = \frac{0,45 \cdot 25}{(2\pi)} = 1,79 = 1,8 \text{ m}$



Figuur 19

EXTRA zwaarte-energie wegstrepen (voor de liefhebber)

Om te begrijpen waarom zwaarte-energie geen rol speelt nemen we een massa-veer-systeem en passen de wet van behoud van energie toe. Als er geen massa aan de veer hangt is zijn lengte ℓ_0 . We hangen er een blokje aan met massa m , waardoor de lengte van de veer toeneemt tot ℓ . De uitrekking van de veer is $u_0 = \ell - \ell_0$. De resulterende kracht op het stilstaande blokje is nul $\rightarrow F_{\text{veer}} = F_Z \rightarrow C \cdot u_0 = m \cdot g$.

De plaats waar het blokje stil hangt is de evenwichtsstand en we stellen de zwaarte-energie in de evenwichtsstand gelijk aan 0. We trekken het blokje over afstand A naar beneden en laten het dan los. Hier gaan we een energiebeschouwing op loslaten. De uiterste stand onderaan nemen we als begin en in deze stand is de kinetische-energie nul. De evenwichtsstand nemen we als eind en in deze stand is de zwaarte-energie nul.

- BEGIN $E_v = \frac{1}{2}C(u_0 + A)^2$ | $E_z = -m \cdot g \cdot A \rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}C(u_0 + A)^2 - m \cdot g \cdot A$
- EIND $E_v = \frac{1}{2}C \cdot u_0^2$ | $E_k = \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2 \rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}C \cdot u_0^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2$
- behoud van energie $\frac{1}{2}C(u_0 + A)^2 - m \cdot g \cdot A = \frac{1}{2}C \cdot u_0^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2$
- uitwerken van het kwadraat $\frac{1}{2}C(u_0^2 + 2u_0 \cdot A + A^2) - m \cdot g \cdot A = \frac{1}{2}C \cdot u_0^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2$
- $\frac{1}{2}C \cdot u_0^2 + C \cdot u_0 \cdot A + \frac{1}{2}C \cdot A^2 - m \cdot g \cdot A = \frac{1}{2}C \cdot u_0^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2$ ½C·u₀² wegstrepen
- $C \cdot u_0 \cdot A + \frac{1}{2}C \cdot A^2 - m \cdot g \cdot A = \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2$ invullen C·u₀ = m·g
- $m \cdot g \cdot A + \frac{1}{2}C \cdot A^2 - m \cdot g \cdot A = \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2 \rightarrow \frac{1}{2}C \cdot A^2 = \frac{1}{2}m \cdot v_{\text{max}}^2$ m·g·A wegstrepen
- in deze formule is de zwaarte energie niet meer aanwezig

9.6 Resonantie

Eigenfrequentie en aandrijffrequentie

De **eigenfrequentie** van een massaveersysteem en van een slinger is een eigenschap van het systeem en wordt niet bepaald door externe invloeden. Het maakt niet uit hoe je de trilling op gang brengt, steeds zal het voorwerp met dezelfde frequentie gaan trillen. Een voorwerp kan je ook laten trillen door voortdurend met een bepaalde frequentie een kracht uit te oefenen. In dat geval spreekt je van een **aangedreven trilling**. De frequentie waarmee je het voorwerp aandrijft heet de **aandrijffrequentie**.

stelsel trilt uit zichzelf	→	eigenfrequentie	→	f_{eigen}
stelsel wordt aangedreven	→	aandrijffrequentie	→	f_{aandrijf}

Resonantie

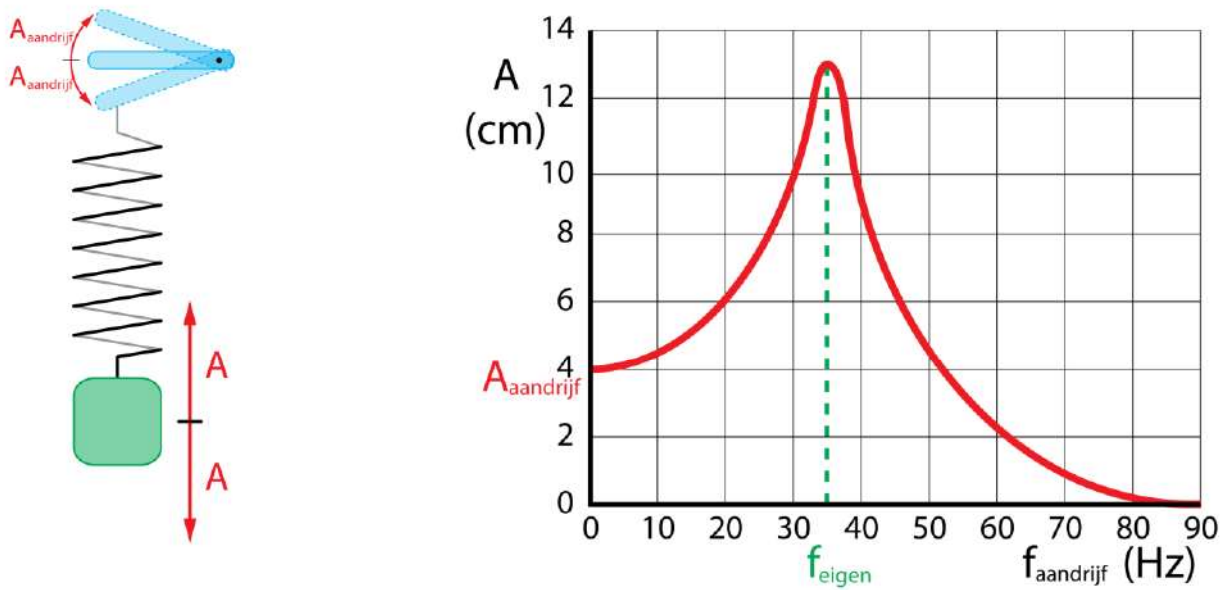
Bij een aangedreven trilling is de amplitude afhankelijk van het verschil tussen de aandrijffrequentie en de eigenfrequentie. Is het verschil tussen f_{aandrijf} en f_{eigen} groot, dan is de amplitude klein. Als f_{aandrijf} vrijwel gelijk is aan f_{eigen} wordt de amplitude groot. De oorzaak van deze grote amplitude is de voortdurende toevoeging van energie. Bij iedere trilling wordt een beetje energie toegevoegd door de arbeid die de externe kracht levert. De totale energie wordt hierdoor steeds groter, waardoor de amplitude ook steeds groter wordt. In het theoretische geval dat er geen wrijving is wordt de amplitude oneindig groot.

$f_{\text{aandrijf}} \neq f_{\text{eigen}}$	→	geen energie toegevoegd	→	A blijft klein
$f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$	→	wél energie toegevoegd	→	A wordt groot

Er treedt **resonantie** op als de aandrijffrequentie gelijk is aan de eigenfrequentie. Bij resonantie heeft het systeem veel energie en is de amplitude heel groot.

resonantie → $f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$

In figuur 20 zie je een massaveersysteem dat wordt aangedreven door een externe kracht met amplitude A_{aandrijf} . Resonantie treedt op als de frequentie van deze aandrijvende kracht gelijk is aan de eigenfrequentie van de massaveer. In het (A, f) -diagram staat op de verticale as de amplitude van het blokje en op de horizontale as de aandrijffrequentie. Bij een kleine f_{aandrijf} is de amplitude gelijk aan de amplitude van de aandrijfkraft. Bij een grote f_{aandrijf} is de amplitude vrijwel nul, omdat het systeem te traag is. Als f_{aandrijf} gelijk is aan f_{eigen} treedt er resonantie op en is de amplitude maximaal. De tabel onder figuur 20 is een overzicht van deze drie situaties.



Figuur 20 Een massaveer wordt aangedreven door een externe kracht. Resonantie treedt op als de aandrijffrequentie gelijk is aan de eigenfrequentie van de massaveer.

aandrijfkraft	amplitude	wat gebeurt er
$f_{\text{aandrijf}} \ll f_{\text{eigen}}$	$A = A_{\text{aandrijf}}$	de amplitude is gelijk aan de aandrijf-amplitude
$f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$	$A \rightarrow \infty$	zonder damping wordt de amplitude oneindig groot
$f_{\text{aandrijf}} \gg f_{\text{eigen}}$	$A \rightarrow 0$	de amplitude wordt kleiner bij een hogere aandrijffrequentie

VOORBEELD schommelen

Een kleuter zit op een schommel. Opa moet duwen om de schommel een grote amplitude te geven. De schommel heeft een lengte van 2,0 m. Bij een schommel wordt de eigentrillingstijd gegeven door:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Bereken de frequentie waarmee opa moet duwen.

- om een grote amplitude te krijgen moet opa met de eigenfrequentie duwen
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2,0}{9,81}} \rightarrow T = 2,827 \text{ s}$
- $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{2,837} = 0,3525 = 0,35 \text{ Hz}$



Grote zus wil ook mee schommelen en wordt door opa achter de kleuter op de schommel gezet.

Leg uit of opa nu met een hogere, een lagere, of met dezelfde frequentie moet duwen.

- als het zwaartepunt niet verandert blijft de slinger even lang
- de eigenfrequentie is niet afhankelijk van de massa
- opa moet met dezelfde frequentie blijven duwen

MERK OP dat opa met een hogere frequentie moet duwen als het zwaartepunt omhoog gaat, waardoor de slinger korter wordt.

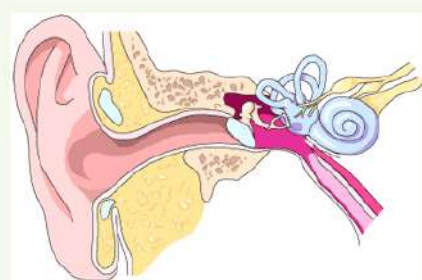
VOORBEELD een wijnglas laten springen met geluid

Geluid bestaat uit trillende lucht. Een zuivere muzieknoot bevat maar één frequentie. Zo heeft de noot c3 (hoge c) een frequentie van 1046,5 Hz. Dit is de aandrijffrequentie. Neem je een wijnglas waarvan de eigenfrequentie rond 1000 Hz ligt dan kan zo'n glas kapot worden gezongen bij resonantie. Is de frequentie waarmee je zingt te hoog of te laag dan is er geen resonantie en breekt het wijnglas niet.



VOORBEELD het gehoororgaan

Het gehoororgaan bestaat uit een buitenoor, een middenoor en een binnenoor. Het buitenoor vangt luchtrillingen op, het middenoor bevat gehoorbeentjes die het geluid versterken en doorgeven aan het binnenoor. In het binnenoor bevindt zich het slakkenhuis, waarin trilhaartjes geluidstrillingen omzetten naar zenuwimpulsen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van resonantie.



De trilhaartjes verschillen in lengte en dikte. Hierdoor hebben ze verschillende eigenfrequenties. Geluid bestaat uit luchtrillingen met verschillende frequenties. Dit zijn de aandrijffrequenties. Alleen de trilhaartjes waarvan $f_{\text{eigen}} = f_{\text{aandrijf}}$ gaan meetrillen met het geluid. Hoe harder het geluid is hoe groter de amplitude. Trilhaartjes waarbij geen resonantie optreedt blijven stilstaan. Vanuit ieder trilhaartje gaat een zenuw naar de hersenen, zodat de hersenen weten uit welke frequenties het geluid bestaat en wat de amplitude van iedere frequentie is.

VOORBEELD hangbrug

Bij een hangbrug, zoals de Tacoma bridge in de Verenigde Staten, hangt het wegdek aan staalkabels. Een gevaarlijke situatie ontstaat als de frequentie van een externe kracht gelijk is aan de eigenfrequentie van de brug. De brug komt dan in resonantie, waarbij $f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$. De amplitude wordt steeds groter en de kans bestaat dat de brug instort, zoals in 1940 gebeurde. Om resonantie te voorkomen lopen marcherende soldaten op een brug uit de pas.



VOORBEELD fietsen over een hobbelige weg

Je rijdt met je fiets over een fietspad gemaakt van stoeptegels. De tegels zijn 30 cm groot. Als je met 4,5 m/s fietst gaat je spatbord trillen. Bij een lagere en bij een hogere snelheid trilt je spatbord niet.



Waarom trilt je spatbord alleen bij 4,5 m/s?

- de naden tussen de stenen oefenen met een regelmatige kracht uit op je fiets
- alleen als $f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$ treedt er resonantie op

Bereken de eigenfrequentie van je spatbord.

- per seconde rijd je over $4,5 / 0,30 = 15$ stenen $\rightarrow f_{\text{aandrijf}} = 15 \text{ Hz}$
- resonantie $\rightarrow f_{\text{eigen}} = f_{\text{aandrijf}} = 15 \text{ Hz}$

VOORBEELD autorijden over een hobbelige weg

Een auto rijdt over een weg waarop om de 10 meter een hobbel is aangebracht. De auto heeft een massa van 600 kg en is geveerd met $C = 4,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}$. Bij een bepaalde snelheid trilt de auto hevig op en neer vanwege resonantie.



Bij welke snelheid gebeurt dit?

- $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{600}{4,0 \cdot 10^4}} \rightarrow T = 0,76953 \text{ s}$ tijd tussen twee hobbels
- resonantie $\rightarrow f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$
- $s = v_{\text{gem}} \cdot t \rightarrow 10 = v_{\text{gem}} \cdot 0,76953 \rightarrow v_{\text{gem}} = 12,9949 = 13 \text{ m/s}$

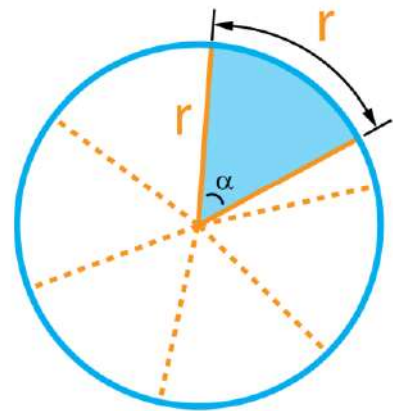
Leg uit hoe de snelheid waarbij resonantie optreedt verandert als er een passagier instapt.

- bij een grotere massa wordt de trillingstijd groter en neem de eigenfrequentie af
- resonantie vindt plaats bij een lagere aandrijffrequentie
- de snelheid van de auto moet afnemen

9.7 Wiskundige beschrijving

Radiaal als eenheid van hoek

Om een harmonische trilling wiskundig te beschrijven maken we gebruik van de **radiaal** als eenheid van hoek. De afkorting van radiaal is **rad**. Een hoek is één radiaal als de booglengte gelijk is aan de straal. Om de hoek in radiaal uit te rekenen deel je de booglengte door de straal. Zie figuur 21.



Figuur 21 Radiaal als eenheid van hoek. Bij een hoek van één radiaal is de booglengte gelijk aan de straal.

**Bij een hoek van één radiaal (rad) is de booglengte gelijk aan de straal.
Om de hoek in radiaal uit te rekenen deel je de booglengte door de straal.**

De omtrek van een cirkel is $2\pi \cdot r$. Om de hoek in radiaal uit te rekenen van een volledige cirkel moet je de booglengte delen door de straal. Een volledige cirkel heeft dus een hoek van $2\pi r / r = 2\pi$ radialen. De hoek van een volledige cirkel is 360 graden en we zien dus dat 2π radialen gelijk is aan 360 graden.

$$2\pi \text{ radialen} = 360 \text{ graden}$$

Als je een hoek in graden wilt omrekenen gebruik je een verhoudingstabel.

graden	360	x
radialen	2π	1

Hieruit volgt: $1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} = 57,29578 \text{ graden}$.

Sinusfunctie

Bij een harmonische trilling is de (u, t)-grafiek sinusvormig met het volgende voorschrift:

$$u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

- u is de uitwijking in meter (m)
- A is de amplitude in meter (m)
- T is de trillingstijd in seconde (s)
- t is de tijd in seconde (s)

Deze sinusfunctie zie je in figuur 22 waarvoor geldt:

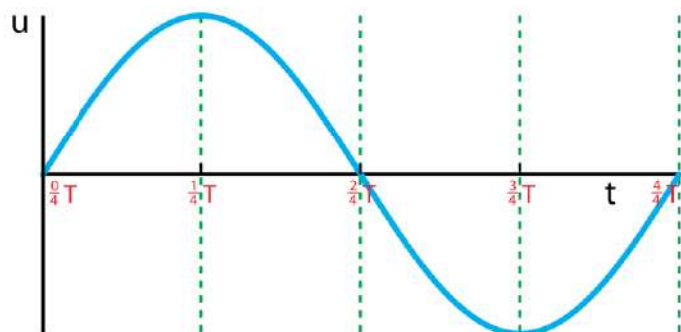
$$t = 0 \cdot T \rightarrow u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = A \cdot \sin(0) = 0 \quad \text{evenwichtsstand}$$

$$t = \frac{1}{4} \cdot T \rightarrow u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \quad \text{uiterste stand boven}$$

$$t = \frac{2}{4} \cdot T \rightarrow u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2T}{4}\right) = A \cdot \sin(\pi) = 0 \quad \text{evenwichtsstand}$$

$$t = \frac{3}{4} \cdot T \rightarrow u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -A \quad \text{uiterste stand onder}$$

$$t = \frac{4}{4} \cdot T \rightarrow u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{4T}{4}\right) = A \cdot \sin(2\pi) = 0 \quad \text{evenwichtsstand}$$



Figuur 22
Sinusfunctie: $u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

Ook de snelheid v en de versnelling a zijn sinusvormige functies van de tijd.

$$u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad v = \frac{2\pi}{T} \cdot A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Massaveersysteem

Nu we meer weten over de wiskundige beschrijving van een harmonische trilling kunnen we de formule voor de trillingstijd van een massaveersysteem bewijzen. Hieronder vind je dit bewijs.

BEWIJS voor de liefhebber

- harmonische trilling $\rightarrow \Sigma F = m \cdot a = -C \cdot u \rightarrow a = \frac{-C}{m} \cdot u$
- differentiëren: $v = u'$ en $a = v' \rightarrow a = u''$
- harmonische trilling: twee keer differentiëren geeft dezelfde functie keer $\frac{-C}{m}$

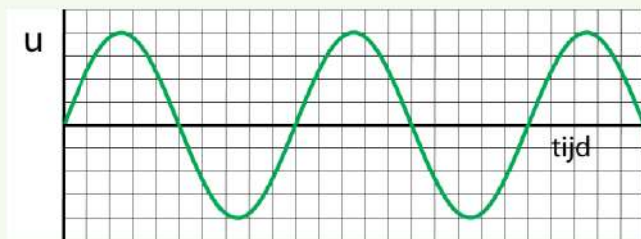
- neem $u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \rightarrow v = u' = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
- $a = v' = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \rightarrow a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
- $a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot u$ voldoet aan de eis dat $a = \frac{-C}{m} \cdot u$
- u is dus een sinusvormige functie van de tijd
- er geldt $\frac{C}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$
- $\frac{C}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rightarrow \frac{C}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow T^2 \cdot C = 4\pi^2 \cdot m$ kruislings vermenigvuldigen
- $T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot m}{C} = 4\pi^2 \frac{m}{C} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$

VOORBEELD

Een (u, t) -diagram van een trilling is gegeven in figuur 23.

- de tijdbasis is 10 ms / div.
- de gevoeligheid is 5,0 cm / div

Figuur 23



Waaruit blijkt dat de trilling harmonisch is?

- het (u, t) -diagram is sinusvormig $\rightarrow$ harmonische trilling

Stel het functievoorschrift op van deze harmonische trilling.

- aflezen: 3 trillingen in 30 hokjes $\rightarrow$ 10 hokjes voor 1 trilling
- 1 hokje = 10 ms $\rightarrow T = 10 \cdot 10 \text{ ms} = 0,10 \text{ s}$
- aflezen: amplitude is 4 hokjes $\rightarrow$ 1 hokje = 5,0 cm $\rightarrow A = 4 \cdot 5,0 = 20 \text{ cm} = 0,20 \text{ m}$
- $u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \rightarrow u = 0,20 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0,10} \cdot t\right)$

Bereken de uitwijking op $t = 3,21 \text{ s}$

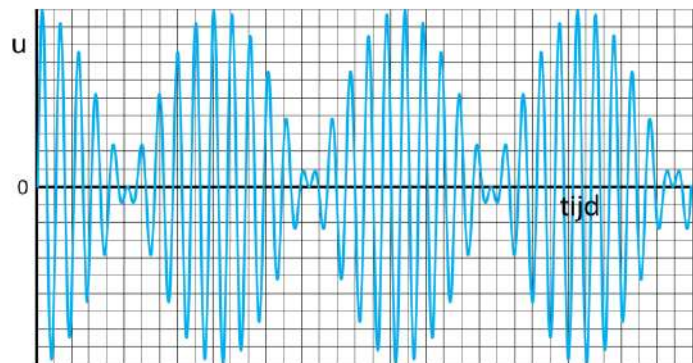
- $u = 0,20 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0,10} \cdot 3,21\right)$ rekenmachine op radialen
- $u = 0,20 \cdot \sin(201,69) \rightarrow u = 0,20 \cdot 0,58779 = 0,11756 = 0,12 \text{ m}$

Het uitrekenen van de tijd waarbij de uitwijking bijvoorbeeld 0,15 m is vergt meer rekenwerk en hoef je niet te kunnen. Het antwoord op deze vraag heeft oneindig veel oplossingen, want na iedere periode zal de uitwijking opnieuw 0,15 m zijn.

Samengestelde trillingen

Een voorwerp kan tegelijkertijd twee trillingen uitvoeren. In dat geval is de uitwijking de som van de uitwijkingen. Je kunt de uitwijking berekenen van iedere trilling afzonderlijk en de uitkomsten bij elkaar optellen.

Stel een voorwerp trilt tegelijkertijd met 9 Hz en met 11 Hz. We tellen de uitwijkingen voor ieder tijdstip bij elkaar op en vinden dat het voorwerp gaat trillen met 10 Hz waarbij de amplitude met een frequentie van $11 - 9 = 2,0$ Hz verandert. De maximale amplitude is twee keer zo groot als de amplitude van de afzonderlijke trillingen. In figuur 24 zie je het resultaat van een samengestelde trilling, waarbij de twee frequenties vlak bij elkaar liggen.



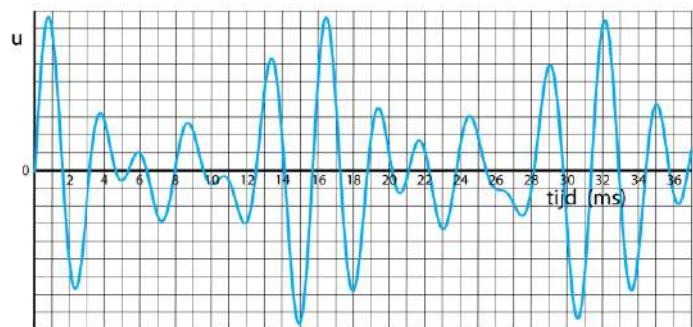
Figuur 24 (u, t)-diagram van een samengestelde trilling. De twee amplitudes A_1 en A_2 zijn gelijk. De frequenties verschillen 10% van elkaar.

Drieklanken in de muziek

In de muziek wordt veel gebruik gemaakt van samengestelde trillingen. Een drieklank bestaat uit een samengestelde trilling met drie frequenties: een grondtoon, een terts en een kwint. Zo bestaat het C-majeur akkoord uit de muzieknoten c, e en g.

$$c1 = 261,626 \text{ Hz} \quad | \quad e1 = 329,628 \text{ Hz} \quad | \quad g1 = 392,995 \text{ Hz}$$

In figuur 25 zie je het resultaat voor het C-majeur akkoord, waarbij de amplitudes van de muzieknoten c1, e1 en g1 hetzelfde zijn.



Figuur 25 (u, t)-diagram van het C-majeur akkoord.

Een trilling opgevat als optelling van harmonische trillingen

Een niet-harmonische trilling heeft een (u, t)-diagram waarin het patroon niet sinusvormig is. Zo bestaan er trillingen met een driehoekige vorm, een blokform en een zaagtand vorm. **Joseph Fourier** (1768–1830) heeft een wiskundige methode ontwikkeld waarmee het mogelijk is om een niet-harmonische trilling te beschrijven als som van harmonische trillingen. Met het voorschrift van Fourier tel je harmonische trillingen met verschillende amplitudes en verschillende frequenties bij elkaar op om een niet-harmonische trilling te benaderen. Het gaat dus om een benadering, die steeds beter wordt als je meer harmonische trillingen bij elkaar optelt.

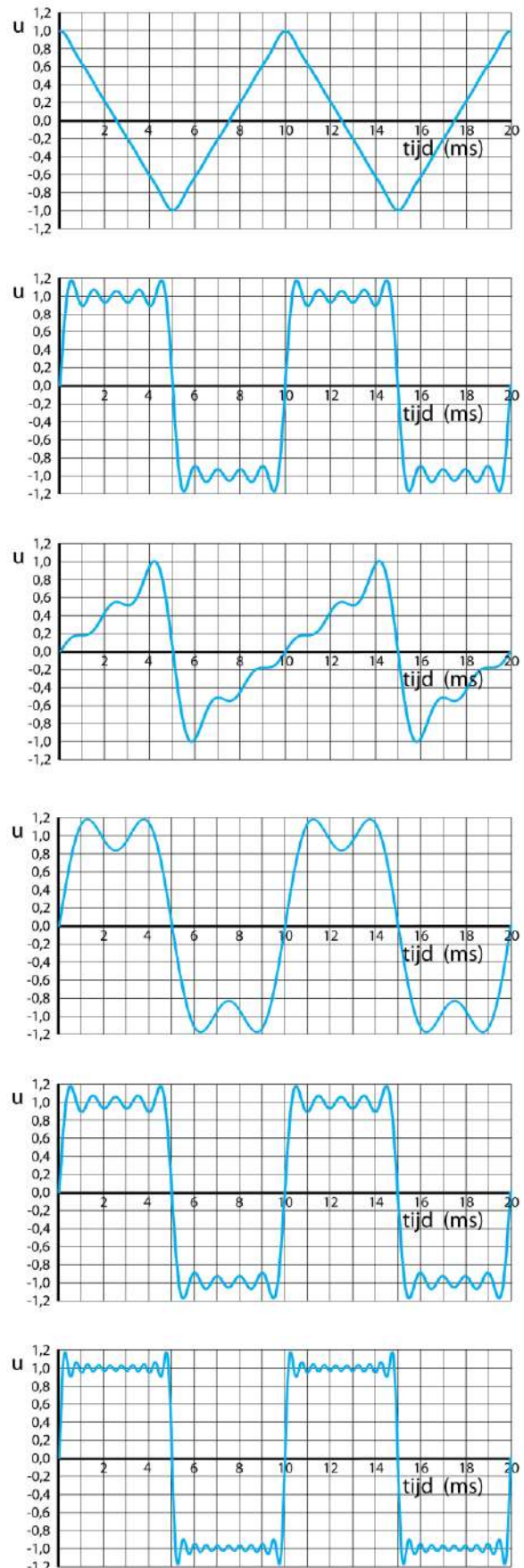
In figuur 26 zie je toepassingen van de methode van Fourier. Ik heb steeds vijf harmonische trillingen bij elkaar opgeteld. Het bovenste diagram is een benadering van een driehoekige trilling. In het middelste diagram wordt een blok-vormige trilling benaderd en in het onderste diagram wordt een zaagtand trilling benaderd. Zoals je ziet is niet iedere benadering even goed. De driehoekige vorm kan vrij goed worden benaderd met vijf sinusfuncties, maar bij de blok-vorm en de zaagtand zijn de gebruikte sinusfuncties nog duidelijk te zien. Voor een betere benadering moet je dan meer dan 5 sinusfuncties optellen.

Figuur 26 (u, t)-diagram van benaderingen van een driehoekige trilling, een blok-vormige trilling en een zaagtand trilling met steeds vijf sinusfuncties.

Hoe meer sinussen je gebruikt hoe beter de benadering is. Je start met een sinus waarvan de frequentie gelijk is aan de frequentie van de niet harmonische trilling. Hierbij tel je sinussen met hogere frequenties op. Iedere keer als je hierbij een sinus met een hogere frequentie optelt wordt de benadering beter.

In figuur 27 zie je een blok-vormige trilling die wordt benaderd met sinussen. De blok-vorm heeft een frequentie van 100 Hz. In het bovenste diagram zijn twee sinussen opgeteld met 100 en 300 Hz. In het middelste diagram zijn vijf sinussen opgeteld met 100, 300, 500, 700 en 900 Hz. In het onderste diagram zijn tien sinussen opgeteld met 100, 300, 500, 700, 900, 1100, 1300, 1500, 1700 en 1900 Hz.

Figuur 27 (u, t)-diagram van benaderingen van een blok-vormige trilling die bestaat uit de som van twee sinussen (boven), vijf sinussen (midden) en tien sinussen (onder).



9.8 Samenvatting

Grootheden en eenheden

- T is de trillingstijd in seconde (s)
- f is de frequentie in Hertz (Hz)
- ΣF is de resulterende kracht in newton (N)
- u is uitwijking in meter (m)
- C is de veerconstante (N/m)
- φ is de fase (geen eenheid)
- φ_r is de gereduceerde fase (geen eenheid)
- E_{tril} is de trillingsenergie in joule (J)

Weten

- Een trilling is een periodieke beweging om een evenwichtsstand. Na een vaste tijd (een periode) herhaalt de beweging zich. Als de trilling stopt is het voorwerp in de evenwichtsstand.
- Harmonische trilling $\rightarrow$ de kracht is recht evenredig is met de uitwijking $\Sigma F = -C \cdot u$.
- De eigenfrequentie is de frequentie waarmee een voorwerp zonder invloed van buiten trilt.
- Bij een harmonische trilling zijn de (u, t) -, (v, t) -, (a, t) -grafieken sinusvormig.
- Oscilloscoop:
 - tijdbasis (time / div) $\rightarrow$ de tijdsduur van één hokje (horizontaal)
 - gevoeligheid (volt / div) $\rightarrow$ de spanning van één hokje (verticaal)
- De fase φ geeft aan hoeveel trillingen zijn uitgevoerd vanaf $t = 0$.
- De gereduceerde fase φ_r is gelijk aan de fase min het aantal volledig uitgevoerde trillingen.
- Coherent trillingsbronnen hebben dezelfde frequentie, dezelfde amplitude en op ieder tijdstip dezelfde gereduceerde fase.
- De trillingsenergie E_{tril} is de energie van een trillend voorwerp. Als er geen demping is verandert de trillingsenergie niet.
- Bij een gedempte trilling neemt de amplitude af en blijft de frequentie gelijk.
- Resonantie $\rightarrow f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$ voorwerp gaat meetrillen met een ander voorwerp.
- $f_{\text{aandrijf}} \neq f_{\text{eigen}} \rightarrow$ er wordt geen energie toegevoegd $\rightarrow A$ blijft klein.
 $f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}} \rightarrow$ er wordt wel energie toegevoegd $\rightarrow A$ wordt groot.

Grootheid	Eenheid	Definitie
uitwijking u	meter	u is de afstand tussen het voorwerp en de evenwichtsstand. u verandert in de tijd.
amplitude A	meter	A is de maximale waarde van de uitwijking.
trillingstijd of periode T	seconde	T is de tijd waarin één volledige trilling wordt uitgevoerd.
frequentie f	Hertz $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$	f is het aantal trillingen dat per seconde wordt uitgevoerd.

Formules

$$f = \frac{1}{T} \quad \leftrightarrow \quad T = \frac{1}{f}$$

$$\Sigma F = -C \cdot u$$

alleen bij een harmonische trilling

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$$

trillingstijd bij een massaveersysteem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

trillingstijd bij een slinger

$$\varphi = \frac{t}{T} \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T}$$

fase en faseverschil hebben geen eenheid

$$E_{\text{tril}} = E_{\text{veer}} + E_K = \frac{1}{2}C \cdot u^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

geen demping $\rightarrow E_{\text{tril}} = \text{constant}$

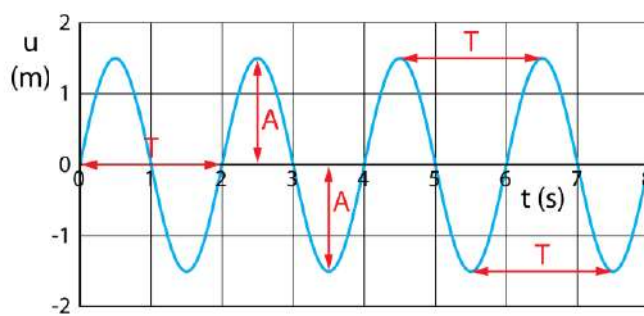
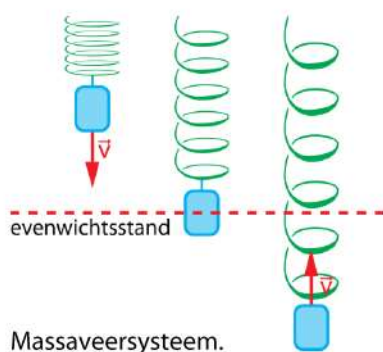
$$v_{\text{max}} = \frac{2\pi \cdot A}{T}$$

alleen bij een harmonische trilling

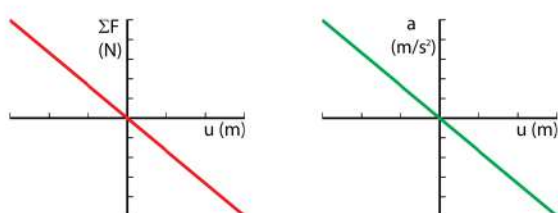
$$u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

uitwijking als functie van de tijd

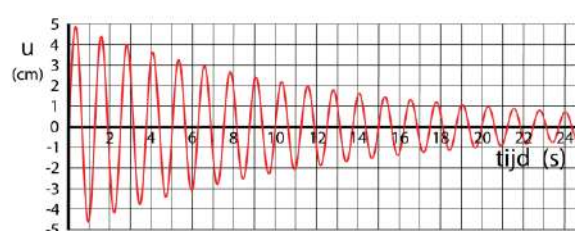
Figuren



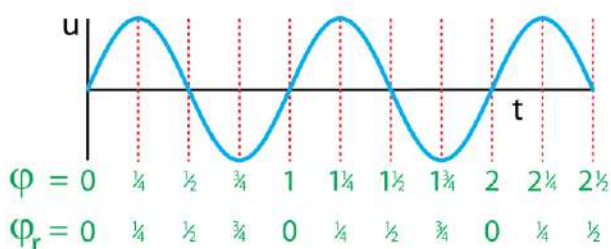
(u, t)-diagram. In de figuur zijn T en A aangegeven.



(F, u)-diagram en (a, u)-diagram voor een harmonische trilling.

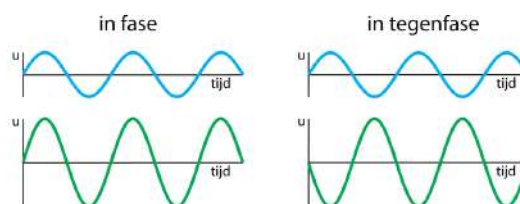


Gedempte harmonische trilling. u neemt af, de trillingstijd verandert niet.



Fase φ en gereduceerde fase φ_r .

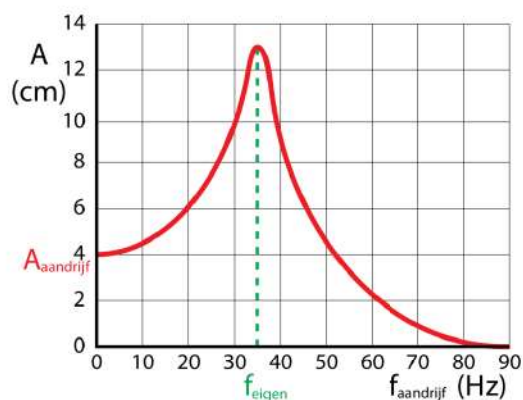
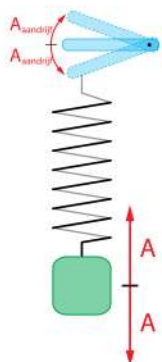
$\varphi_r = \varphi$ min het aantal volledig uitgevoerde trillingen.



In fase $\rightarrow$ gereduceerde faseverschil = 0

In tegenfase $\rightarrow$ gereduceerde faseverschil = $\frac{1}{2}$

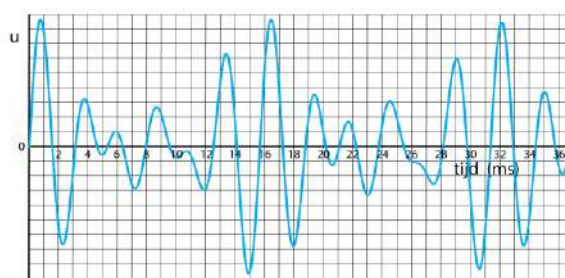
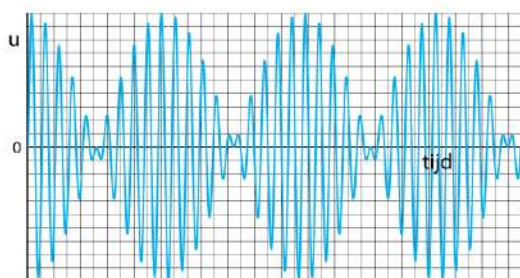
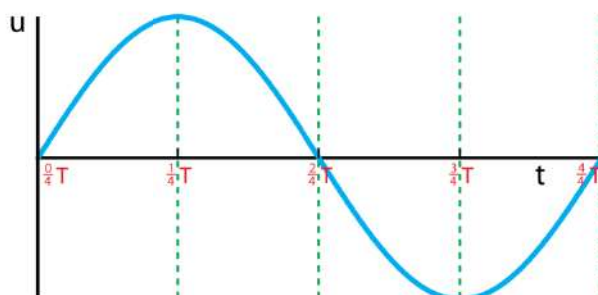
situatie	u (m)	v (m/s)	a (m/s ²)	
uiterste stand positief	maximaal	0	maximaal	$E_v = \frac{1}{2}C \cdot A^2$
evenwichts stand	0	maximaal	0	$E_k = \frac{1}{2}m \cdot v_{\max}^2$
uiterste stand negatief	maximaal	0	maximaal	$E_v = \frac{1}{2}C \cdot A^2$



aandrijfkraft	amplitude
$f_{\text{aandrijf}} \ll f_{\text{eigen}}$	$A = A_{\text{aandrijf}}$
$f_{\text{aandrijf}} \gg f_{\text{eigen}}$	$A \rightarrow 0$
$f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$	$A \rightarrow \infty$

Resonantie treedt op als $f_{\text{aandrijf}} = f_{\text{eigen}}$. De amplitude wordt dan erg groot.

Sinusfunctie $u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$



(u, t)-diagrammen van samengetelde harmonische trillingen.