

15 Relativiteit

vwo

15.0 Inleiding

Galileïsche relativiteit

In 1632 publiceert Galileo Galilei (1565–1642) zijn beroemde boek *"Dialogo over de twee voornaamste wereldsystemen"*, waarin hij uitlegt dat beweging relatief is. Hij bedoelt daarmee dat bewegen een relatie is tussen twee voorwerpen en niet de eigenschap van één voorwerp. Door eenvoudig snelheden bij elkaar op te tellen kun je de snelheid en de plaats van een voorwerp uitrekenen zoals ervaren door een waarnemer die ten opzichte van jou beweegt. De rekenregels die je daarvoor nodig hebt heten de Galileitransformatie en hun geldigheid is al ontelbaar vaak aangetoond.



Galileo Galilei

Na Galilei komt Isaac Newton (1643–1726) die in 1687 zijn boek *"Wiskundige beginselen van de natuurfilosofie"* publiceert waarin hij zijn beroemde wetten introduceert. De wetten van Newton zijn in overeenstemming met de Galileitransformatie en zijn daarvan een stevig fundament. Na enige tijd wordt het werk van Newton volledig geaccepteerd en verleggen de natuurkundigen hun aandacht naar elektrische en magnetische verschijnselen. Dit onderzoek start rond 1750 en duurt ongeveer 100 jaar. Net als Newton heeft gedaan bij de mechanica stelt James Clerk Maxwell in 1861 de vergelijkingen op waarmee alle tot dan toe bekende elektrische en magnetische verschijnselen kunnen worden beschreven. Uit deze vergelijkingen volgt dat elektromagnetische golven zich door de ruimte verplaatsen met een snelheid van $3,00 \cdot 10^8$ m/s.



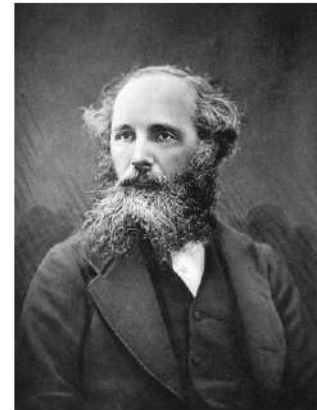
Isaac Newton

De lichtsnelheid

Licht verplaatst zich met een bijzonder grote snelheid door vacuüm maar niet met een oneindig grote snelheid. Ole Rømer (1644–1710) is de eerste die de lichtsnelheid onderzoekt door naar de beweging van de maan Io om Jupiter te kijken. Het valt hem op dat er een onregelmatigheid is in de omlooptijd, wat hij kan verklaren door aan te nemen dat licht 3,5 minuten nodig heeft om van Jupiter naar de aarde te reizen. Op basis hiervan rekent Christiaan Huygens uit de licht een snelheid moet hebben van $2,1 \cdot 10^8$ m/s. In 1849 wordt door Hippolyte Fizeau (1819–1896) met behulp van een snel roterend tandwiel de lichtsnelheid gemeten met een nauwkeurigheid van 5%. Hij komt op $3,15 \cdot 10^8$ m/s. In 1862

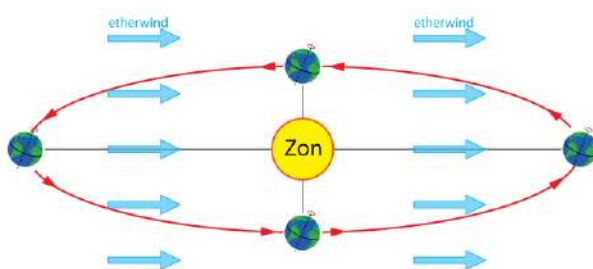
verbetert Léon Foucault (1819–1868) de nauwkeurigheid door met een roterende spiegel te werken. Hij vindt $2,98 \cdot 10^8$ m/s en dit zit dicht bij de huidige waarde $2,99792458 \cdot 10^8$ m/s.

De snelheid van licht is dus precies gelijk aan de snelheid van elektromagnetische golven en dat kan geen toeval zijn. Maxwell concludeert dat licht een elektromagnetische golf is, waarmee hij een enorme stap zet in de natuurkunde. Maar er is wel een probleem, want als het waar is moet er een medium zijn waarin de golf zich verplaatst. Watergolven vervormen het wateroppervlak en geluidgolven vervormen de lucht, maar wat wordt er vervormt bij lichtgolven? Maxwell noemt het onbekende medium de **ether** en daarmee roept hij veel vragen op. Want het idee dat de ruimte is gevuld met iets dat onwaarneembaar is en geen interactie heeft met voorwerpen stuit op veel weerstand.

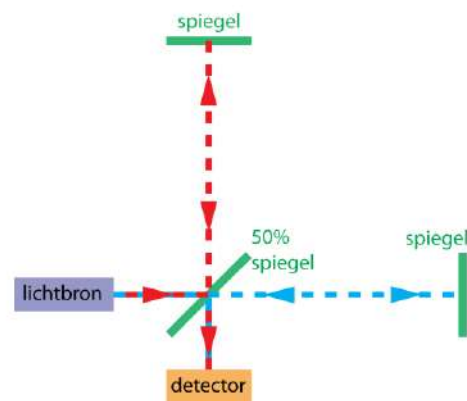


James Clerk Maxwell

Om duidelijkheid te krijgen doen Albert Michelson (1852–1931) en Edward Morley (1838–1923) in 1887 een doorslaggevend experiment. Ze meten de lichtsnelheid in twee loodrechte richtingen. De ene richting gelijk aan de richting waarin de aarde beweegt om de zon en de andere richting loodrecht hierop. Als er een ether is moet er een verschil zijn tussen deze metingen, want in de ene richting ga je tegen de "etherwind" in en in de andere richting niet. Bovendien zou je hiermee de absolute snelheid van de aarde in het heelal kunnen bepalen. De meting moet uiterst nauwkeurig zijn, want de aarde heeft een snelheid van 30.000 m/s om de zon, en de lichtsnelheid is 10.000 keer groter. Vandaar dat ze gebruik maken van interferentie van licht in een interferometer. De uitkomst van het experiment valt niet te ontkennen, de lichtsnelheid is in beide richtingen precies gelijk.



Michelson-Morley experiment



Interferometer

Volgens de theorie van Maxwell wordt de golfsnelheid van elektromagnetische straling gegeven door $c = 1 / \sqrt{(\epsilon_0 \cdot \mu_0)}$, waarin ϵ_0 en μ_0 vaste getallen zijn. Bereken je hiermee de golfsnelheid dan vind je $3,00 \cdot 10^8$ m/s. Maar met deze snelheid is wel iets bijzonders aan de hand. De getallen ϵ_0 en μ_0 zijn voor iedere waarnemer hetzelfde en dit brengt ons bij een dilemma, want de wetten van Newton en de bewegingswetten voldoen aan de Galileïsche relativiteit, maar de wetten van Maxwell niet. Voor de wetten van Maxwell mag de Galileï-transformatie niet worden gebruikt.

In een poging om de uitkomst van het Michelson-Morley experiment te begrijpen komen George FitzGerald (1851–1901) in 1889 en Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) in 1892 onafhankelijk van elkaar op het idee dat voorwerpen die de snelheid van het licht benaderen korter worden. Lorentz werkt dit idee verder uit en stelt in 1895 de regels op hoe de wetten van Maxwell veranderen als een waarnemer een constante snelheid heeft. De Lorentztransformatie is een verbetering van de Galileitransformatie en geldt ook voor snelheden in de buurt van de lichtsnelheid. Uit de Lorentztransformatie volgt dat een snelheid groter dan de lichtsnelheid onmogelijk is.



Hendrik Antoon Lorentz

Albert Einstein (1879–1955) is goed op de hoogte van deze ontwikkelingen en bijt zich erin vast. In 1905 publiceert hij de speciale relativiteitstheorie, waarin hij aantoonde dat de Lorentztransformatie algemeen geldig is en dat er geen mysterieuze ether nodig is om de uitkomst van het Michelson-Morley experiment te verklaren. Als bonus ontdekt Einstein in 1905 ook dat energie en massa onlosmakelijk bij elkaar horen. Eenmaal de smaak te pakken gaat Einstein verder en wil hij ook weten hoe het zit voor waarnemers die ten opzichte van elkaar versnellen. In 1907 komt hij op het equivalentie principe en na jarenlange studie van de moeilijke wiskunde die ervoor nodig is publiceert Einstein in 1915 de algemene relativiteitstheorie.



Albert Einstein

Inhoud

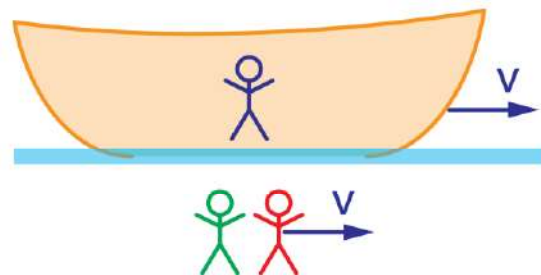
15.1	Relativiteit volgens Galileo Galilei	5
–	Relativiteitsbeginsel	5
–	Gebeurtenissen gezien door verschillende waarnemers	5
–	Referentiestelsels	6
–	Snelheden optellen	6
–	De lichtsnelheid	7
15.2	Gelijktijdigheid, tijdrek en lengtekrimp	9
–	Gelijktijdigheid	9
–	Tijddilatatie (tijdrek)	11
–	Lengtekrimp	13
–	Muonen	17
–	Snelheden optellen	18
–	Lorentz-transformatie	19
15.3	Ruimtetijd diagram	21
–	Ruimtetijd-diagrammen	21
–	Ruimtetijd-diagrammen voor twee referentiestelsels	23
–	Tijddilatatie aflezen in een ruimtetijd diagram	26
–	Lengtekrimp aflezen in een ruimtetijd diagram	26
–	Causaliteit (oorzaak en gevolg)	27
–	Radioactief verval	28
–	De tweelingparadox	29
15.4	Massa en energie	32
–	Massa en snelheid	32
–	Massa en energie	33
15.5	Algemene relativiteitstheorie	34
–	Het equivalentie principe	34
–	Afbuigen van licht	35
–	Tijdrek door de zwaartekracht	36
15.6	Gekromde ruimte	39
–	Buiging van licht	39
–	Gekromde ruimte	40
–	Zwarte gaten	41
–	Tijdrek en massa	42
15.7	Samenvatting	44
–	Grootheden en eenheden	44
–	Weten	44
–	Formules	46
–	Figuren	47

15.1 Relativiteit volgens Galileo Galilei

Relativiteitsbeginsel

Galileo Galilei (1564–1642) is de eerste natuurkundige die het bewegen van voorwerpen systematisch onderzoekt. Hij komt tot de conclusie dat snelheid relatief is. Daarbij maakt hij gebruik van het volgende gedachtenexperiment. Stel je zit in het ruim van een schip dat in de haven ligt zonder naar buiten te kunnen kijken. In het ruim ga je allerlei experimenten doen. Je laat kogels rollen en steentjes vallen. Je schommelt in een hangmat heen en weer. Je kijkt hoe vissen in een kom zwemmen en hoe vogels in een kooi vliegen. Op zeker moment begint het schip te varen over een vlakke golfloze zee. In het begin merk je even dat het schip in beweging komt maar als het schip een constante snelheid heeft merk je niets meer van de beweging. De kogels en steentjes rollen en vallen precies hetzelfde als eerst. De hangmat schommelt op dezelfde manier en ook de vissen en de vogels gedragen zich net zoals toen het schip stil in de haven lag. Galilei concludeert dat het onmogelijk is om vast te stellen of het schip stilligt of met een constante snelheid beweegt. Dit noem je het **relativiteitsbeginsel van Galileo Galilei** en dit is een belangrijk natuurkundig inzicht.

De reden van dit beginsel is dat bewegen een **relatie** is tussen twee voorwerpen. Als je op de wal stilstaat zie je het schip bewegen, maar als je meerent met het schip zie je dat het stilstaat. In figuur 1 ziet de groene waarnemer het schip bewegen en ziet de rode waarnemer die meerent dat het schip stilligt. Waarom zou één van hen gelijk hebben en de andere niet?

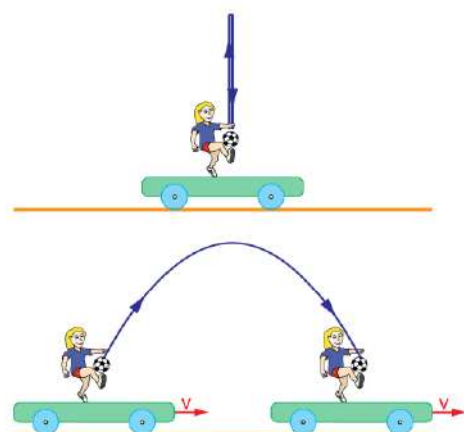


Figuur 1 Relativiteit van beweging.

Gebeurtenissen gezien door verschillende waarnemers

Een gebeurtenis kan door verschillende waarnemers anders worden gezien. Stel er zijn twee waarnemers, Anna en Bea. Bea bevindt zich in een rijdende trein en schiet een bal recht omhoog. Voor Bea, en voor alle andere passagiers in de trein, gaat de bal recht omhoog en valt daarna recht naar beneden. Maar Anna, langs het spoor, ziet dezelfde gebeurtenis heel anders. Voor Anna volgt de bal een parabolische baan.

Voor Bea heeft de bal geen horizontale snelheid (langs het spoor). Maar Anna is het hier niet mee eens. Voor Anna heeft de bal wel een horizontale snelheid gelijk aan v , de snelheid van de trein.

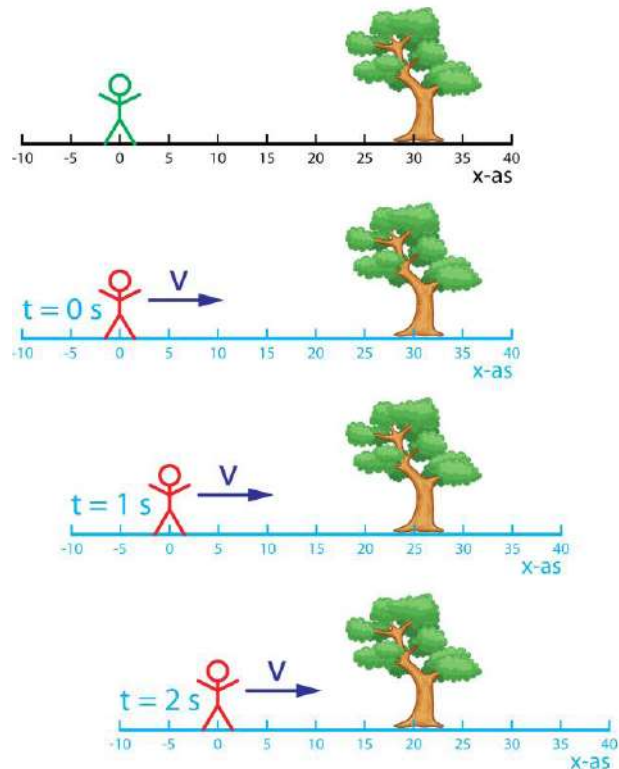


Figuur 2 Dezelfde gebeurtenis wordt verschillend waargenomen.

Ze zijn het er wél over eens dat de bal geen versnelling of vertraging heeft in de horizontale richting. Waar ze het ook over eens zijn is dat de bal bij het omhoog gaan een vertraging heeft van $9,81 \text{ m/s}^2$ en bij het vallen een versnelling van $9,81 \text{ m/s}^2$.

Referentiestelsels

Om de bevindingen van verschillende waarnemers te beschrijven gebruiken we coördinaten die meebewegen met de waarnemer. We houden het eenvoudig en kijken naar bewegingen in één richting. We hebben dus alleen een x-as nodig om de plaats van een voorwerp aan te geven. In werkelijkheid heb je daar drie assen voor nodig (x, y, z) maar dat is voor ons niet belangrijk. In figuur 3 zie je twee waarnemers Anna (groen) en Bea (rood) met hun coördinatenstelsels. Anna staat stil op aarde en op 30 m afstand staat een boom. De Bea heeft een snelheid van 5 m/s ten opzichte van Anna. Op $t = 0$ zijn beide waarnemers op plaats $x = 0$. Bea ziet dat de boom iedere seconde 5 meter dichterbij komt en concludeert dat de boom een snelheid heeft van 5 m/s naar haar toe.



Figuur 3 Inertiaal referentiestelsels.

We zeggen dat Anna en Bea zich in verschillende **referentiestelsels** bevinden. Referentiestelsels die ten opzichte van elkaar met een constante snelheid in een rechte lijn bewegen noemen we **inertiaal referentiestelsels**. Volgens het relativiteitsbeginsel van Galilei zijn de bewegingswetten in ieder inertiaal referentiestelsel hetzelfde.

Inertiaal referentiestelsels bewegen met een constante snelheid in een rechte lijn ten opzichte van elkaar.

De drie wetten van Newton: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ | $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ | $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$ zijn in overeenstemming met het relativiteitsprincipe van Galilei. Bij het optellen of aftrekken van een snelheid verandert de versnelling immers niet. De resulterende kracht zal daarom ook niet veranderen. De bewegingsvergelijkingen, die voortkomen uit Newtons wetten zijn daarom in ieder inertiaal referentiestelsel hetzelfde.

Snelheden optellen

Stel Bea zit in een trein die met 10 m/s langs het perron rijdt. Zie figuur 4. Bea ziet de conducteur naar voren lopen met 1 m/s. Anna staat op het perron en concludeert dat de conducteur met 11 m/s beweegt. In één seconde rijdt de trein 10 meter en is de conducteur 1 m verplaatst in de trein, samen 11 meter. Loopt de conducteur naar achteren met 1 m/s dan is zijn snelheid volgens Anna $10 - 1 = 9$ m/s. Zoals je ziet kun je snelheden bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken. In het hoofdstuk bewegen heb je geleerd dat je met behulp van de **relatieve snelheid** berekeningen soms kunt vereenvoudigen.

Figuur 4 Relatieve snelheid.



We bekijken de situatie vanuit twee verschillende waarnemers Anna op de grond en Bea in de trein. Anna ziet de conducteur voorbijkomen met snelheid v_A . Bea ziet de conducteur voorbijkomen met snelheid v_B . Als Anna en Bea niet bewegen ten opzichte van elkaar geldt $v_A = v_B$. Maar als Bea een snelheid v_{BA} heeft ten opzichte van Anna geldt: $v_A = v_B + v_{BA}$. Als de plaats van een voorwerp op $t = 0$ voor Anna en Bea hetzelfde is kun je voor ieder tijdstip uitrekenen wat de plaats is volgens Anna als je de plaats volgens Bea weet, en omgekeerd. Je gebruikt hiervoor de **Galilei-transformatie**:

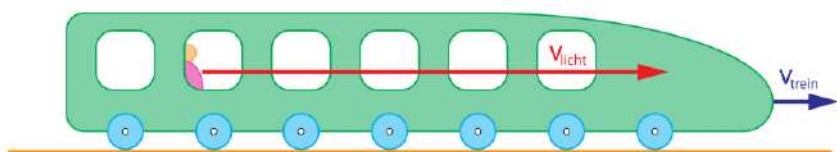
$$x_A = x_B + v_{BA} \cdot t$$

$$t_A = t_B = t$$

- x_A is de plaats volgens een waarnemer in stelsel A
- x_B is de plaats volgens een waarnemer in stelsel B
- v_{BA} is de snelheid van stelsel B volgens een waarnemer in stelsel A
- t_A is de tijd volgens een waarnemer in stelsel A
- t_B is de tijd volgens een waarnemer in stelsel B

De lichtsnelheid

We gaan nu dezelfde redenering toepassen op een lichtstraal. Bea zit in de trein die 10 m/s rijdt en schijnt met een zaklamp naar voren. Ze meet de lichtsnelheid en komt precies op de bekende waarde. Anna staat op het perron en meet ook de snelheid van het licht uit de zaklamp van Bea. Ze verwacht dat zij de snelheid van de trein moet optellen bij de snelheid van licht: $(299.792.458 + 10)$ m/s, maar dat blijkt niet zo te zijn. Ook Anna vindt precies 299.792.458 m/s. Het maakt niet uit of de trein rijdt of stilstaat, altijd meten zowel Anna als Bea dezelfde lichtsnelheid. Zie figuur 5.



Figuur 5 Lichtsnelheid.

Hier is iets vreemds aan de hand. De Galilei-transformatie komt overeen met onze intuïtie en met de wetten van Newton maar geldt niet voor licht. De lichtsnelheid is voor iedere waarnemer hetzelfde, onafhankelijk van de snelheid van de lichtbron of de snelheid van de waarnemer. De lichtsnelheid is een natuurconstante. Het bewijs hiervan is in 1887 gegeven door een serie experimenten. Door gebruik te maken van interferentie kun je de lichtsnelheid heel nauwkeurig meten. De snelheid waarmee de aarde om de zon draait is $3,0 \cdot 10^4$ m/s en als je met meer dan 4 significante cijfers de lichtsnelheid meet moet de verandering van de lichtsnelheid merkbaar zijn. Maar de lichtsnelheid blijkt helemaal niet te veranderen en we moeten dus het volgende concluderen:

De lichtsnelheid is niet relatief maar heeft een absolute waarde die voor iedere waarnemer hetzelfde is. De Galilei-transformatie geldt niet voor licht.

Toen Albert Einstein (1879–1955) hier over nadacht heeft hij geconcludeerd dat het relativiteitsprincipe van Galilei én de lichtsnelheid die voor iedere waarnemer hetzelfde is beide waar kunnen zijn. In 1905 publiceert hij zijn **speciale relativiteitstheorie** gebaseerd op twee postulaten:

POSTULAAT 1

In alle inertiaal referentiestelsels zijn alle natuurwetten gelijk.

POSTULAAT 2

De lichtsnelheid in vacuüm is constant en is onafhankelijk van de beweging van de lichtbron en de beweging van de waarnemer.

Einstein realiseert zich dat het relativiteitsprincipe van Galilei al vaak experimenteel is vastgesteld en dat ook het constant zijn van de lichtsnelheid experimenteel is bewezen. Waar iedereen vanuit gaat, maar niet experimenteel is bewezen, is dat de tijd voor waarnemers A en B hetzelfde zijn. In de Galilei-transformatie staat $t^A = t^B = t$ maar de twee postulaten van Einstein zijn hiermee niet in overeenstemming. De veronderstelling dat de tijd voor iedere waarnemer even snel gaat voldoet aan onze alledaagse beleving van tijd, maar bij snelheden in de buurt van de lichtsnelheid is onze belevingswereld niet meer betrouwbaar. Tijd is wat de klok meet en als klokken ten opzichte van elkaar bewegen tikken ze anders.

Vóór Einstein: de lichtsnelheid is relatief, de tijd is absoluut.
Na Einstein: de lichtsnelheid is absoluut, de tijd is relatief.

15.2 Gelijktijdigheid, tijdrek en lengtekrimp

Gelijktijdigheid

Einsteins postulaten geven aan dat er iets raars aan de hand is met de tijd. Dit wordt duidelijk als we kijken naar gelijktijdige gebeurtenissen. Het woord **gebeurtenis** is al een paar keer gevallen, maar we hebben nog niet goed afgesproken wat een gebeurtenis is. Een gebeurtenis is iets dat zich voordoet op één bepaald tijdstip op één bepaalde plaats. Het vertrek van een trein is een gebeurtenis maar een treinreis is geen gebeurtenis.

Een gebeurtenis is iets dat zich voordoet op één tijdstip en op één plaats.

Om gelijktijdigheid te onderzoeken doen we een gedachtenexperiment. Stel je een trein voor die met constante snelheid in een rechte lijn rijdt. Zie figuur 6, links. In het midden van de trein hangt een lamp. Als iemand de lamp aandoet verspreidt het licht zich naar alle kanten met snelheid c . Omdat de lamp precies in het midden hangt zal voor Bea in de trein het licht op hetzelfde moment bij de voorkant en bij de achterkant van de trein aankomen. De twee gebeurtenissen a) het licht komt aan bij de voorkant en b) het licht komt aan bij de achterkant zijn voor Bea gelijktijdig.



Figuur 6 Links, het verspreiden van licht waargenomen in de trein. Rechts, waargenomen op de grond.

Laten we ons nu verplaatsen in Anna op de grond. Voor Anna zijn de gebeurtenissen a) en b) NIET gelijktijdig. Want het licht beweegt uit de lamp met dezelfde snelheid c in beide richtingen (tweede postulaat) en de trein beweegt naar voren. De naar achter gerichte lichtstraal hoeft daarom een kortere afstand af te leggen en komt dus eerder aan dan de naar voren gerichte lichtstraal. Zie figuur 6, rechts. We komen tot de volgende conclusie:

Gebeurtenissen die gelijktijdig zijn in een referentiestelsel zijn in het algemeen niet gelijktijdig in een ander referentiestelsel.

Om vast te stellen of gebeurtenissen gelijktijdig zijn moet een waarnemer wel rekening houden met de manier waarop signalen haar bereiken. Stel een zoemer gaat af als het licht de voorkant raakt en een andere zoemer als het licht de achterkant raakt. Een waarnemer voorin de trein hoort eerst de zoemer van de voorkant omdat ze dichterbij de voorste zoemer zit. Het is wel erg naïef om dan denken dat het licht eerder bij de voorkant aankomt. Wanneer ik van een waarnemer spreek bedoel ik iemand die verstandig genoeg is om hier rekening mee te houden. Een waarneming is wat zij registreert nadat de nood-

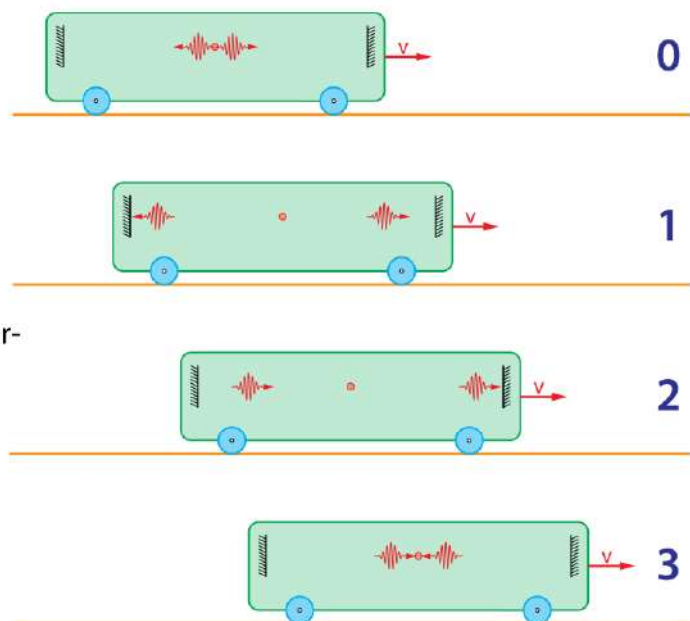
zakelijk correctie voor signaaltransport is gedaan. Wat je hoort of ziet is dus niet hetzelfde als wat je waarneemt. Een waarneming is een reconstructie van wat zich heeft voorgedaan en is niet afhankelijk de plaats van de waarnemer in het referentiestelsel. Een slimme waarnemer plaatst klokken die exact gelijklopen vooraan en achteraan in de trein die registreren wanneer het licht aankomt. Achteraf kan zij dan constateren dat er geen tijdsverschil is tussen beide gebeurtenissen.

Om het nog wat duidelijker te maken verfijnen we ons gedachtenexperiment. Vanuit het midden van de trein sturen we nu lichtpulsen naar voor en naar achter. De lichtpulsen vertrekken gelijktijdig. Voorin en achterin zijn spiegels aangebracht die de lichtpulsen terugkaatsen.

Voor een waarnemer in de trein vertrekken de lichtpulsen gelijktijdig, bereiken ze gelijktijdig de spiegels en komen ze gelijktijdig weer in het midden. Maar een waarnemer op de grond neemt iets heel anders waar. Zie figuur 7.

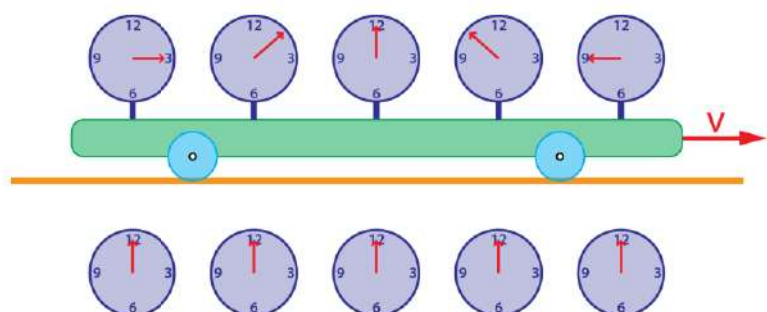
De grondwaarnemer neemt vier gebeurtenissen waar:

- 0 beide pulsen vertrekken gelijktijdig
- 1 de achterwaartse puls kaatst terug
- 2 de voorwaartse puls kaatst terug
- 3 de pulsen komen aan in het midden



Figuur 7 Gedachtenexperiment met lichtpulsen.

We kunnen concluderen dat er iets raars gebeurt bij bewegende klokken. Stel dat er vijf waarnemers op het perron staan met ieder een eigen klok. Deze vijf perronklokken lopen exact gelijk. De middelste waarnemer bevindt zich op plaats nul. In een trein zijn ook vijf klokken. Voor een waarnemer in de trein lopen deze treinklokken exact gelijk. Als de perronklok op 12 uur staat registreren alle waarnemers op de grond wat de klok in de trein die op dat moment voorbijrijdt aangeeft. Ze komen tot een opmerkelijke conclusie: klokken achterin de trein lopen vóór op klokken voorin de trein. Zie figuur 8.

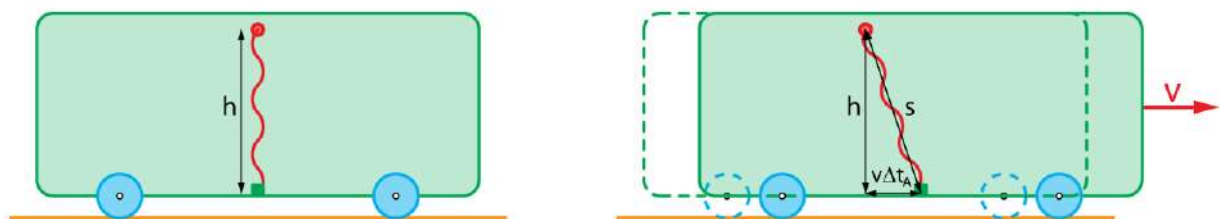


Figuur 8 Voor een waarnemer op de grond lopen de klokken in de rijdende trein niet gelijk.

Tijddilatatie (tijddrek)

Er is duidelijk iets raars aan de hand met de tijd. Laten we een ander gedachtenexperiment doen. In het midden van een trein hangt een lamp. We willen weten hoelang het licht nodig heeft om van de lamp naar de vloer recht onder de lamp te gaan. Voor Bea in de trein is dit eenvoudig te berekenen. Zij vindt $\Delta t_B = h / c$. Ik gebruik subscript B om een meting van Bea in de trein aan te geven. Met Δt_B bedoel is de tijd die het licht nodig heeft voor Bea in de trein. Met Δt_A bedoel ik de tijd die het licht nodig heeft voor Anna op de grond.

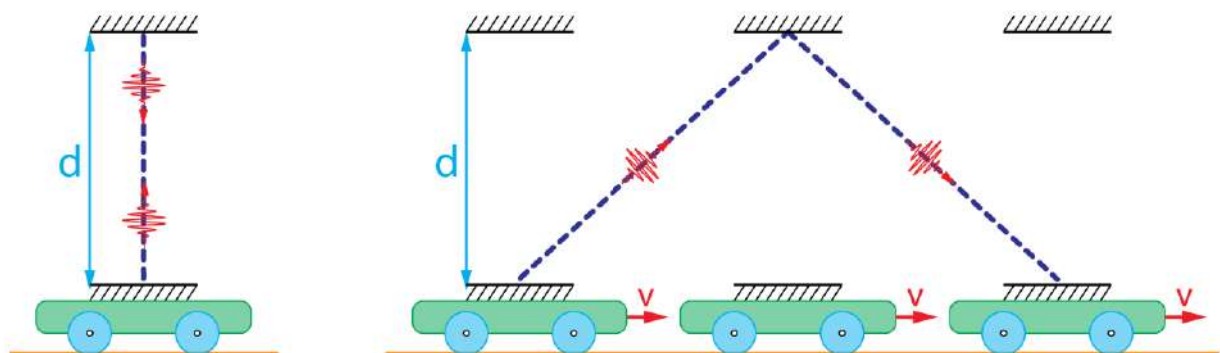
Als je naar figuur 9 kijkt zie je dat er een verschil is tussen Δt_B en Δt_A . Voor Bea in de trein legt het licht een kortere afstand af dan voor Anna op de grond. En omdat de lichtsnelheid voor beide waarnemers gelijk is (tweede postulaat) zal Δt_A groter zijn dan Δt_B .



Figuur 9 Links, de tijd waargenomen in de trein. Rechts, waargenomen op de grond.

Het verschil tussen Δt_B en Δt_A kun je uitrekenen met de stelling van Pythagoras. Voor de afstand s die het licht aflegt gezien vanaf de grond geldt: $s^2 = h^2 + (v \cdot \Delta t_A)^2$. We vullen in: $s = c \cdot \Delta t_A$ en $h = c \cdot \Delta t_B$ en vinden dan $(c \cdot \Delta t_A)^2 = (c \cdot \Delta t_B)^2 + (v \cdot \Delta t_A)^2$. Delen door c^2 geeft $\Delta t_A^2 = \Delta t_B^2 + (v^2/c^2) \Delta t_A^2 \rightarrow \Delta t_B^2 = (1 - v^2/c^2) \cdot \Delta t_A^2 \rightarrow \Delta t_B = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \Delta t_A$.

Laten we opnieuw een gedachtenexperiment doen om te zien wat hiervan het gevolg is. We maken een klok die werkt op het heen-en-weer kaatsen van licht: een **lichtklok**. In een lichtklok staan twee spiegels tegenover elkaar waartussen een lichtpuls op-en-neer kaatst. Zie figuur 10. Iedere keer dat een lichtpuls op-en-neer gaat geeft de lichtklok een tik. We nemen een lichtklok mee in een trein. Voor Bea in de trein komt een lichtpuls terug op dezelfde plaats. Maar voor Anna op de grond is dat niet zo, de plaats waar de lichtpuls vertrekt is voor haar NIET hetzelfde als waar deze terugkomt.



Figuur 10 Lichtklok waargenomen in de trein (links) en waargenomen vanaf de grond (rechts).

Er zijn twee gebeurtenissen: 1) de lichtpuls verlaat de onderste spiegel, en 2) de lichtpuls komt terug bij de onderste spiegel. Voor Bea in de trein is de plaats van deze gebeurtenissen gelijk. De tijd die Bea meet tussen gebeurtenissen op dezelfde plaats is de **eigentijd** Δt_e van Bea. Voor Anna op de grond is de plaats van deze gebeurtenissen verschillend en zij meet een **uitgerekte tijd** Δt_b .

De eigentijd Δt_e is de tijd tussen gebeurtenissen op dezelfde plaats in je eigen referentiestelsel.

De uitgerekte tijd Δt_b is de tijd tussen deze gebeurtenissen waargenomen vanuit een ander referentiestelsel.

Hierboven hebben we al berekend hoe de eigentijd en de uitgerekte tijd aan elkaar zijn gerelateerd. We vonden $\Delta t_b = \sqrt{(1-v^2/c^2)} \cdot \Delta t_e$ waarbij $\Delta t_b = \Delta t_e$ en $\Delta t_e = \Delta t_b$. Dit geeft:

$$\Delta t_e = \sqrt{(1-v^2/c^2)} \cdot \Delta t_b \rightarrow \Delta t_b = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \cdot \Delta t_e. \text{ De factor } \frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \text{ komt vaak terug}$$

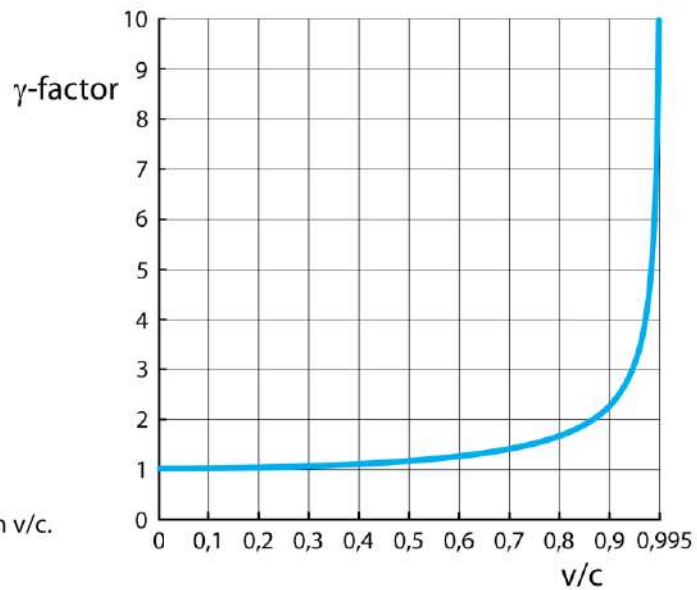
en wordt de **gammafactor** (**γ -factor**) genoemd. Deze factor geeft aan hoeveel lang-zamer bewegende klokken tikken. Het langzamer lopen van bewegende klokken noem je **tijddilatatie** of **tijdrek**.

$$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$$

Wat geldt voor een lichtklok geldt voor alle bewegende klokken. Voor waarnemers in de trein is er immers niks bijzonders aan de hand. Klokken die synchroon lopen als de trein stilstaat lopen ook synchroon als de trein rijdt. Waarnemers op de grond zien dus niet alleen dat de bewegende lichtklok langzamer tikt maar dat alle klokken in de trein langzamer tikken. Ze zien dat ook de hartslag van de treinreizigers langzamer is en dat alle chemische en biologische processen langzamer gaan. En als alle klokken en alle processen langzamer gaan dan gaat de tijd zelf langzamer. Want tijd is dat wat de klok meet.

De tijd in een ander referentiestelsel gaat langzamer dan de tijd in je eigen referentiestelsel.

Tijddilatatie is experimenteel al vaak bewezen. In het gewone leven heb je daar geen weet van en dat komt omdat de γ -factor pas groter wordt dan 1 bij ongeveer 0,3 keer de lichtsnelheid. In figuur 11 zie je hoe de γ -factor afhangt van de snelheid. Op de horizontale as staat niet v maar de verhouding v/c . Als v de lichtsnelheid nadert neemt γ sterkt toe. De γ -factor wordt oneindig groot als het verschil tussen v en c oneindig klein wordt.



Figuur 11 Gammafactor als functie van v/c .

VOORBEELD tijdrek

Bea zit in een trein. Anna staat op de grond en ziet de trein met 0,6 keer de lichtsnelheid voorbijrijden. Tussen twee gebeurtenissen op vaste plaatsen in de trein heeft de klok van Anna 100 tikken gegeven.

Bereken hoeveel tikken de klok van Bea in dit tijdsinterval geeft.

- $\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0,6c)^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,6^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,36}} = \frac{1}{\sqrt{0,64}} = \frac{1}{0,8} = 1,25$
- $100 = 1,25 \cdot \Delta t_e \rightarrow \Delta t_e = \frac{100}{1,25} = 80$ tikken

Lengtekrimp

In een nieuw gedachtenexperiment plaatsen we achterin de trein een lamp en voorin de trein een spiegel. De afstand tussen de lamp en de spiegel is Δx_B . Ik gebruik subscript B om een meting van Bea in de trein aan te geven en met Δx_B bedoel ik dus de afstand tussen de lamp en de spiegel volgens Bea in de trein. We vragen ons af hoelang het licht nodig heeft om heen-en-weer te gaan van lamp naar spiegel en terug. Voor Bea in de trein is dit $\Delta t_B = 2 \cdot \Delta x_B / c$. Zie figuur 12, links.



Figuur 12 Links, benodigde tijd waargenomen in de trein. Rechts, waargenomen op de grond.

Voor Anna op de grond is de berekening moeilijker omdat de trein beweegt. Zie figuur 13, rechts. Voor Anna is de tijd waarop het licht de voorkant bereikt Δt_{A1} en de tijd terug Δt_{A2} . Anna vindt:

$$\Delta t_{A1} = \frac{\Delta x_A + v \cdot \Delta t_{A1}}{c} \quad \text{en} \quad \Delta t_{A2} = \frac{\Delta x_A - v \cdot \Delta t_{A2}}{c} \quad \rightarrow \quad \Delta t_{A1} = \frac{\Delta x_A}{c-v} \quad \text{en} \quad \Delta t_{A2} = \frac{\Delta x_A}{c+v}$$

Voor de tijd heen-en-weer vindt zij:

$$\Delta t_A = \Delta t_{A1} + \Delta t_{A2} \quad \rightarrow \quad \Delta t_A = \frac{2 \cdot \Delta x_A}{c} \cdot \frac{1}{(1-v^2/c^2)} \quad \rightarrow \quad \Delta t_A = \frac{2 \cdot \Delta x_A}{c} \cdot \gamma^2.$$

$$\text{We vullen in: } \Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{2 \cdot \Delta x_B}{c} = \frac{2 \cdot \Delta x_A}{c} \cdot \frac{\gamma^2}{\gamma} \quad \rightarrow \quad \Delta x_B = \gamma \cdot \Delta x_A.$$

Voor Bea in de trein staan de lamp en de spiegel stil. De afstand die Bea meet tussen deze stilstaande voorwerpen is de **eigenafstand** Δx_e in het stelsel van Bea. Voor Anna op de grond bewegen de lamp en de spiegel. Zij meet de **gekrompen afstand** Δx_b .

De eigenafstand Δx_e is de afstand tussen voorwerpen die stilstaan in je eigen referentiestelsel.

De gekrompen afstand Δx_b is de afstand tussen deze voorwerpen waargenomen vanuit een ander referentiestelsel.

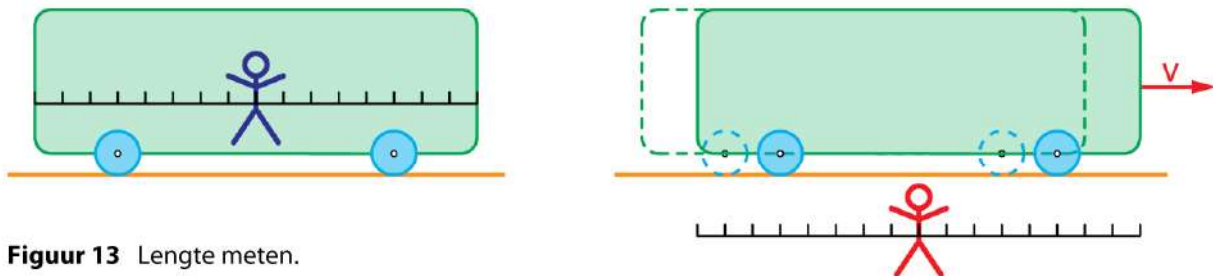
Bea meet de eigenafstand en Anna de gekrompen afstand $\Delta x_B = \Delta x_e$ en $\Delta x_A = \Delta x_b$ en als je dit invult vindt je: $\Delta x_e = \gamma \cdot \Delta x_b \quad \rightarrow \quad \Delta x_b = \frac{\Delta x_e}{\gamma}$. In plaats van Δx mag je ook L voor lengte gebruiken. Bewegende voorwerpen zijn gekrompen. Dit noem je **lengtekrimp**.

$$L_b = \frac{L_e}{\gamma} \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Natuurlijk vindt Bea in de trein helemaal niet dat haar trein is gekrompen, het is Anna op de grond die een gekrompen trein waarneemt. Vanuit Bea's standpunt zijn voorwerpen op de grond gekrompen. Er is een meningsverschil tussen Anna en Bea, want volgens Anna zijn de meetlatten van Bea gekrompen en volgens Bea zijn die van Anna gekrompen. Wie heeft er gelijk? Allebei!

Om dit in te zien moeten we nadenken hoe de lengte van een voorwerp eigenlijk wordt gemeten. Stel dat je de lengte van een stok wil meten. Als de stok stilligt leg je je meetlat naast de stok en noteer je het eindpunt en het beginpunt en trek je die van elkaar af. Maar wat doe je als de stok beweegt? Hetzelfde, alleen moet je de twee metingen op hetzelfde moment uitvoeren, want als je dat niet doet is de stok verplaatst tussen de metingen en krijg je natuurlijk een verkeerd antwoord. En hier ligt het antwoord, want Anna en Bea zijn

het niet eens over de gelijktijdigheid van de metingen. Anna op de grond meet de uiteinden van de trein gelijktijdig in haar referentiestelsel. Maar Bea ziet dat ze eerst de voorkant meet, dan een tijdje wacht, en daarna de achterkant. Geen wonder dat Anna volgens Bea een te korte trein meet zelfs met haar, volgens Bea, te korte meetlat. Zie figuur 13.

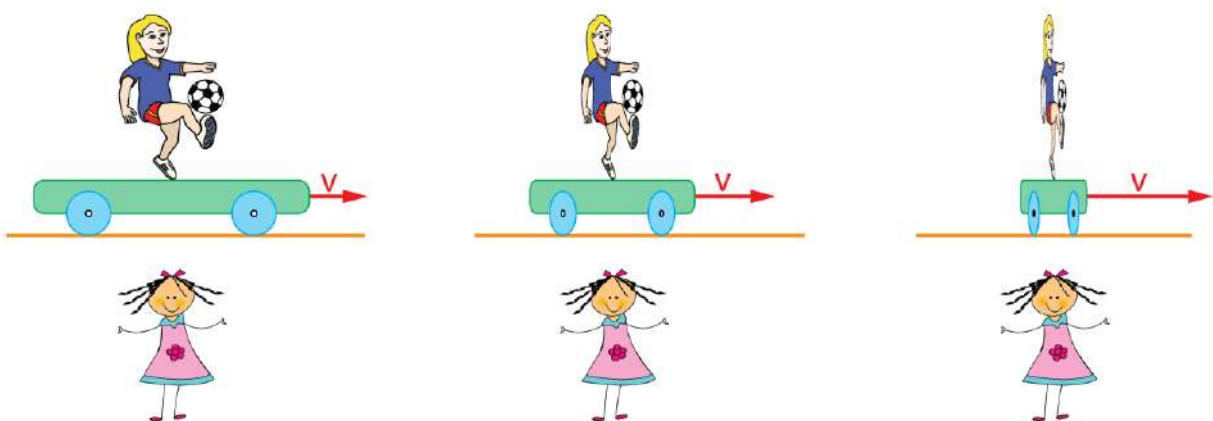


Figuur 13 Lengte meten.

Anna en Bea meten de lengte op de juiste manier bekeken vanuit hun eigen referentiestelsel en vinden dat de lengte in het andere referentiestelsel is gekrompen. Er is dus geen tegenspraak, want ze meten verschillende dingen, en ze vinden beiden dat de ander een verkeerde meting doet.

In figuur 14 zie je het gevolg van lengtekrimp. Net als in figuur 2 kijkt Anna naar Bea die in een rijdende trein een bal omhoogschiet. In het linker plaatje heeft de trein een lage snelheid zodat de lengtekrimp niet opvalt. In het middelste plaatje heeft de trein een snelheid van $0,8c$, wat een lengtekrimp van 60% geeft. In het rechter plaatje heeft de trein een snelheid van $0,98c$, wat een lengtekrimp van 80% geeft. Zoals je ziet krimpt de lengte alleen in de richting van de beweging. In de andere richtingen is er geen lengtekrimp.

Lengtekrimp gebeurt alleen in de richting van de beweging.



Figuur 14 Lengtekrimp in de richting van de beweging.

Samengevat kunnen we de volgende conclusie trekken:

Bewegende klokken tikken langzamer en bewegende linialen zijn gekrompen.
De factor waarmee klokken vertragen en linialen krimpen is $1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

VOORBEELD lengtekrimp

Bea zit in een trein. Anna staat op de grond en ziet de trein met 0,8 keer de lichtsnelheid voorbijrijden. De afstand tussen de voorkant en de achterkant van de trein is volgens Anna 9,0 m.

Bereken de lengte van de trein volgens Bea.

- $L_b = \frac{L_e}{\gamma}$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0,8 \cdot c)^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,8^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,64}} = \frac{1}{\sqrt{0,36}} = \frac{1}{0,6} = 1,6667$
- $9,0 = \frac{L_e}{1,6667} \rightarrow L_e = 15 \text{ m}$

Muonen

Een voorbeeld van tijddrek en lengtekrimp zijn muonen die in de dampkring ontstaan en het aardoppervlak bereiken. Muonen zijn elementaire deeltjes met dezelfde eigenschappen als elektronen maar met een grotere massa. De halveringstijd van muonen is $2,0 \mu\text{s}$ ($2,0 \cdot 10^{-6} \text{ s}$) en ze komen daarom niet op aarde voor. Maar door kosmische straling ontstaan hoog in de atmosfeer muonen die het aardoppervlak bereiken. Zie figuur 15.



Figuur 15 Het ontstaan van muonen door kosmische straling.

Gezien de korte levensduur is het opmerkelijk dat muonen het aardoppervlak kunnen bereiken, want stel dat muonen worden gecreëerd die met vrijwel de lichtsnelheid naar de aarde reizen dan is de afstand die ze daarbij afleggen hooguit $s = 3,0 \cdot 10^8 \cdot 2,0 \cdot 10^{-6} = 600 \text{ m}$. Maar de muonen ontstaan op een veel grotere hoogte dan 600 m en we verwachten dus dat vrijwel geen enkel muon het aardoppervlak zal kunnen bereiken. Maar dit klopt niet, de meeste muonen bereiken het aardoppervlak wel en dit volgt uit de relativiteitstheorie. Muonen hebben namelijk een zeer hoge snelheid van ongeveer $0,9995c$ zodat de gamma factor groot is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,9995c)^2}{c^2}}} = 31,6$$

De bewegende muonen hebben gezien vanaf de aarde een levensduur van 31,6 keer $2,0 \mu\text{s} = 63,2 \mu\text{s}$ en in deze tijd kunnen ze $0,9995 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \cdot 63,2 \cdot 10^{-6} = 19 \text{ km}$ afleggen, zodat de meeste muonen het aardoppervlak kunnen bereiken.

We kunnen de situatie ook bekijken vanuit het referentiestelsel van de muonen. In hun referentiestelsel hebben de muonen een levensduur van $2,0 \mu\text{s}$ en leggen ze in deze tijd de afstand tot het aardoppervlak af. Voor de muonen beweegt de aarde naar hen toe en is er daarom sprake van lengtekrimp.

$$L_b = \frac{L_e}{\gamma} \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,9995 \cdot c)^2}{c^2}}} = 31,6$$

Als een muon op een hoogte van 19 km wordt gecreëerd geldt voor dit muon:

$$L_b = \frac{L_e}{31,6} \rightarrow L_b = \frac{19000}{31,6} = 600 \text{ m} \text{ en deze afstand kan het muon in } 2,0 \mu\text{s} \text{ afleggen.}$$

Snelheden optellen

Eerder hebben we gezien dat je snelheden die veel kleiner zijn dan de lichtsnelheid bij elkaar mag optellen. Maar bij snelheden in de buurt van de lichtsnelheid mag dat niet. Je zou dan immers kunnen uitkomen op een snelheid groter dan de lichtsnelheid en dat is volgens de relativiteitstheorie onmogelijk. In de relativiteitstheorie moet de simpele optelregel $v_A = v_B + v_{BA}$ worden vervangen door

$$v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$$

- v_A is de snelheid van het voorwerp volgens een waarnemer in stelsel A
- v_B is de snelheid van het voorwerp volgens een waarnemer in stelsel B
- v_{BA} is de snelheid van stelsel B volgens een waarnemer in stelsel A
- c is de lichtsnelheid (m/s)

Bij het gebruik van deze formule is de richting van de snelheid belangrijk. Je moet hierbij afspreken welke richting positief is en welke negatief. In het voorbeeld met de conducteur in de trein (zie figuur 4) liep de conducteur gezien door Bea naar voren en rijdt de trein gezien door Anna ook naar voren. Je moet dan voor v_B en voor v_{BA} positieve getallen invullen. Maar als de conducteur naar achteren loopt moet je voor v_B een negatief getal invullen. Als de conducteur naar voren loopt en de trein rijdt naar achteren vul je voor v_B een positief en voor v_{BA} een negatief getal in.

VOORBEELD snelheid optellen

De trein waarin Bea zich bevindt heeft een snelheid van 0,8 keer de lichtsnelheid. Bea schiet een bal met 0,4 keer de lichtsnelheid naar voren. Anna bevindt zich langs het spoor.

Bereken de snelheid van de bal zoals door Anna wordt waargenomen.

- gebruik $v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$
- $v_A = \frac{0,4 \cdot c + 0,8 \cdot c}{1 + \frac{(0,4 \cdot c) \cdot (0,8 \cdot c)}{c^2}}$
- $v_A = \frac{0,4 \cdot c + 0,8 \cdot c}{1 + 0,4 \cdot 0,8} \rightarrow v_A = \frac{1,2 \cdot c}{1 + 0,32} = \frac{1,2 \cdot c}{1,32} = 0,91 \cdot c$ Dus niet $1,2 \cdot c$!

VOORBEELD twee ballen naar elkaar toe

Gezien vanaf de grond worden twee ballen met een snelheid van $0,8 \cdot c$ naar elkaar toe geschoten. Volgens een waarnemer op de grond beweegt bal 1 met $0,8 \cdot c$ naar rechts en bal 2 met $0,8 \cdot c$ naar links. Een waarnemer in het referentiestelsel van bal 1 ziet bal 2 met grote snelheid op zich afkomen. Spreek af: beweging naar rechts is positief en beweging naar links is negatief.

Bereken de snelheid van bal 2 gezien vanuit het referentiestelsel van bal 1.

- gebruik $v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$ waarbij bal 2 voorwerp C is
- bal 1 bevindt zich in stelsel A en de waarnemer op de grond in stelsel B
- $v_B = -0,8c$ en $v_{BA} = -0,8c$
mintekens want gezien vanuit stelsel A beweegt bal 2 naar links en beweegt stelsel B ook naar links
- $v_A = \frac{-0,8c - 0,8c}{1 + \frac{(-0,8c) \cdot (-0,8c)}{c^2}}$
- $v_A = \frac{-1,6c}{1 + \frac{0,64c^2}{c^2}} = \frac{-1,6c}{1,64} = -0,98c$

Lorentz-transformatie

Eerder zijn we de **Galilei-transformatie** tegengekomen:

$$\begin{array}{l|l} x_A = x_B + v \cdot t & x_B = x_A - v \cdot t \\ t_A = t_B = t & \end{array}$$

- x_A is de plaats volgens een waarnemer in stelsel A
- x_B is de plaats volgens een waarnemer in stelsel B
- v is de snelheid tussen de stelsels A en B
- t_A is de tijd volgens een waarnemer in stelsel A
- t_B is de tijd volgens een waarnemer in stelsel B

Rekening houdend met Einsteins relativiteitstheorie moeten deze regels vervangen worden door de **Lorentz-transformatie**:

$$\begin{array}{l|l} x_A = \gamma \cdot (x_B + v \cdot t_B) & x_B = \gamma \cdot (x_A - v \cdot t_A) \\ t_A = \gamma \cdot \left(t_B + \frac{v}{c^2} x_B \right) & t_B = \gamma \cdot \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right) \end{array}$$

Als je de Lorentz-transformatie vergelijkt met de Galilie-transformatie zie je dat vooral de formules van de tijd een stuk ingewikkelder zijn. Om de tijd t_A uit te rekenen heb je niet alleen de tijd t_B nodig maar ook de plaats x_B . In de Lorentz-transformatie zijn plaats en tijd onlosmakelijk met elkaar verbonden.

Wat je hebt geleerd over gelijktijdigheid, over tijddilatatie (tijdrek) en over lengtekrimp volgt uit de Lorentz-transformatie.

Tijddilatatie

Anna in stelsel A kijkt naar een klok in stelsel B gedurende tijdsinterval Δt_A . Hoeveel tijd verstrijkt er op de klok volgens Bea? De klok staat stil in het stelsel van Bea zodat x_B niet verandert. De formule linksonder geeft: $\Delta t_A = \gamma \cdot \Delta t_B$. Omdat $\Delta t_A = \Delta t_b$ en $\Delta t_B = \Delta t_e$ vinden we $\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$.

Lengtekrimp

Anna in stelsel A kijkt naar een meetlat in stelsel B. Op het zelfde tijdstip meet ze de plaats van de voorkant en de achterkant van de meetlat en berekend daaruit de lengte Δx_A . Hoe lang is de meetlat volgens Bea? De formule rechtsboven geeft: $\Delta x_B = \gamma \cdot \Delta x_A$. Omdat $\Delta x_A = \Delta x_b$ en $\Delta x_B = \Delta x_e$ vinden we $\Delta x_e = \gamma \cdot \Delta x_b \rightarrow \Delta x_b = \Delta x_e / \gamma$.

15.3 Ruimtetijsdiagram

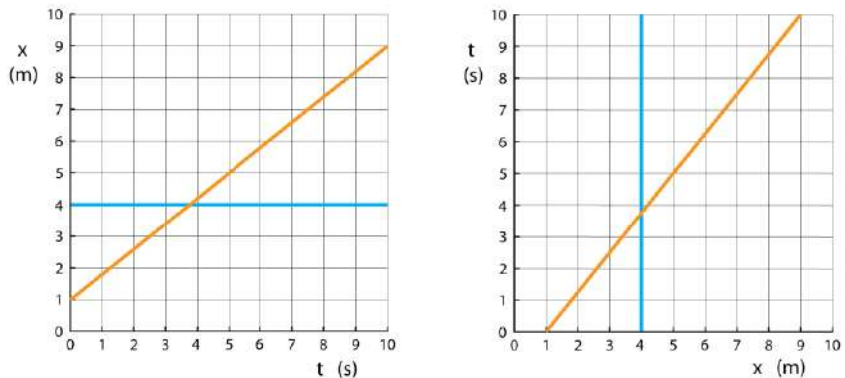
Ruimtetijsdiagrammen

Met de Lorentz-transformatie kun je uitrekenen wat de plaats en de tijd is van een gebeurtenis volgens waarnemers in verschillende referentiestelsels. De uitkomsten van deze berekening kun je ook weergeven in een diagram. In deze paragraaf ga je leren hoe dat moet en maak je kennis met ruimtetijsdiagrammen. Deze diagrammen zijn bedacht door Hermann Minkowski (1864 – 1909) en worden daarom ook Minkowski-diagrammen genoemd.

Het is gebruikelijk om bij ruimtetijsdiagrammen de plaats op de horizontale as te zetten en de tijd op de verticale as. Zie figuur 16. Dat is even wennen want in (x, t) -diagrammen die je eerder bent tegengekomen staat de tijd juist horizontaal en de plaats verticaal. In figuur 15 zie je links een (x, t) -diagram zoals je gewend bent en rechts een ruimtetijsdiagram.

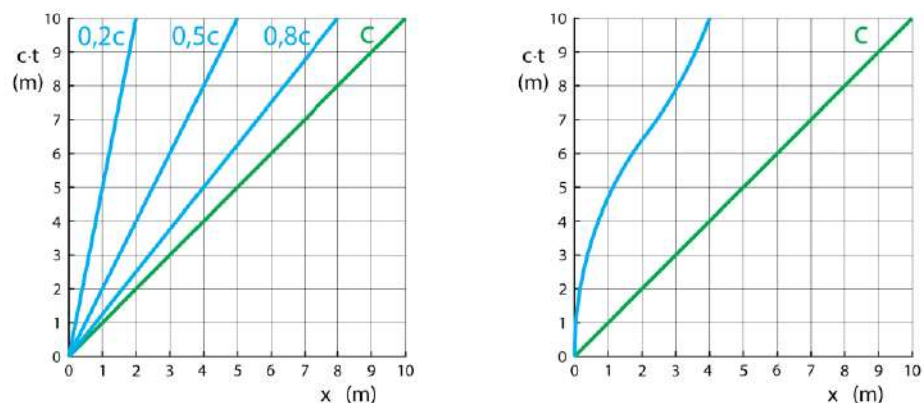
Figuur 16

Links (x, t) -diagram.
Rechts x en t assen omgekeerd.
Stilstaan (blauw) en constante snelheid (oranje).



Omdat we in dit hoofdstuk te maken hebben met snelheden in de buurt van de lichtsnelheid is het niet handig om de plaats in meter en de tijd in seconde aan te geven. Vandaar dat we een **coördinaattransformatie** uitvoeren. Als je $s = v_{\text{gem}} \cdot t$ gebruikt met $v_{\text{gem}} = c$ kun je op de verticale as $c \cdot t$ aangeven in meter. Op de horizontale as en op de verticale as staan dan meters. Eén meter op de verticale as geeft de tijd aan die het licht nodig heeft om één meter af te leggen. Om de tijd uit te rekenen lees je op de verticale as het aantal meters af en deel je dit door $3,0 \cdot 10^8$. In figuur 17 zie je een aantal grafieken die op deze manier zijn gemaakt. Zo'n grafiek heet een **wereldlijn**. Een punt in het ruimtetijsdiagram geeft een **gebeurtenis** aan. Een wereldlijn is een opvolging van gebeurtenissen.

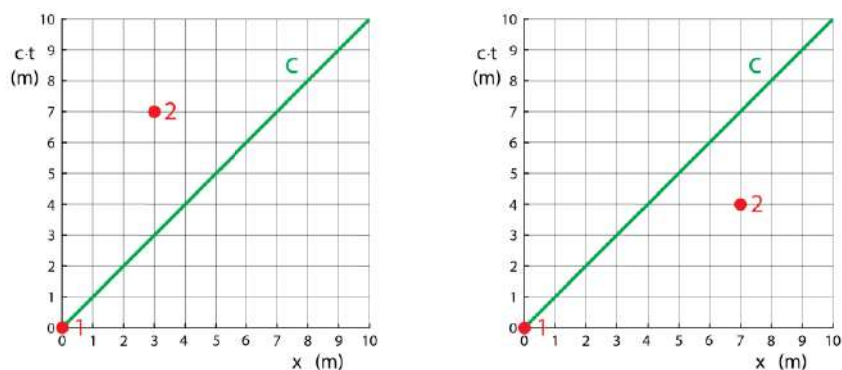
Figuur 17 Ruimtetijsdiagram. Links zijn grafieken bij een constante snelheid en rechts zie je de grafiek van een voorwerp waarvan de snelheid niet constant is.



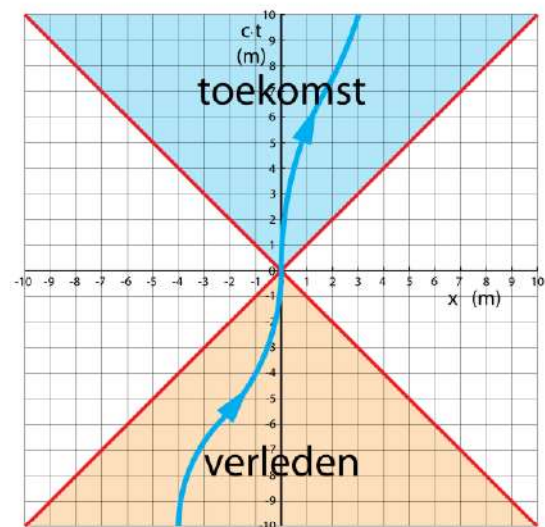
Ieder voorwerp is op een bepaald moment op een bepaalde plaats en je kunt daarom weergeven hoe het voorwerp van de ene naar de andere plaats gaat. In figuur 17 links zie je blauwe wereldlijnen van voorwerpen die zich $t=0$ in de oorsprong bevinden en een constante snelheid hebben van $0,2 \cdot c$, $0,5 \cdot c$ en $0,8 \cdot c$. De groene lijn is de wereldlijn van een foton dat zich op $t=0$ in de oorsprong bevindt. In figuur 17 rechts zie je de wereldlijn van een voorwerp dat zich op $t=0$ in de oorsprong bevindt en geen constante snelheid heeft.

In figuur 18 zie je twee gebeurtenissen 1 en 2 aangegeven met rode stippen. Gebeurtenis 1 vindt eerder plaats dan gebeurtenis 2. In het linker diagram kunnen de gebeurtenissen op de wereldlijn van één voorwerp liggen maar in het rechter diagram kan dit niet. Dat komt omdat de plaats in een te korte tijd teveel verandert. Om van gebeurtenis 1 naar gebeurtenis 2 te komen is in het rechter diagram een snelheid nodig groter dan de lichtsnelheid en dat kan niet. Je weet dus zeker dat de gebeurtenissen bij twee verschillende voorwerpen horen.

Figuur 18 Gebeurtenissen 1 en 2 in het linker diagram kunnen bij hetzelfde voorwerp horen maar in het rechter diagram is dit niet mogelijk.



In figuur 19 zie je de wereldlijn van een voorwerp dat van het verleden naar de toekomst gaat. Op $t=0$ is het voorwerp op $x=0$. De oranje driehoek onder de x -as geeft het gebied aan waar het voorwerp zich in het verleden mogelijk heeft bevonden en de blauwe driehoek boven de x -as geeft het gebied aan waar het voorwerp zich in de toekomst mogelijk zal bevinden. Buiten het oranje (verleden) en het blauwe (toekomst) gebied kan het voorwerp onmogelijk komen omdat daarvoor een snelheid groter dan de lichtsnelheid nodig is.



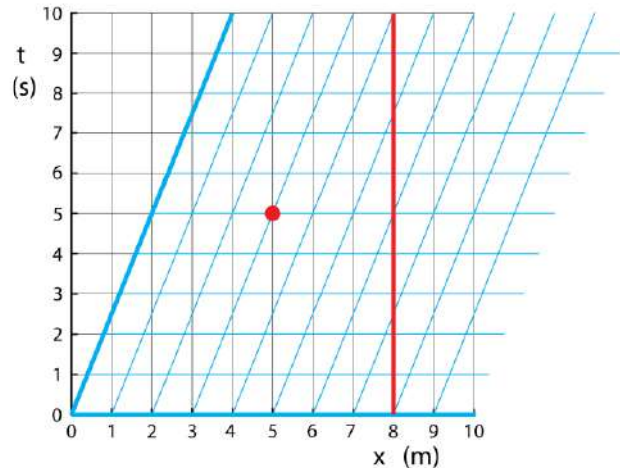
Figuur 19 De wereldlijn van een voorwerp.

De ruimtetijd diagrammen die je bent tegengekomen gaan over bewegingen in één richting. Maar in werkelijkheid kun je in drie richtingen bewegen. We hebben dus een diagram nodig waarin vier richtingen zijn aangegeven, drie voor de plaats en één voor de tijd. Een vierdimensionaal diagram kun je je niet voorstellen en is onmogelijk te tekenen. Maar wiskundig is een berekening met vier dimensies niet heel moeilijk. We kunnen figuur 19 wel uitbreiden met een tweede bewegingsrichting. De driehoeken worden dan kegels en worden **lichtkegels** genoemd.

Ruimtetijsdiagrammen voor twee referentiestelsels

Ruimtetijsdiagrammen komen goed van pas bij het begrijpen van de relativiteitstheorie. In een ruimtetijddiagram kun je aflezen waar en wanneer een gebeurtenis plaatsvindt. Maar waar en wanneer is afhankelijk van de waarnemer. Voor iedere waarnemer moeten we een apart ruimtetijddiagram maken.

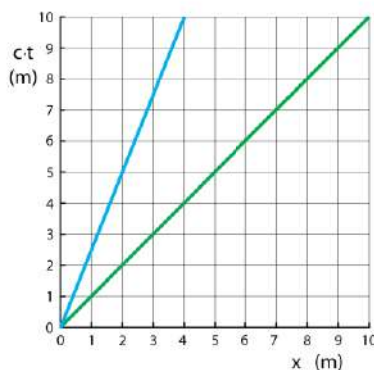
Wat we nu gaan doen is de ruimtetijdsdiagrammen voor waarnemers A en B door elkaar tekenen. Laten we dit eerst doen voor lage snelheden, waarvoor de wetten van Newton gelden. Op de horizontale as staat de plaats in meter en op de verticale as de tijd in seconde. Het zwarte stelsel geldt voor Anna en het Blauwe stelsel voor Bea. Op $t=0$ bevinden Anna en Bea zich beiden op $x=0$. De dikke blauwe lijn schuin omhoog is de wereldlijn van Bea. Zij beweegt met een snelheid van $0,4 \text{ m/s}$ ten opzichte van Anna.



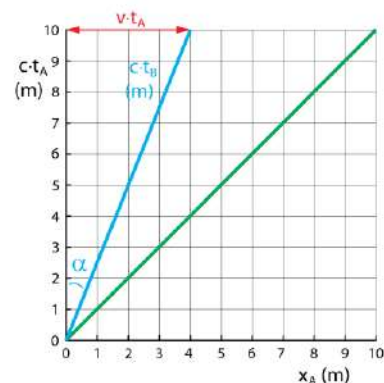
Figuur 20 ruimtetijddiagram voor Anna (zwart) en voor Bea (blauw).

De rode stip is een gebeurtenis. Volgens Anna vindt de gebeurtenis plaats op $t=5 \text{ s}$ op $x=5 \text{ m}$ en volgens Bea vindt de gebeurtenis plaats op $t=5 \text{ s}$ op $x=3 \text{ m}$. Over de tijd zijn ze het eens maar niet over de plaats. Dit is goed te begrijpen, want in 5 s heeft Bea 2 m afgelegd en voor haar vindt de gebeurtenis dus 2 meter dichtbij plaats dan voor Anna. De rode lijn is de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in het referentiestelsel van Anna. Het voorwerp bevindt zich de hele tijd op 8 m afstand van Anna, maar voor Bea komt het voorwerp dichtbij. Op $t=0$ is de afstand 8 m en op $t=10 \text{ s}$ is de afstand 4 m . Heel begrijpelijk, want in 10 s is Bea 4 m verplaatst in de richting van het voorwerp.

We gaan nu hetzelfde doen maar dan voor grote snelheden, waarvoor we de relativiteitstheorie moeten gebruiken. Zoals gebruikelijk bevindt Bea zich in een rijdende trein en staat Anna langs de kant. Bea heeft een snelheid van $0,4c$ ten opzichte van Anna. In figuur 21 zie je het ruimtetijddiagram vanuit het referentiestelsel van Anna. De blauwe grafiek is de wereldlijn van Bea zoals waargenomen door Anna. De $c \cdot t$ -as is de wereldlijn van Anna, want ze staat stil op $x=0$. Maar in haar eigen stelsel staat Bea ook stil op $x=0$. De wereldlijn van Bea fungeert daarom als $c \cdot t$ -as in het stelsel van Bea.



Figuur 20 De blauwe lijn is de wereldlijn van Bea gezien vanuit stelsel A. Deze lijn fungeert als tijd-as van het ruimtetijdsdiagram van stelsel B.

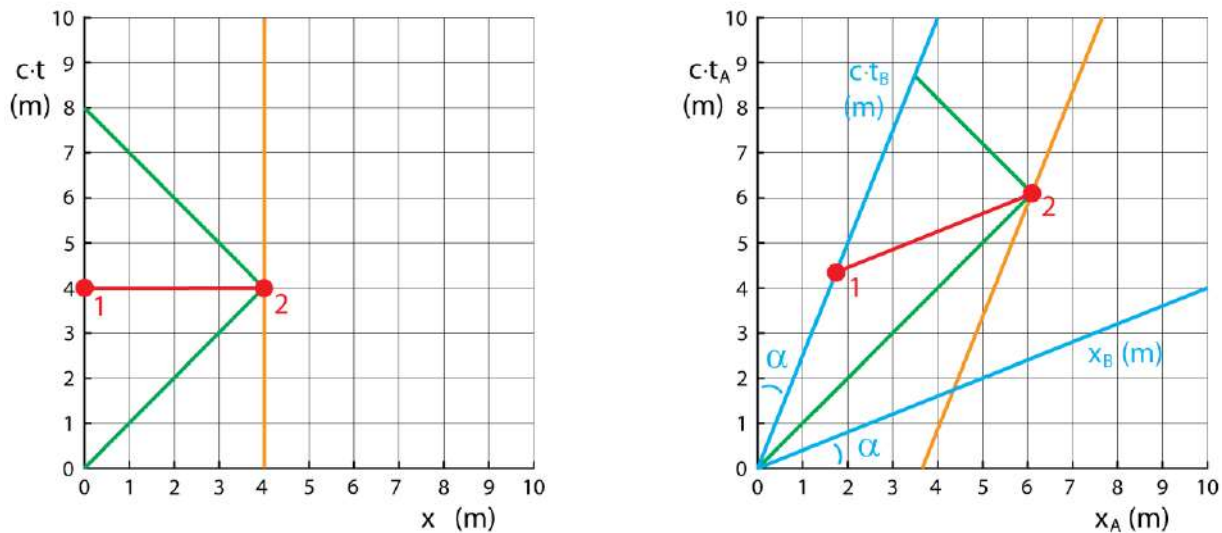


We hebben nu de tijd-as van het ruimtetijd diagram van stelsel B gevonden. Een voorwerp met een wereldlijn evenwijdig aan de tijd-as van stelsel B staat stil in dit stelsel. In figuur 21 rechts is hoek α aangegeven tussen de tijd-assen in het ruimtetijd diagram van stelsel A (zwart) en het ruimtetijd diagram van stelsel B (blauw). Zoals te zien geldt voor deze hoek:

$$\tan \alpha = \frac{v \cdot t_A}{c \cdot t_A} \rightarrow \tan \alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)$$

De ruimte-as van een stelsel kunnen we vinden door te kijken naar gebeurtenissen die in dat stelsel gelijktijdig zijn. Laten we eerst naar het zwarte stelsel kijken. Om te bepalen of gebeurtenissen gelijktijdig zijn doen we het volgende experiment. We zetten een spiegel op 4 m afstand. De oranje lijn is de wereldlijn van deze spiegel. Zie figuur 22 links. Op $t=0$ vertrekt een lichtpuls vanuit $x=0$ naar de spiegel. De spiegel kaatst de lichtpuls terug en op $c \cdot t = 8$ m is de lichtpuls terug. Het tijdstip waarop de lichtpuls bij de spiegel terugkaatst is gelijk aan de helft van deze tijd en vindt dus plaats op $c \cdot t = 4$ m. In stelsel A zijn gebeurtenissen 1 en 2 op $c \cdot t = 4$ gelijktijdig. De rode verbindingslijn tussen 1 en 2 is daarom evenwijdig aan de ruimte-as van stelsel A. En dat is in overeenstemming met de getekende horizontale x-as.

Dezelfde methode gaan we toepassen in stelsel B. Hierbij gebruiken we het postulaat dat de lichtsnelheid in stelsel B gelijk is aan de lichtsnelheid in stelsel A. De groene lijnen zijn de wereldlijnen van een lichtpuls. In figuur 22 rechts zien we dat gebeurtenissen 1 en 2 gelijktijdig zijn in referentiestelsel B. De rode verbindingslijn tussen 1 en 2 is daarom evenwijdig aan de ruimte-as van stelsel B. Je ziet dat ook de plaats-as in stelsel B scheef staat ten opzichte van de plaats as in stelsel A. Ook voor de plaats-as geldt: $\alpha = \tan^{-1}(v/c)$.



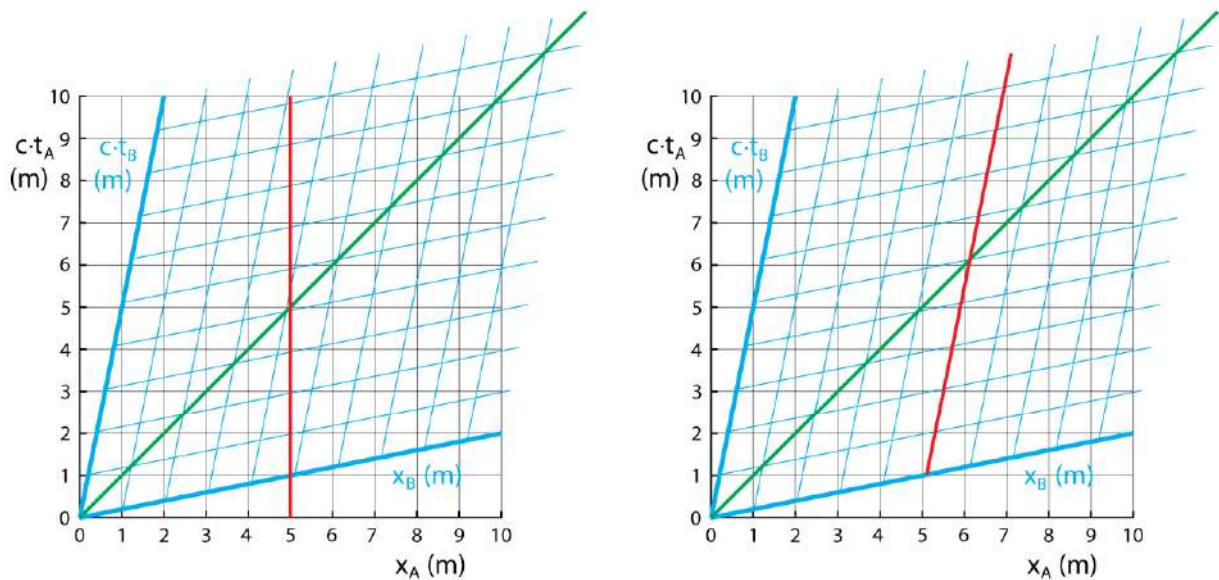
Figuur 22 Links zijn gebeurtenissen 1 en 2 gelijktijdig in stelsel A. Rechts zijn gebeurtenissen 1 en 2 in het gelijktijdig in stelsel B. In beide stelsels is de verbindingslijn tussen 1 en 2 evenwijdig aan de ruimte-as.

In stelsel A staan de ruimte- en tijd-assen loodrecht op elkaar en in stelsel B is de hoek tussen de ruimte en de tijd as $90 - 2\alpha$. De meetkunde in een assenstelsel waarbij de hoek tussen de assen niet 90 graden is heet **niet-Euclidische meetkunde** en daar hebben we nu dus mee te maken. Voor $v = c$ vinden we $\alpha = 45$ graden en dan is het blauwe stelsel helemaal ingeklapt.

De assen van stelsel B maken een hoek α met de assen in stelsel A.
Voor deze hoek geldt:

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}$$

In figuur 23 zie je twee ruimtetijd diagrammen door elkaar heen getekend. Diagram A (zwart) geldt voor het stelsel van Anna en diagram B (blauw) voor het stelsel van Bea. De snelheid tussen de stelsels is $0,2 c$. Anna en Bea zijn op $t=0$ op plaats $x=0$. Links zie je de wereldlijn (rood) van een voorwerp dat stilstaat in het stelsel A en rechts de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in stelsel B (blauw).



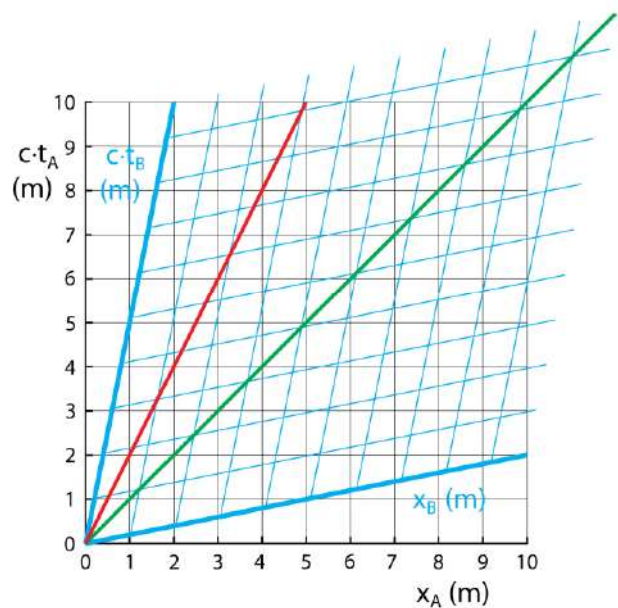
Figuur 23 Ruimtetijd diagrammen. Links de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in stelsel A (zwart) en rechts de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in stelsel B (blauw).

In figuur 24 zie ruimtetijd diagrammen van stelsels met een onderlinge snelheid van $\frac{1}{5} c$. Je ziet ook de wereldlijn (rood) van een voorwerp dat in het blauwe stelsel een snelheid heeft van $\frac{1}{3} c$ (3 m in $c \cdot t = 9$ m). Zonder berekening kun je aflezen dat in stelsel A dit voorwerp een snelheid heeft van $\frac{1}{2} c$. Met de formule waarmee je snelheden moet optellen kun je dit controleren.

$$v_B = \frac{1}{3}c \quad | \quad v_{BA} = \frac{1}{5}c \quad | \quad v_A = \dots$$

$$v_A = \frac{v_B + v_{BA}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{BA}}{c^2}}$$

$$v_A = \frac{\frac{1}{3} \cdot c + \frac{1}{5} \cdot c}{1 + \frac{(\frac{1}{3} \cdot c) \cdot (\frac{1}{5} \cdot c)}{c^2}} = \frac{\frac{5}{15} \cdot c + \frac{3}{15} \cdot c}{1 + \frac{1}{15}} = \frac{\frac{8}{15} \cdot c}{\frac{16}{15}} = \frac{1}{2} \cdot c$$

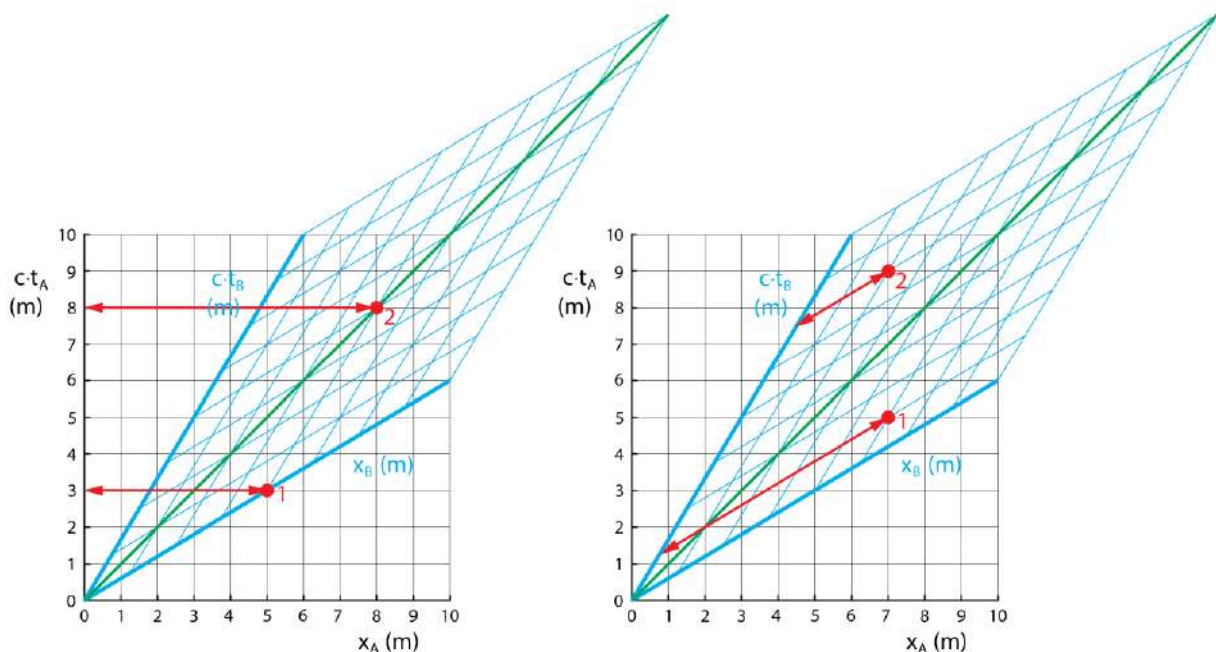


Figuur 24 Snelheden optellen.

Zoals je ziet kun je de door elkaar getekende ruimtetijd diagrammen gebruiken om zonder berekening af te lezen wat Anna in stelsel A en Bea in stelsel B waarnemen. Laten we eens kijken hoe tijddilatatie en lengtekrimp tevoorschijn komen.

Tijddilatatie aflezen in een ruimtetijd diagram

In figuur 25 zie je ruimtetijd diagrammen voor stelsels die met snelheid $0,6\,c$ ten opzichte van elkaar bewegen. Bij deze snelheid is de γ -factor $1,25$. Anna bevindt zich in stelsel A (zwart) en Bea in stelsel B (blauw). Links zie je twee gebeurtenissen aangegeven met rode stippen. In het stelsel van Bea is de plaats van deze gebeurtenissen $x = 4$. De tijd tussen de gebeurtenissen is voor Bea de eigentijd en zij leest af $\Delta t_e = 4/c$. Voor Anna zijn (1) en (2) niet op dezelfde plaats, (1) gebeurt op $c \cdot t = 3$, $x = 5$ en (2) op $c \cdot t = 8$, $x = 8$. Anna vindt: $\Delta c \cdot t = 8 - 3 = 5 \rightarrow \Delta t_{\text{bew}} = 5/c$. Je ziet dat $5/c = 1,25 \cdot 4/c$ wat klopt met $\Delta t_{\text{bew}} = \gamma \cdot \Delta t_e$.



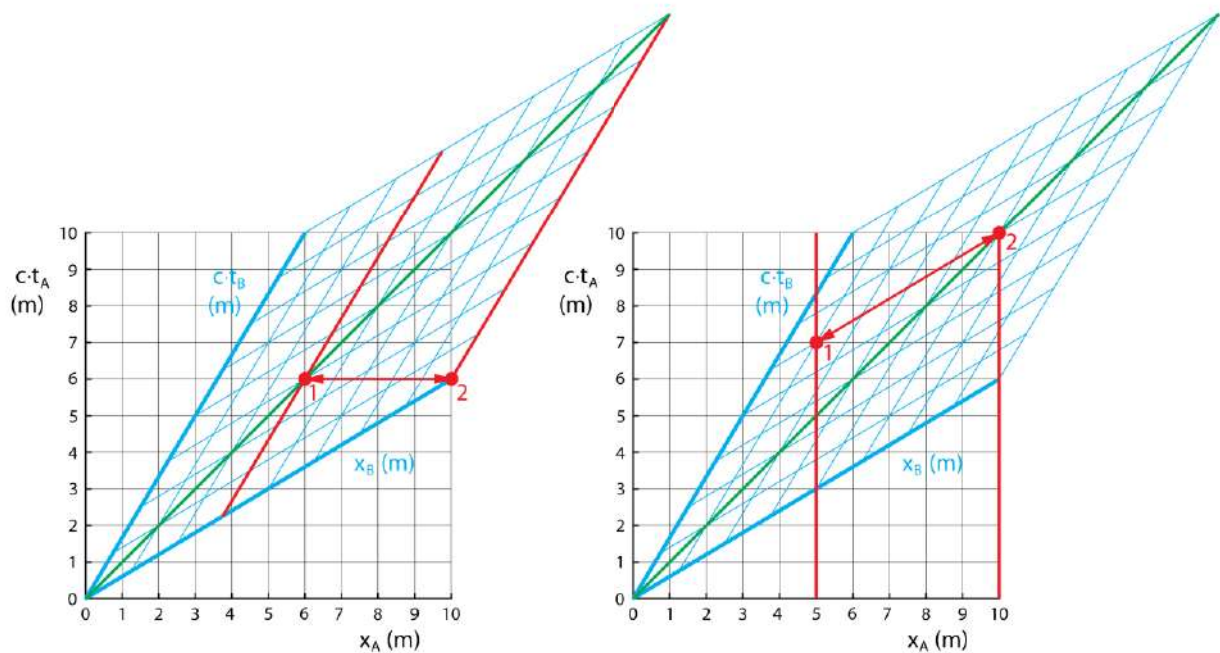
Figuur 25 Tijddilatatie aflezen. Links zijn gebeurtenissen 1 en 2 op dezelfde plaats in het stelsel van Bea (blauw). Rechts zijn gebeurtenissen 1 en 2 op dezelfde plaats in het stelsel van Anna (zwart).

Rechts zie je twee gebeurtenissen op dezelfde plaats ($x = 7\,m$) volgens Anna. De tijd tussen de gebeurtenissen is voor Anna de eigentijd en zij leest af $\Delta t_e = 4/c$. Voor Bea zijn (1) en (2) niet op dezelfde plaats, (1) gebeurt op $c \cdot t = 1$, $x = 5$ en (2) op $c \cdot t = 6$, $x = 2$. Bea vindt: $\Delta c \cdot t = 6 - 1 = 5 \rightarrow \Delta t_{\text{bew}} = 5/c$. Je ziet dat $5/c = 1,25 \cdot 4/c$ wat klopt met $\Delta t_{\text{bew}} = \gamma \cdot \Delta t_e$.

Lengtekrimp aflezen in een ruimtetijd diagram

In figuur 26 zie je ruimtetijd diagrammen voor stelsels die met snelheid $0,6\,c$ ten opzichte van elkaar bewegen. Bij deze snelheid is de γ -factor $1,25$. Anna bevindt zich in stelsel A (zwart) en Bea in stelsel B (blauw). Links zie je twee wereldlijnen (rood) die horen bij de voorkant en de achterkant van een stok die stilstaat in stelsel B. Bea bepaalt de lengte van de stok door gelijktijdig de plaats van de voorkant en de achterkant af te lezen. Zij vindt

$L_e = 5$. Anna leest ook gelijktijdig de plaats van de voorkant en de achterkant af. Op $c \cdot t = 6$ geldt voor haar (1) op $x = 6$ en (2) op $x = 10$. Anna vindt: $\Delta x = 10 - 6 = 4 \rightarrow L_{bew} = 4$. Je ziet dat $4 = 5 / 1,25$ wat klopt met $L_{bew} = L_e / \gamma$.



Figuur 26 Lengtekrimp aflezen. Links de wereldlijnen van de voorkant en de achterkant van een stok in stelsel B en rechts in stelsel A. Om de lengte van de stok te bepalen moet je gelijktijdig de plaats van de voorkant en van de achterkant aflezen.

Rechts zie je twee wereldlijnen (rood) die horen bij de voorkant en de achterkant van een stok die stilstaat in stelsel A. Anna bepaalt de lengte van de stok door op het hetzelfde tijdstip de plaats van de voorkant en de achterkant af te lezen. Zij vindt $L_e = 5$. Bea leest ook gelijktijdig de plaats van de voorkant en de achterkant af. Op $c \cdot t = 5$ geldt voor haar (1) op $x = 1$ en (2) op $x = 5$. Bea vindt: $\Delta x = 5 - 1 = 4 \rightarrow L_{bew} = 4$. Je ziet dat $4 = 5 / 1,25$ wat klopt met $L_{bew} = L_e / \gamma$.

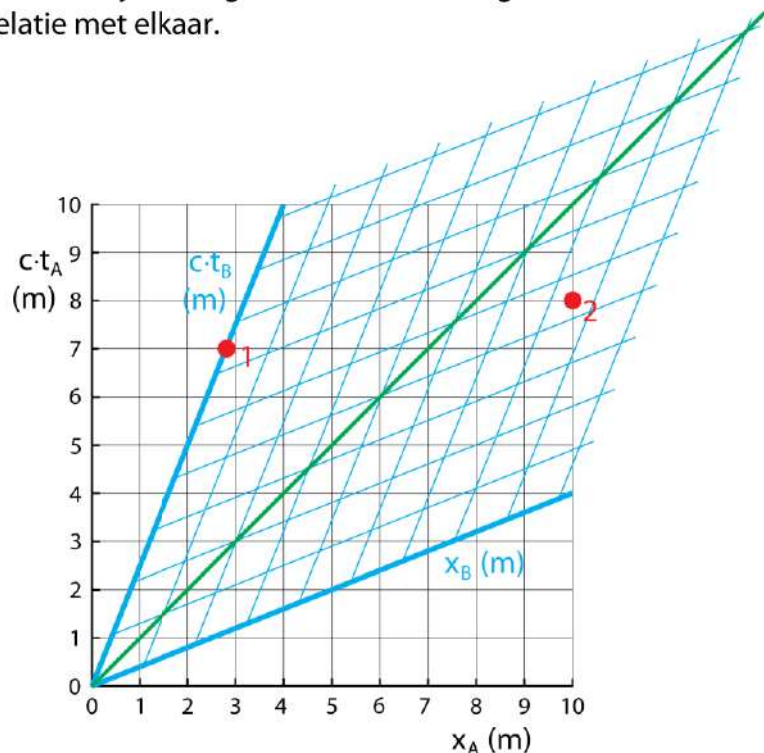
Causaliteit (oorzaak en gevolg)

De samenhang tussen oorzaak en gevolg noem je **causaliteit**. De oorzaak gebeurt altijd eerder dan het gevolg. Schiet een moordenaar iemand dood dan valt het slachtoffer neer **nadat** het schot is gelost. Het is denkbaar dat het slachtoffer neervalt **voordat** het schot is gelost maar dan kan de kogel uit het pistool hiervan niet de oorzaak zijn. De vraag is of in de relativiteitstheorie de volgorde van gebeurtenissen gehandhaafd blijft. We hebben immers gezien dat gebeurtenissen die in referentiestelsel B gelijktijdig zijn in stelsel A na elkaar kunnen plaatsvinden. Het is denkbaar dat in stelsel A eerst gebeurtenis 1 plaatsvindt en daarna 2 maar dat in stelsel B de volgorde is omgekeerd: eerst 2 en daarna 1.

In figuur 27 zie je een ruimtetijd diagram met twee gebeurtenissen aangegeven met rode stippen. In referentiestelsel A (zwart) vindt gebeurtenis 1 plaats op $c \cdot t_A = 7$ en gebeurtenis 2 op $c \cdot t_A = 8$. Dus eerst 1 en daarna 2. In referentiestelsel B (blauw) vindt 1 plaats op $c \cdot t_B = 6,3$ en 2 op $c \cdot t_B = 4,4$. Dus eerst 2 en daarna 1. Het is dus inderdaad zo dat de volgorde van

gebeurtenissen afhankelijk is van het referentiestelsel. Maar voor gebeurtenissen 1 en 2 geldt iets bijzonders. Om van 1 naar 2 te reizen heb je een snelheid nodig groter dan de lichtsnelheid en het is daarom onmogelijk dat één voorwerp betrokken is geweest bij 1 en bij 2. Gebeurtenis 2 kan niet veroorzaakt zijn door gebeurtenis 1 en de gebeurtenissen 1 en 2 hebben daarom geen causale relatie met elkaar.

Figuur 27 In stelsel A (zwart) vindt gebeurtenis 2 plaats na gebeurtenis 1. In stelsel B (blauw) gebeurt eerst 2 en daarna 1. Om van 1 naar 2 te reizen is een snelheid groter dan c nodig. Gebeurtenissen 1 en 2 hebben daarom geen causale relatie.



Als je dit verder uitwerkt kom je tot de conclusie dat de volgorde van twee gebeurtenissen die NIET op de wereldlijn van een voorwerp kunnen liggen afhankelijk is van het referentiestelsel. Maar de volgorde van twee gebeurtenissen die WEL op de wereldlijn van een voorwerp kunnen liggen is niet afhankelijk van het referentiestelsel.

Als twee gebeurtenissen op de wereldlijn van een voorwerp kunnen liggen is de volgorde in de tijd onafhankelijk van het referentiestelsel en is een causaal verband mogelijk.

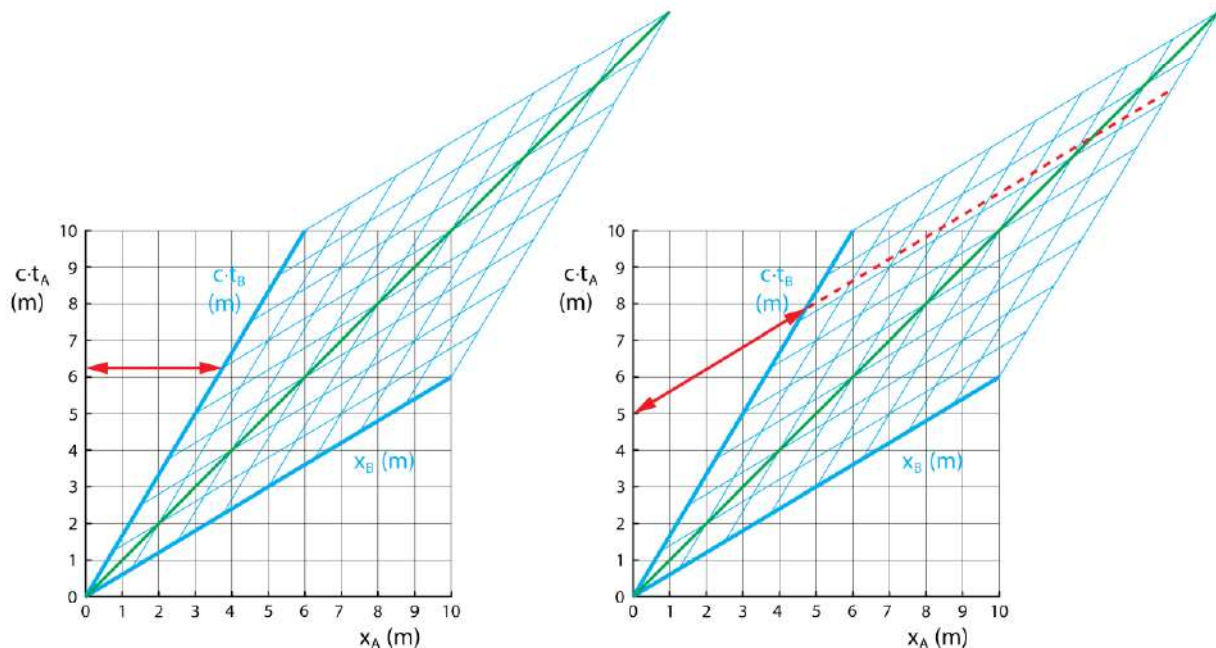
Radioactief verval

Het tempo waarin radioactieve stoffen vervallen wordt bepaald door de halveringstijd. Dit is de tijd waarin de helft van de radioactieve kernen vervalst. De halveringstijd $t_{1/2}$ kan je niet van buitenaf beïnvloeden maar wordt bepaald door inwendige processen in een atoomkern. Het vervallen van radioactieve kernen gaan we vanuit twee referentiestelsel bekijken. We nemen een stof met een halveringstijd van $5/c$ seconden ($c \cdot t = 5$).

Eerst neemt Bea de radioactieve kernen mee in een trein die met een snelheid van $0,6c$ langs Anna rijdt. Voor de referentiestelsels A en B geldt

$$\Delta t_{\text{bew}} = \gamma \cdot \Delta t_e \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{in dit geval:} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,6 \cdot c)^2}{c^2}}} = 1,25$$

Bea en de radioactieve kernen bevinden zich in referentiestelsel B, zodat Bea een halveringstijd van $c \cdot t = 5$ waarneemt. Vanuit Anna gezien heeft Bea een snelheid van $0,6c$ zodat de halveringstijd volgens Anna $c \cdot t = 5 \cdot 1,25 = 6,25$ is. Anna verwacht dat het aantal kernen na $c \cdot t = 5$ is gehalveerd maar constateert dat in de rijdende trein de helft van de kernen pas na $c \cdot t = 6,25$ is vervallen. Anna concludeert daarom dat de tijd in de rijdende trein langzamer verloopt dan haar eigen tijd. In figuur 28 links zie je hoe Anna's redenering in een ruimtetijd diagram tot uitdrukking komt.



Figuur 28 Radioactief verval.

Links: de kernen bevinden zich in referentiestelsel B → in B is de halveringstijd $c \cdot t = 5$ en in A $c \cdot t = 6,25$.

Rechts: de kernen bevinden zich in referentiestelsel A → in A is de halveringstijd $c \cdot t = 5$ en in B $c \cdot t = 6,25$.

Vervolgens neemt Anna de radioactieve kernen van Bea over. De kernen bevinden zich nu samen met Anna in referentiestelsel A, zodat Anna een halveringstijd van $c \cdot t = 5$ waarneemt. Vanuit Bea gezien heeft Anna een snelheid van $0,6c$ zodat de halveringstijd volgens Bea $c \cdot t = 5 \cdot 1,25 = 6,25$ is. Bea verwacht dat het aantal kernen na $c \cdot t = 5$ is gehalveerd maar constateert dat in het bewegende preparaat de helft van de kernen pas na $c \cdot t = 6,25$ is vervallen. Bea concludeert daarom dat de tijd bij Anna langs het spoor langzamer verloopt dan haar eigen tijd. In figuur 28 rechts zie je hoe Bea's redenering in een ruimtetijd diagram tot uitdrukking komt.

De tweelingparadox

De tweelingparadox gaat over een tweeling waarvan er één met een raket op reis gaat en de ander thuisblijft. Zie figuur 29. Als de reiziger thuiskomt is ze jonger dan de thuisblijver. Voor de thuisblijver heeft de reis bijvoorbeeld 10 jaar geduurd en voor de reiziger 8 jaar. Hoe kan dit?



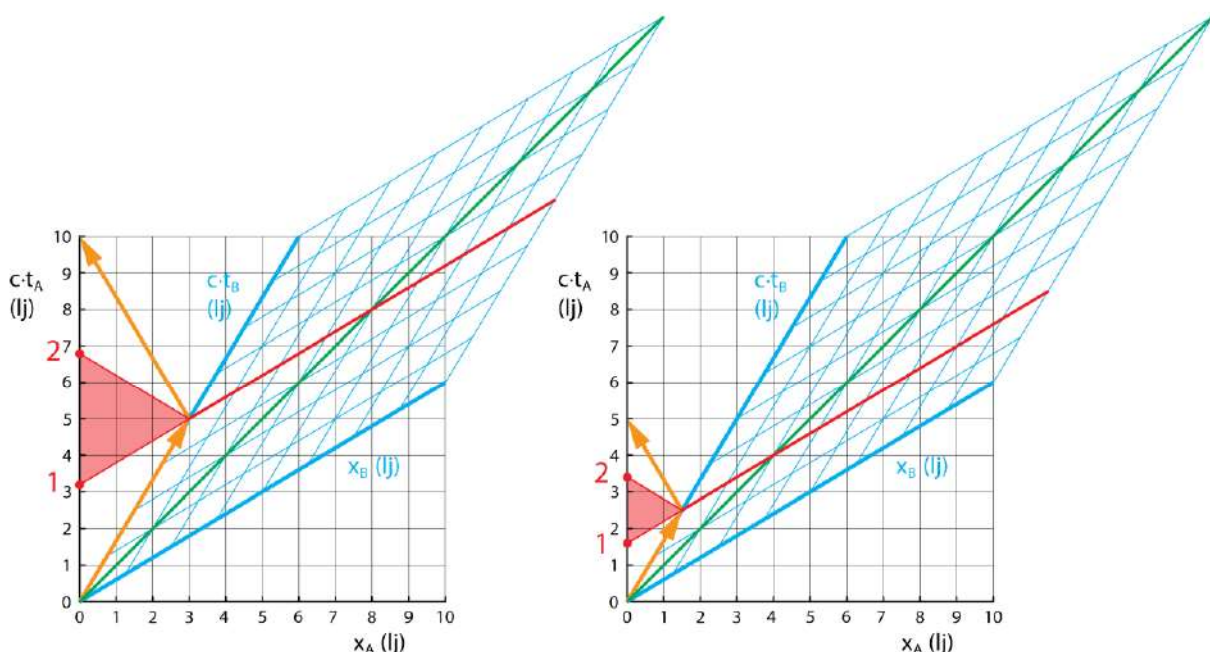
Figuur 29 Tweelingparadox.

De tweeling Anna en Bea willen de paradox meemaken. Op de heenreis neemt de afstand tussen Anna en Bea toe. Beweging is relatief zodat Anna denkt dat zij thuisblijft en dat Bea op reis gaat. Maar Bea denkt het omgekeerde, volgens haar blijft zij thuis en gaat Anna op reis. Wie van hen zal jonger zijn als ze elkaar weer ontmoeten?

Het antwoord op deze vraag kan zonder twijfel worden gegeven, want bij de reiziger keert de beweging om en dat gebeurt niet bij de thuisblijver. De gebeurtenissen van Anna en Bea zijn dus niet identiek, want bij het omkeren zal de raket vertragen en versnellen en werkt er dus een resulterende kracht. Een referentiestelsel dat vertraagt en versnelt is geen **inertiaal referentiestelsel**. De reiziger bij wie de beweging omkeert zal bij de ontmoeting jonger zijn.

De tweelingparadox kan worden weergegeven in een ruimtetijd diagram. In figuur 30 zie je het resultaat. De afstand op de assen zijn nu geen meters maar lichtjaren. In figuur 30 reist Bea met een snelheid van $0,6c$. In het linker diagram duurt de reis volgens Anna 10 jaar en volgens Bea 8 jaar (4 jaar heen en 4 jaar terug). In het rechter diagram duurt de reis volgens Anna 5 jaar en volgens Bea 4 jaar (2 jaar heen en 2 jaar terug).

Bij het omkeren gebeurt iets opmerkelijks. Voor Bea is het in aangegeven tijdstip 1 op de tijd-as van Anna gelijktijdig met het moment van omkeren. Als Bea omkeert klapt haar ruimtetijd diagram (blauw) om. Het diagram moet nu naar links worden getekend, maar voor de duidelijkheid heb ik dat in figuur 30 niet gedaan. In het omgeklapte diagram is tijdstip 2 op de tijd-as van Anna gelijktijdig met het moment van omkeren. We zien dus dat tijdstip 1 en tijdstip 2, die voor Anna jaren uit elkaar liggen, voor Bea dicht bij elkaar liggen. Tijdstip 1 is voor Bea vlak vóór het omkeren en tijdstip 2 vlak ná het omkeren. Het omkeren kost voor Bea weinig tijd, maar in die voor Bea korte tijd wordt Anna jaren ouder. Het lijkt wel of de tijd die voor Anna verstrijkt tussen 1 en 2 door Bea wordt overgeslagen. Dit alles is moeilijk te begrijpen en onmogelijk om je voor te stellen.



Figuur 30 Tweelingparadox.

Links: in referentiestelsel A duurt de reis 10 jaar; in referentiestelsel B 8 jaar.

Rechts: in referentiestelsel A duurt de reis 5 jaar; in referentiestelsel B 4 jaar.

Vanuit Bea gezien geeft de klok van Anna vlak voor het moment van omkeren 3,2 jaar aan. Zij ziet immers dat Anna beweegt en bewegende klokken tikken langzamer. De γ -factor bij 0,6c is 1,25, dus 4 jaar voor Bea is $4 / 1,25 = 3,2$ jaar voor Anna. Vlak nadat Bea is omgekeerd geeft de klok van Anna 6,8 jaar aan. Er is een tijdsprong van 3,6 jaar. Over de terugreis doet Bea volgens haar klok 4 jaar en in die tijd wordt Anna 3,2 jaar ouder. Bea berekent dat de heenreis en de terugreis op de klok van Anna 3,2 jaar duurt en dat bij het omkeren Anna ineens 3,6 jaar ouder wordt. In totaal wordt Anna $3,2 + 3,6 + 3,2 = 10$ jaar ouder.

Het omkeren van Bea is cruciaal voor het begrip van de tweelingparadox. Tijdens het omkeren werkt er een resulterende kracht op Bea, terwijl er nooit een resulterende kracht op Anna werkt. Hoewel de aanwezigheid van een resulterende kracht het verschil maakt tussen Anna en Bea is dit niet de directe oorzaak van het verschil. In figuur 30 rechts zie je dat de tijdsprong bij een reis die volgens Anna 10 jaar duurt groter is dan de tijdsprong bij een reis die volgens Anna 5 jaar duurt. Bij een reis die volgens Anna 10 jaar duurt is Bea bij thuiskomst 2 jaar jonger. Bij een reis die volgens Anna 5 jaar duurt is Bea bij thuiskomst 1 jaar jonger. Maar voor de resulterende kracht maakt de reisduur geen verschil. Omkeren na 2 jaar kost evenveel kracht als omkeren na 4 jaar. Als de resulterende kracht de oorzaak is van het tijdverschil dan zou het niet uit moeten maken hoelang de reis duurt. Maar zoals je ziet is het tijdverschil wel afhankelijk van de duur van de reis.

Om de tweelingparadox te bewijzen zijn er experimenten uitgevoerd met atoomklokken aan boord van vliegtuigen en satellieten. Het berekende verschil in tijd tussen de thuisblijver en de reiziger klopt precies met de experimentele waarde. Hieruit blijkt opnieuw dat de natuur anders in elkaar zit dan op het eerste gezicht lijkt. Wij zijn in ons dagelijks leven niet gewend aan snelheden in de buurt van de lichtsnelheid en vandaar dat we een wereldbeeld hebben waarin klokken voor iedereen gelijklopen en afstanden voor iedereen gelijk zijn. Maar als je nauwkeurige metingen doet klopt dit wereldbeeld niet met de praktijk.

15.4 Massa en energie

Massa en snelheid

De relativiteitstheorie geeft aan dat de lichtsnelheid de grootste snelheid is die een voorwerp kan krijgen. Maar hoe is dit te rijmen met de wet van behoud van energie? Je kunt je voorstellen dat als er voortdurend een kracht is die arbeid levert de kinetische energie van een voorwerp almaar groter wordt en met $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ verwacht je dat er een moment is waarop v groter wordt dan de lichtsnelheid. Toch gebeurt dit niet en dat komt omdat in de relativiteitstheorie de massa afhankelijk is van de snelheid. Stel we nemen een voorwerp dat stilstaat in referentiestelsel A. In dit stelsel heeft het voorwerp **rustmassa** m_0 maar als dit voorwerp wordt meegenomen in referentiestelsel B dat een snelheid heeft van v ten opzichte van A dan geldt voor een waarnemer in A dat de massa is toegenomen. Er geldt:

$$m_b = \gamma \cdot m_0 \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- m_b is de massa in het referentiestelsel dat je ziet bewegen (kg)
- m_0 is de massa in je eigen referentiestelsel dat voor jou stilstaat (de **rustmassa**) (kg)
- v is de snelheid tussen de referentiestelsels (m/s)
- c is de lichtsnelheid (m/s)

In deze formule zie je dat als de snelheid groter wordt ook de massa toeneemt. Dit effect wordt pas duidelijk als de snelheid in de buurt komt van de lichtsnelheid.

Als $v = 0,8c$ vind je: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{0,6} = 1,67 \rightarrow m_b = 1,67 \cdot m_0$

Als $v = 0,995c$ vind je: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,995c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{0,1} = 10 \rightarrow m_b = 10 \cdot m_0$

We zien nu wat er gebeurt als er voortdurend arbeid op een voorwerp wordt verricht. Is de snelheid veel kleiner dan de lichtsnelheid dan wordt de arbeid omgezet in een toename van de snelheid, maar komt de snelheid in de buurt van de lichtsnelheid dan wordt de arbeid omgezet in een toename van de massa. Het feit dat massa toeneemt met de snelheid is erg vreemd. Massa heeft in de natuurkunde twee betekenissen die op het eerste gezicht niets met elkaar te maken lijken te hebben. In de eerste betekenis geeft de massa aan hoeveel kracht het kost om het voorwerp een versnelling te geven. De massa die hieruit volgt is de **trage massa**. De tweede betekenis van massa komt uit de gravitatiewet van Newton, die aangeeft dat massa's elkaar aantrekken. De massa die hieruit volgt is de **zware massa**.

Einsteins conclusie dat massa afhankelijk is van de snelheid legt bijzondere relaties bloot tussen **massa en energie** en tussen **ruimte en zwaartekracht**. De relatie tussen massa en energie komt hieronder aan bod. De relatie tussen ruimte en zwaartekracht is het onderwerp van de algemene relativiteitstheorie, waar we in de volgende paragraaf naar gaan kijken.

Massa en energie

Om de relatie tussen massa en energie te onderzoeken gaan we de breuk

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ benaderen met een reeks. Er geldt: } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

Voor x kleiner dan 1, bijvoorbeeld $1/10$, vinden we: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{10}}} = 1 + \frac{1}{20} + \frac{3}{800} + \frac{5}{16000} + \dots$. Je ziet

dat alleen de eerste termen belangrijk zijn, termen verderop in de reeks dragen nauwelijks bij aan het resultaat.

- we schrijven: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots$
- $m_b = \gamma \cdot m_0$ met $\gamma = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots$ **vermenigvuldig links en rechts met c^2**
- $m_b \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + \frac{1}{2}m_0 \cdot v^2 + \frac{3}{8}m_0 \cdot v^2 \cdot \left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \dots$

Laten we eens goed kijken wat hier staat. De eerste drie termen na het = teken heb ik uitgeschreven en met kleur aangegeven. De 2^e term (groen) herken je als de kinetische energie bij lage snelheid. De overige termen moeten dus ook energie zijn. De 1^e term (rood) is onafhankelijk van de snelheid. Een stilstaand voorwerp met massa m_0 bevat dus een hoeveelheid energie gelijk aan $E_{\text{rust}} = m_0 \cdot c^2$. Dit geeft ons de beroemde formule:

$$\text{Rustenergie: } E_{\text{rust}} = m_0 \cdot c^2$$

Als de snelheid veel kleiner is dan de lichtsnelheid is de 3^e term (blauw) veel kleiner dan de 2^e term. Voor **lage snelheid** geldt dus bij benadering $E_k = \frac{1}{2}m_0 \cdot v^2$. maar bij een hoge snelheid ($v > 0,3c$) mag je de 3^e term en de termen die daarna komen niet verwaarlozen en dan geldt er dus een andere formule voor de kinetische energie. De term voor het = teken is de totale energie:

$$\text{Totale energie: } E_{\text{tot}} = m_b \cdot c^2 = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$$

- E_{tot} is de totale energie in joule (J)
- m_b is de massa in stelsel B dat je ziet bewegen (kg)
- m_0 is de massa in je eigen stelsel dat volgens jou stilstaat, de rustmassa (kg)
- c is de lichtsnelheid (m/s)

De **kinetische energie bij hoge snelheid** is de totale energie min de rustenergie.

$$E_K = E_{\text{tot}} - E_{\text{rust}} \rightarrow E_K = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$

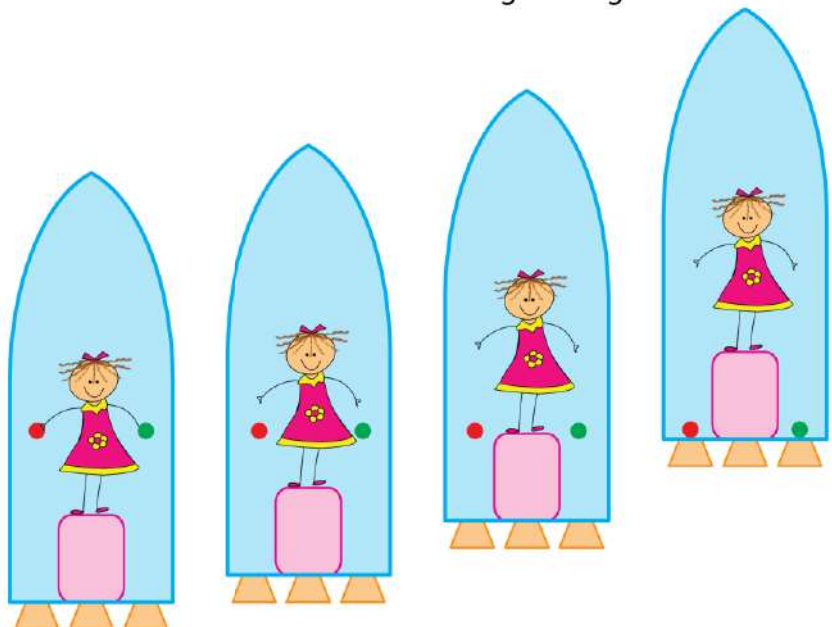
15.5 Algemene relativiteitstheorie

Het equivalentie principe

Tot nu toe hebben we ons gericht op gebeurtenissen in **inertiaal referentiestelsels**. Dit zijn stelsels die met een constante snelheid in een rechte lijn bewegen. Met de **speciale relativiteitstheorie** kun je de gebeurtenissen in deze stelsels beschrijven. Nadat Einstein de speciale relativiteitstheorie in 1905 publiceert vraagt hij zich af hoe het zit met referentiestelsels die versnellen of vertragen. Hij wil een relativiteitstheorie bedenken die gebruikt kan worden in **alle referentiestelsels**. In 1907 krijgt hij het centrale idee dat hij nodig heeft om zo'n theorie te ontwikkelen. Dit idee beschouwt Einstein als het beste idee dat hij ooit heeft gekregen. En zoals veel goede ideeën is het vrij eenvoudig te begrijpen.

Stel Bea bevindt zich in een raket ver weg van alle hemellichamen. In de raket is geen zwaartekracht. Samen met alle losse spullen zweeft Bea door de raket. Maar dit verandert als de raket gaat versnellen, bijvoorbeeld met $9,81 \text{ m/s}^2$. Omdat de raket versnelt wordt Bea tegen de vloer gedrukt. Gaat ze op een weegschaal staan dan kan ze haar gewicht meten. In de raket gaat Bea natuurkundige experimenten uitvoeren. Terwijl de raket versnelt laat ze twee ballen vallen, de ene met veel meer massa dan de andere. Bea is verbaasd dat de ballen precies tegelijk op de vloer komen. Je zou toch verwachten dat de zware bal eerder aankomt dan de lichte. Anna bevindt zich buiten de raket. Volgens haar vallen de ballen helemaal niet maar blijven ze stil hangen in de ruimte. Omdat de raket versnelt komt de vloer steeds dichterbij totdat de ballen op hetzelfde moment met de vloer in aanraking komen. Anna verbaast zich helemaal niet dat de ballen tegelijk op de vloer komen, het is immers de versnellende raket die hiervoor zorgt. Zie figuur 31.

Figuur 31 Bea in raket ziet dat de ballen tegelijk op de grond vallen. Buiten de raket ziet Anna dat de ballen stil hangen en dat de raket versnelt.



Stel dat de raket een tijdje later niet in de ruimte versnelt is maar stilstaat op het oppervlak van een planeet zoals de aarde. Alle experimenten die Bea in de versnellende raket heeft gedaan kan ze herhalen en steeds zal er hetzelfde uitkomen. Zolang ze niet naar buiten kijkt kan Bea er niet achter komen of ze versnelt of op een planeet stilstaat.

Einstein redeneert dat je geen onderscheid kunt maken tussen een referentiestelsel dat versnelt en een referentiestelsel waarin zwaartekracht werkt. Dit noem je het **equivalentie principe**.

Equivalentie principe:

Je kunt geen onderscheid maken tussen een referentiestelsel dat versnelt en een referentiestelsel waarin zwaartekracht werkt.

In de vorige paragraaf heb je kennis gemaakt met de trage massa en de zware massa. De **trage massa** geeft aan hoeveel kracht het kost om het voorwerp te versnellen. Het is de verhouding tussen de resulterende kracht en de versnelling. De **zware massa** komt uit de gravitatiewet van Newton. Deze wet geeft aan dat massa's elkaar aantrekken en dat deze kracht groter wordt als de massa toeneemt.

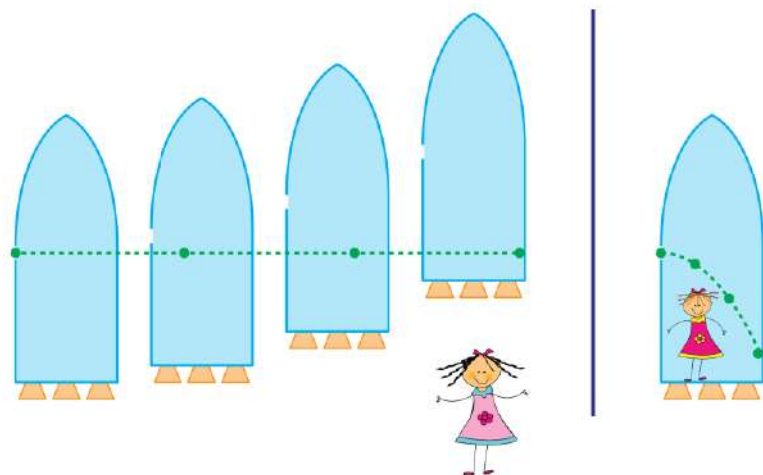
Trage massa:	$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow m = \frac{\Sigma F}{a}$
Zware massa:	$F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$

Wat Einstein met zijn equivalentie principe beweert is dat de trage massa en de zware massa niet toevallig aan elkaar gelijk zijn, maar per definitie. Je kunt geen onderscheid maken tussen versnellen en de werking van zwaartekracht. Wat de ene waarnemer zwaartekracht noemt (Bea in de raket) noemt de andere waarnemer versnellen (Anna buiten de raket).

Afbuigen van licht

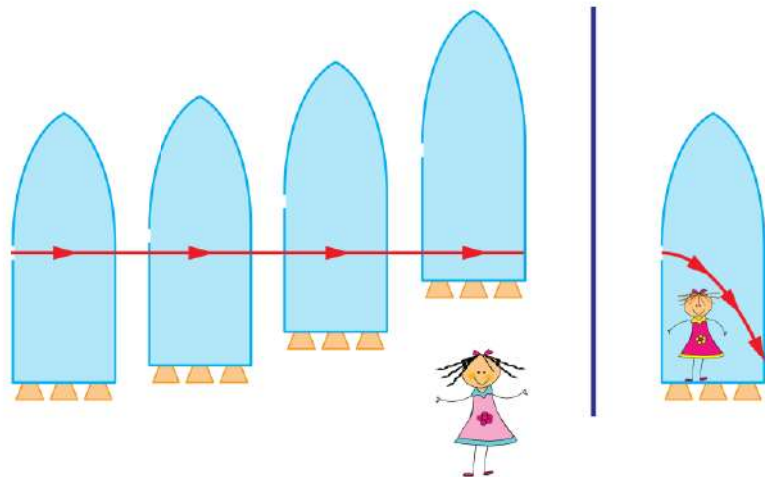
Met dit idee redeneert Einstein verder. Stel Bea bevindt zich in een versnellende raket ver weg van alle hemellichamen. Door een gaatje in de wand gooit Anna, die zich buiten de raket bevindt, een bal, zie figuur 32. Anna ziet dat de bal met een constante snelheid in een rechte lijn beweegt en dat de raket naar boven toe versnelt. Bea ziet dat de bal met een parabolische baan valt.

Voor Bea, die denkt dat ze zich in een zwaartekrachtsveld bevindt, is dit niet bijzonder. Alle horizontaal gegooide ballen vallen immers met een parabolische baan op de vloer. Voor Anna is het ook niet bijzonder, een bal waarop geen kracht werkt blijft met een constante snelheid in een rechte lijn bewegen.



Figuur 32 Links de gebeurtenis volgens Anna. Rechts de gebeurtenis volgens Bea.

In een volgende experiment schijnt Anna met een zaklamp door een raampje van de raket. Net als bij de bal ziet Anna dat het licht met een constant snelheid in een rechte lijn beweegt. Bea ziet dat de lichtstraal met een parabolische baan naar beneden afbuigt. Voor Bea is dit uitzonderlijk, want volgens Newton werkt de zwaartekracht alleen op massa's en licht heeft geen massa. Met de gravitatiewet van Newton is niet te begrijpen dat licht afbuigt.



Figuur 33 Een lichtstraal gedraagt zich net als alle andere voorwerpen. Volgens Anna volgt het licht een rechte lijn. Volgens Bea buigt het licht af vanwege de zwaartekracht.

Einstein weet intussen beter. Het afbuigen van licht door de zwaartekracht is het gevolg van de formule $E = m \cdot c^2$, waarin de energie van het licht een kleine hoeveelheid massa vertegenwoordigt. Zwaartekracht werkt dus niet alleen op massa maar ook op energie. Later verfijnt Einstein zijn verklaring van het afbuigen van licht en ontwikkelt hij de algemene relativiteitstheorie, waarin hij stelt dat niet het licht afbuigt maar dat de ruimte krom is. Het kost hem zeven jaar om de wiskunde die hiervoor nodig is te begrijpen.

Tijdrek door de zwaartekracht

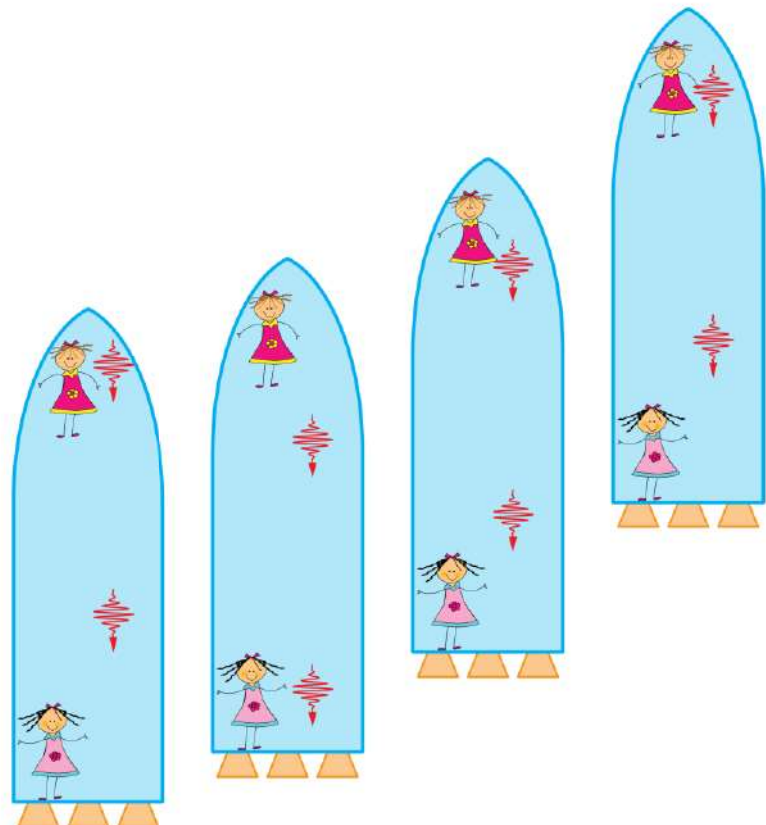
We laten Anna en Bea nog een experiment uitvoeren. Dit keer gaan ze samen op reis in een raket. Ze bevinden zich dus steeds in het hetzelfde referentiestelsel en je zou verwachten dat alle natuurkundige experimenten voor hen op dezelfde manier verlopen. Toch is dit niet zo.

Speciaal voor dit experiment wordt een extra lange raket gebouwd waarin het licht $1 \mu\text{s}$ (10^{-6} s) nodig heeft om van boven naar beneden te gaan. Anna en Bea nemen beiden een nauwkeurige klok mee. Vooraf controleren ze dat hun klokken gelijk lopen. Ze stappen in de raket die met een constante snelheid beweegt in de lege ruimte waar geen zwaartekracht is. Ze doen het volgende experiment. Bea gaat bovenin de raket zitten en Anna onderin. Iedere seconde zendt Bea een lichtpuls uit die $1 \mu\text{s}$ later door Anna wordt opgevangen. Bea zendt de lichtpulsen één seconde na elkaar uit en Anna ontvangt deze lichtpulsen met een tussentijd van precies één seconde.

Omdat de raket naar boven beweegt hoeft de eerste lichtpuls minder afstand af te leggen en komt deze dus eerder dan na $1 \mu\text{s}$ aan bij Anna. Maar omdat de raket een constante snelheid heeft komt de tweede lichtpuls evenveel eerder aan als de eerste lichtpuls. De tijd tussen de lichtpulsen is hierdoor voor Anna en voor Bea precies één seconde.

Maar als de raket versnelt wordt het anders. Zie figuur 34. Als de tweede lichtpuls door Bea wordt uitgezonden heeft de raket een grotere snelheid dan toen de eerste puls werd uitgezonden. De tweede lichtpuls hoeft daarom minder afstand af te leggen dan de eerste en komt dus eerder aan. Anna meet daardoor minder dan één seconde tussentijd tussen puls 1 en puls 2 terwijl voor Bea de tussentijd tussen beide pulsen wel één seconde is. Hetzelfde geldt voor de tijd tussen pulsen 2 en 3, etc. Voor Bea is dit tijdverschil steeds één seconde en voor Anna steeds minder dan één seconde. De klok van Anna loopt daarom langzamer dan die van Bea. Als er voor Bea één minuut is verstreken heeft ze 60 pulsen uitgezonden. Maar als Anna de 60^e puls ontvangt is er op haar klok nog geen minuut verstreken.

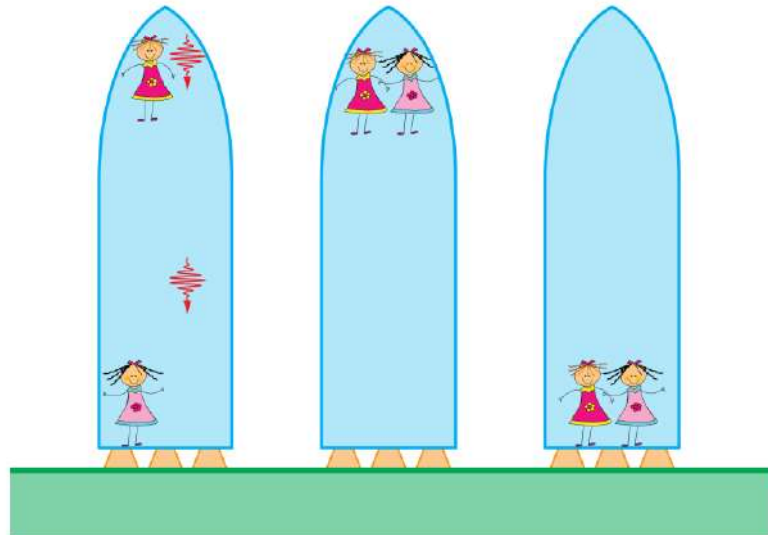
Figuur 34 Bea (boven) zendt lichtpulsen naar Anna (onder). Als de raket versnelt is de tijd tussen twee pulsen voor Anna korter dan voor Bea.



Hoe verloopt dit experiment als het op aarde, onder invloed van de zwaartekracht, wordt uitgevoerd? Volgens Newton heeft de zwaartekracht geen invloed op het verloop van de tijd. Als Bea lichtpulsen uitzendt met een tussentijd van één seconde dan verwacht je dat Anna deze lichtpulsen opvangt met een tussentijd van ook één seconde. Maar het equivalentie principe van Einstein doet een andere voorspelling en stelt dat er geen verschil is tussen de aanwezigheid van zwaartekracht en de aanwezigheid van versnelling. Voor het experiment in de versnellende raket is de uitkomst niet vreemd, maar volgens het equivalentie principe zal het experiment dezelfde uitkomst geven als de raket niet versnelt maar stilstaat op een plaats met zwaartekracht, bijvoorbeeld op het oppervlak van de aarde. En dan is de uitkomst ineens wél vreemd. Want stel dat Anna en Bea op aarde in de raket zitten die nog niet is gelanceerd. Bovenin verstuurt Bea lichtpulsen met tussentijden van één seconde op haar klok. Onder in de raket ontvangt Anna deze lichtpulsen met tussentijden van minder dan één seconde op haar klok. Omdat lichtpulsen onderweg niet ontstaan of verdwijnen moet Anna concluderen dat haar klok langzamer loopt dan de klok van Bea.

Anna kan het niet geloven en denkt dat de zwaartekracht haar klok kapot heeft gemaakt. Ze klimt naar boven om de klokken te vergelijken en ze blijken precies gelijk te lopen. Boven in de raket meet Anna dat de lichtpulsen van Bea een tussentijd hebben van één seconde. Onder in de raket meet ze een tussentijd van minder dan één seconde. Het enige dat ze hoeft te doen om haar tijd langzamer te laten lopen is naar beneden af te dalen. Hetzelfde geldt voor Bea. Bovenin loopt haar klok sneller dan die van Anna, daalt ze naar beneden af dan loopt haar klok gelijk met die van Anna. De sterkte van de zwaartekracht bepaalt hoe snel de klok loopt.

Figuur 35 Als Bea boven is en Anna onder dan loopt Anna's klok langzamer dan die van Bea. Zijn ze op dezelfde hoogte dan lopen de klokken gelijk.



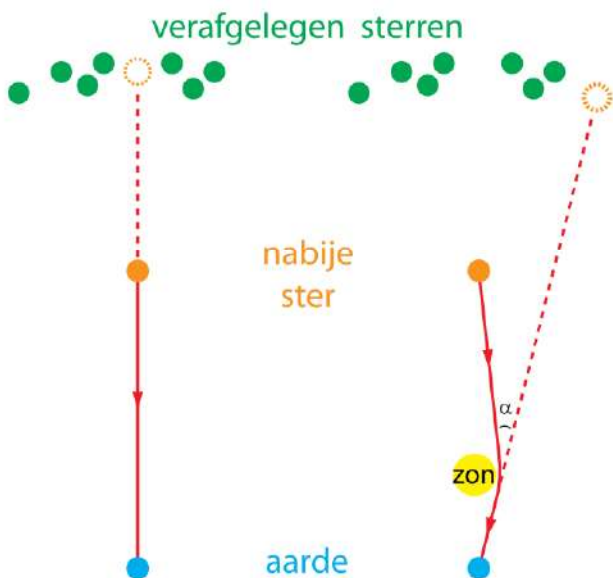
Door de trage massa en de zware massa aan elkaar gelijk te stellen is Einstein op het equivalentie principe gekomen. Door dit inzicht zijn we twee nieuwe eigenschappen van massa op het spoor gekomen:

Massa (zwaartekracht) zorgt ervoor dat licht afbuigt.
Massa (zwaartekracht) zorgt ervoor dat de tijd langzamer loopt.

15.6 Gekromde ruimte

Buiging van licht

Einsteins voorspelling dat licht afbuigt om een grote massa, zoals een ster, is voor het eerst bevestigd tijdens de totale zonsverduistering op 29 mei 1919 door Arthur Eddington (1882 –1944). Om het afbuigen van licht te meten wordt de positie van een nabije ster 's nachts bepaald ten opzichte van sterren op grote afstand. De zon is dan aan de andere kant van de aarde en heeft geen invloed op de meting. In figuur 36 zien we vanaf de aarde dat een nabije ster (oranje) tussen groepjes van verafgelegen sterren (groen) staat. Zie figuur 36, links. Daarna wacht je tot er een totale zonsverduistering is, waarop de maan het licht van de zon tegenhoudt. Opnieuw meet je de positie van de nabije ster, maar omdat het licht van de ster om de zon buigt zie je vanaf de aarde dat de ster is verplaatst. Zie figuur 36, rechts. Figuur 37 is een illustratie, waarbij je ziet dat bij een totale zonsverduistering de twee binnenste sterren naar buiten zijn verplaatst.

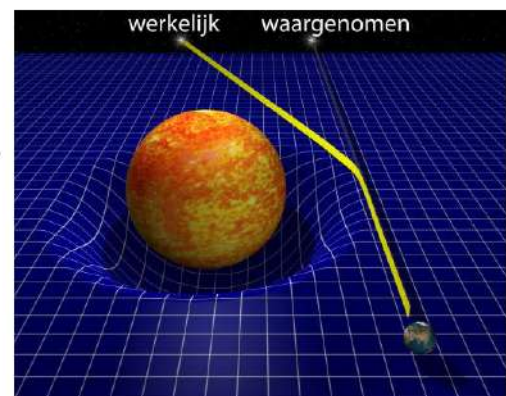


Figuur 36 Afbuiging van licht door de zon.
Links: licht volgt een rechte lijn.
Rechts: licht volgt een kromme lijn.

Einstein voorspelt in 1916 dat de verplaatsing van een nabije ster 1,7 boogseconde is. Een boogseconde is een 3600° van een booggraad. Hoewel dit maar een kleine hoek is kan het worden gemeten. In 1919 is de eerste wereldoorlog voorbij en gaat Eddington op weg. Metingen worden uitgevoerd in Brazilië en Afrika, waar de zonsverduistering totaal is. De door Einstein voorspelde verplaatsing blijkt te kloppen. Hierdoor wordt Einstein op slag wereldberoemd.



Figuur 37 Bij een zonsverduistering zie de sterren die achter de zon staan op een andere plaats.



Figuur 38 Licht volgt de kortste afstand van de ster naar de aarde door de ruimte.

Gekromde ruimte

Het afbuigen van licht betekent niet dat de ruimte recht is en het licht een kromme baan volgt, maar dat de ruimte krom is waarin licht in een rechte lijn beweegt. Een rechte ruimte met een kromme lichtstraal zou immers betekenen dat een voorwerp een kortere route kan nemen dan het licht en daardoor sneller van A naar B kan gaan. Een voorwerp zou dan een lichtpuls kunnen inhalen en dat is volgens de relativiteitstheorie onmogelijk. Licht neemt altijd de korst mogelijke afstand tussen twee punten en volgt in de lege ruimte een rechte lijn. Materie maakt de ruimte krom, zodat de kortste afstand een kromme lijn is.

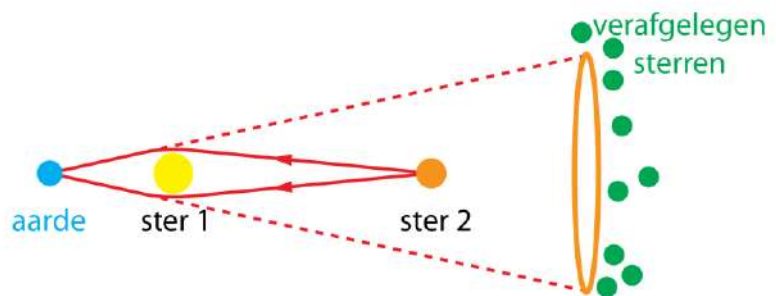
Om dit te begrijpen kunnen we kijken hoe vliegtuigen op aarde van Madrid naar New York vliegen. Beide steden liggen op 40 graden noorderbreedte. In figuur 39 zie je twee routes. Bij de bovenste route leg je 5966 km af. Bij de onderste route leg je 5802 km af. De kortste afstand tussen Madrid en New York is dus een gebogen lijn. Bij een boloppervlak is de kortste verbinding tussen twee punten een cirkelbaan om het middelpunt van de bol.



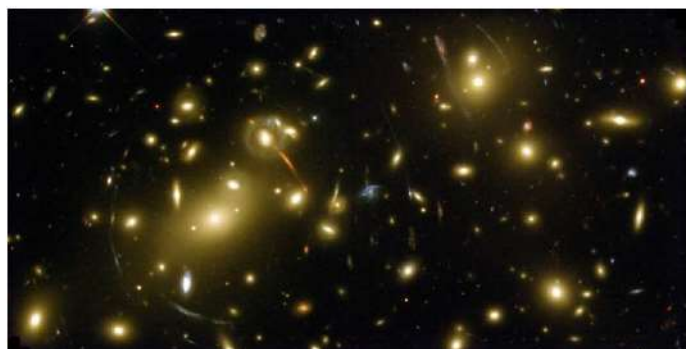
Figuur 39 De bovenste route is langer dan de onderste route.

Het effect van ruimtekromming is duidelijk te merken als je met een telescoop diep in de ruimte kijkt. Zie figuur 40. Ster 2 staat pal achter ster 1. Het licht van ster 2 buigt om ster 1 heen en is vanaf de aarde zichtbaar als een ring van licht. Net als een lens buigt gravitatie het licht af. Je spreekt van een **gravitatielens**. In figuur 41 zie je een foto waarop het effect van gravitatielenzen zichtbaar is.

Figuur 40 Licht van ster 2 buigt om ster 1 heen en is daardoor vanaf de aarde zichtbaar als kring.



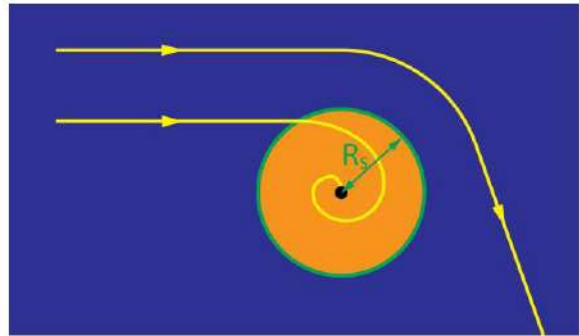
Figuur 41 Gravitatielens. De kringen van licht zijn afkomstig van sterren die achter een nabijgelegen ster staan.



Zwarte gaten

Een zwart gat is een hemellichaam waarbij de ruimte zo sterk is gekromd dat licht er niet uit kan ontsnappen. Een zwart gat ontstaat als een grote ster aan het einde van zijn leven in elkaar stort. Als een enorme stofzuiger trekt een zwart gat materie en licht aan en krijgt daardoor steeds meer massa. Hoe groot een zwart gat is en wat zijn eigenschappen zijn weet niemand, want om een zwart gat bevindt zich een gebied waaruit materie en licht niet kan ontsnappen. De rand van dit gebied noem je de **waarnemingshorizon**.

In figuur 42 is de waarnemingshorizon aangegeven door een groene cirkel. De afstand tussen de waarnemingshorizon en de kern van het zwarte gat is de **schwarzschildstraal**, R_s . Een lichtstraal waarvan de afstand tot de kern van het zwarte gat kleiner is dan de schwarzschildstraal wordt door het zwarte gat opgenomen. Een lichtstraal op grotere afstand wordt afgebogen of komt in een baan om het zwarte gat.



Figuur 42 Om een zwart gat is de ruimte zo sterk gekromd dat ook licht niet kan ontsnappen.

De grootte van de schwarzschildstraal vind je door de ontsnappingssnelheid v_{ontsnap} gelijk te stellen aan de lichtsnelheid. De ontsnappingssnelheid is de snelheid die nodig is om aan de gravitatiekracht van een hemellichaam te ontsnappen. Wordt een projectiel van een afstand r vanaf het middelpunt weggeschoten met een snelheid kleiner dan v_{ontsnap} dan valt het terug of komt het in een ellipsvormige baan. Is de snelheid groter dan v_{ontsnap} dan komt het projectiel los en ontsnapt het aan de gravitatiekracht. Voor de aarde is de ontsnappingssnelheid 11,2 km/s. Voor een zwart gat is de ontsnappingssnelheid groter dan de lichtsnelheid. Een voorwerp in een zwart gat heeft daarom geen mogelijkheid om te ontsnappen, omdat zijn snelheid altijd kleiner is dan de lichtsnelheid.

Voor de ontsnappingssnelheid geldt:

$$v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{r}}$$

- v_{ontsnap} is de ontsnappingssnelheid in meter per seconde (m/s)
- G is de gravitatieconstante: $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- m is de massa van het hemellichaam in kilogram (kg)
- r is de afstand tot het centrum in meter (m)

Op de afstand van de schwarzschildstraal R_s geldt: $v_{\text{ontsnap}} = c$. Hieruit vinden we voor de schwarzschildstraal:

$$R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$$

- R_s is de Schwarzschildstraal in meter (m)
- G is de gravitatieconstante: $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- m is de massa van het hemellichaam in kilogram (kg)
- c is de lichtsnelheid: $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

VOORBEELD de aarde als zwart gat

Bereken de Schwarzschildstraal van het zwarte gat dat ontstaat als de aarde wordt samengeperst tot een punt.

- $m_{\text{aarde}} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- $R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$
- $R_s = \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{(3,0 \cdot 10^8)^2} \rightarrow R_s = 8,86 \cdot 10^{-3} \text{ m} \text{ (8,86 mm)}$

Tijdrek en massa

De aanwezigheid van massa veroorzaakt dat de tijd langzamer loopt. Er ontstaat tijdrek. Tijdrek door de aanwezigheid van massa bereken je met:

$$\frac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

- Δt_{massa} is de tijd die een klok aangeeft bij aanwezigheid van massa (s)
- $\Delta t_{\text{lege ruimte}}$ is de tijd die een klok aangeeft in een ruimte zonder massa (s)
- R_s is de Schwarzschildstraal (m)
- r is de afstand tot het middelpunt van de massa (m)

VOORBEELD tijdrek op de zon

Bereken de tijdrek op de zon.

- $R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$ met $m_{\text{zon}} = 1,9884 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- $R_s = \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9884 \cdot 10^{30}}{(3,0 \cdot 10^8)^2} \rightarrow R_s = 2,949 \cdot 10^3 \text{ m}$
- $\frac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$ met $R_s = 2,949 \cdot 10^3 \text{ m}$ en $r_{\text{zon}} = 6,963 \cdot 10^8 \text{ m}$
- $\frac{\Delta t_{\text{zon}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{2,95 \cdot 10^3}{6,963 \cdot 10^8}} \rightarrow \frac{\Delta t_{\text{zon}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - 4,24 \cdot 10^{-6}} = 0,999995763$
- een jaar op aarde duurt $365,256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31.558.118 \text{ s}$
- op de zon duurt een jaar: $31.557.985 \text{ s}$
- het verschil is 133 seconden $\rightarrow$ per jaar word je op de zon 133 seconden minder oud

VOORBEELD plaatsbepaling met behulp van GPS-satellieten

Om de positie op aarde te bepalen is sinds de jaren '80 van de vorige eeuw het GPS (Global Positioning System) in gebruik. Momenteel bestaat het GPS-systeem uit 32 satellieten. Op ieder moment zijn er vanaf iedere plaats op aarde 9 GPS-satellieten zichtbaar. Omdat een minimum van 4 zichtbare GPS-satellieten vereist is om een positie vast te leggen is het systeem betrouwbaar. Ook als er een paar satellieten uitvallen blijft het GPS-systeem werken.



Figuur 42 GPS-satellieten

De GPS-satellieten staan op een hoogte van ongeveer 20.000 km boven het aardoppervlak en zenden signalen uit met informatie over de tijd waarop het signaal wordt uitgezonden en welke satelliet het signaal uitzendt. Deze signalen reizen met de lichtsnelheid naar de GPS-ontvanger. Uit het tijdstip van ontvangst berekent de ontvanger hoelang het signaal onderweg is geweest. Vermenigvuldigd met de lichtsnelheid geeft dit de afstand tussen de satelliet en de ontvanger. Door dit drie keer te doen met drie verschillende GPS-satellieten kan de plaats op het aardoppervlak worden berekend. Een vierde satelliet wordt gebruikt ter controle.

Bij de toepassing van het GPS-systeem moet rekening worden gehouden met de relativiteitstheorie. De plaatsbepaling heeft een nauwkeurigheid van enkele meters en om dit te bereiken moeten er noodzakelijke correcties worden uitgevoerd in de GPS-ontvanger.

- De satellieten bewegen ten opzichte van de ontvanger, waardoor de satellietklokken langzamer lopen dan die van de ontvanger. De atoomklokken in de satellieten zenden iedere seconde een puls uit met een nauwkeurigheid van 10^{-8} seconde en moeten geregeld worden gesynchroniseerd met de klokken op aarde.
- Satelliet en ontvanger vormen geen inertiaal referentiestelsel. In plaats van de speciale relativiteitstheorie moet de algemene relativiteitstheorie worden gebruikt.
- De satellieten bevinden zich hoog boven het aardoppervlak. De zwaartekracht is daar zwakker dan op aarde, waardoor de klokken van de GPS-satellieten sneller lopen. Met de algemene relativiteitstheorie moet dit in rekening worden gebracht.

15.7 Samenvatting

Grootheden en eenheden

- x plaats in meter (m)
- L lengte in meter (m)
- t tijd in seconde (s)
- v snelheid in meter per seconde (m/s)
- c lichtsnelheid in meter per seconde (m/s)
- m massa in kilogram (kg)
- E energie in joule (J)

Weten

- Het is onmogelijk om vast te stellen of je stilstaat of beweegt met een constante snelheid in een rechte lijn [relativiteitsbeginsel van Galileo Galilei](#)
- Inertiaal referentiestelsels bewegen met een constante snelheid in een rechte lijn ten opzichte van elkaar.
- Als de snelheid veel kleiner is dan de lichtsnelheid kun je met een Galilei-transformatie de plaats volgens waarnemer A uitrekenen als je de plaats volgens waarnemer B weet en deze waarnemers zich in verschillende inertiaal referentiestelsels bevinden.
- De lichtsnelheid is niet relatief maar heeft een absolute waarde die voor iedere waarnemer hetzelfde is. De Galilei-transformatie geldt niet voor licht.
- Postulaat 1: In alle inertiaal referentiestelsels zijn alle natuurwetten gelijk.
- Postulaat 2: De lichtsnelheid in vacuüm is constant en is onafhankelijk van de beweging van de lichtbron en de beweging van de waarnemer.
- Een gebeurtenis is iets dat zich voordoet op één tijdstip en op één plaats.
- Gebeurtenissen die gelijktijdig zijn in een referentiestelsel zijn in het algemeen niet gelijktijdig in een ander referentiestelsel.
- De eigentijd Δt_e is de tijd tussen gebeurtenissen op dezelfde plaats in je eigen referentiestelsel. De uitgerekte tijd Δt_b is de tijd tussen deze gebeurtenissen gezien vanuit een ander referentiestelsel. Δt_b is groter dan Δt_e . Het groter zijn van Δt_b is noem je tijddilatatie of tijddrek.
- De gamma-factor (γ -factor) geeft de verhouding aan tussen Δt_e en Δt_b .

- De eigenafstand Δx_e is de afstand tussen voorwerpen die stilstaan in je eigen referentiestelsel. De gekrompen afstand Δx_b is de afstand tussen deze voorwerpen gezien vanuit een ander referentiestelsel. Δx_b is kleiner dan Δx_e . Het kleiner zijn van Δx_b is noem je lengtekrimp.
- Lengtekrimp gebeurt alleen in de richting van de beweging.
- Het optellen van snelheden is niet toegestaan bij snelheden in de buurt van de lichtsnelheid.
- Bij een ruimte-tijd diagram staat op de verticale as c-t in meter en op de horizontale as de plaats x in meter.
- De grafiek die voor ieder tijdstip de plaats van een voorwerp weergeeft is de wereldlijn van dit voorwerp.
- In een ruimtetijd-diagram is de wereldlijn van een lichtpuls een rechte lijn met een hoek van 45 graden.
- Als op $t=0$ een voorwerp zich op $x=0$ bevindt zijn er gebieden in het ruimtetijd-diagram waar het voorwerp niet kan zijn geweest en waar het niet heen kan gaan omdat de snelheid daarvoor groter moet zijn dan de lichtsnelheid wat onmogelijk is.
- Door twee ruimtetijd diagrammen door elkaar heen te tekenen kun je van een gebeurtenis aflezen wanneer en waar het zich heeft voorgedaan volgens waarnemers in verschillende referentiestelsels.
- De hoek tussen de c-t assen is gelijk aan de hoek tussen de x-assen.
- Als twee gebeurtenissen op de wereldlijn van een voorwerp kunnen liggen is de volgorde in de tijd onafhankelijk van het referentiestelsel en is een causaal verband mogelijk.
- Bij de tweelingparadox is degene waarvan de beweging omkeert bij terugkeer jonger dan degene waarbij dit niet gebeurt.
- Een voorwerp in een ander referentiestelsel heeft meer massa dan hetzelfde voorwerp in je eigen referentiestelsel.
- Massa die stilstaat bevat rustenergie.
Massa die beweegt bevat naast rustenergie ook kinetische energie.
- Equivalentie principe: Je kunt geen onderscheid maken tussen een referentiestelsel dat versnelt en een referentiestelsel waarin zwaartekracht werkt.
- Massa (zwaartekracht) zorgt ervoor dat licht afbuigt.
Massa (zwaartekracht) zorgt ervoor dat de ruimte krom is.

- Massa (zwaartekracht) zorgt ervoor dat de tijd langzamer loopt.
- Licht volgt altijd de kortste afstand tussen twee punten.
- Om een zwart gat bevindt zich een bolvormig gebied waarbinnen alles in het zwarte gat verdwijnt.
- De straal van de deze bol is de Schwarzschildstraal.

Formules

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

γ -factor

$$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$$

tijdrek

$$L_b = \frac{L_e}{\gamma}$$

lengtekrimp

$$v_A = \frac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$$

snelheden optellen

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}$$

hoek tussen tijd-assen en de ruimte-assen

$$m_b = \gamma \cdot m_0$$

relativistische massa

$$E_{\text{rust}} = m_0 \cdot c^2$$

rust energie

$$E_{\text{totaal}} = m_b \cdot c^2$$

totale energie

$$E_{\text{totaal}} = E_{\text{rust}} + E_{\text{kinetisch}}$$

totale energie

$$v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{r}}$$

ontsnappingsnelheid

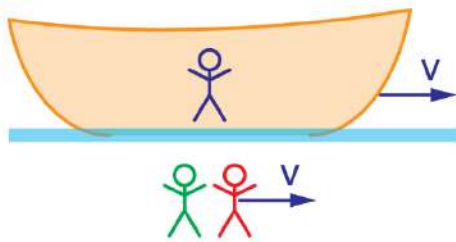
$$R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$$

Schwarzschildstraal

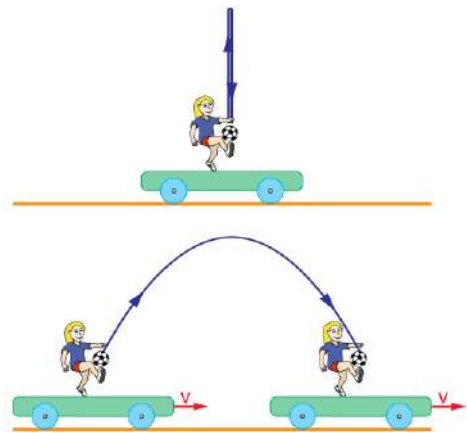
$$\frac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

tijdrek en massa

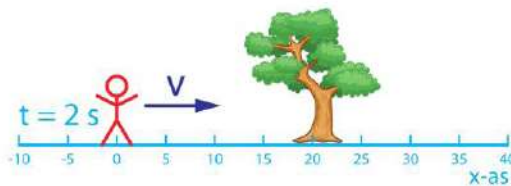
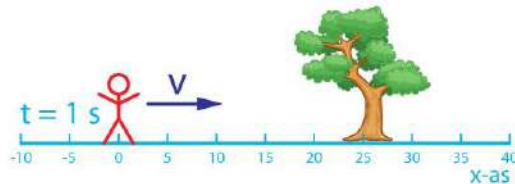
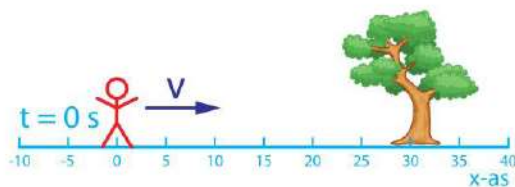
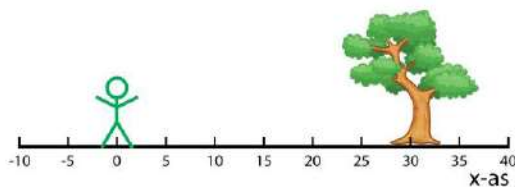
Figuren



Je kunt niet vaststellen of je beweegt met een constante snelheid in een rechte lijn of dat je stilstaat.



Dezelfde gebeurtenis wordt verschillend waargenomen.



Een waarnemer (groen) en een boom bevinden zich in hetzelfde referentiestelsel. Voor de groene waarnemer staat de boom stil.

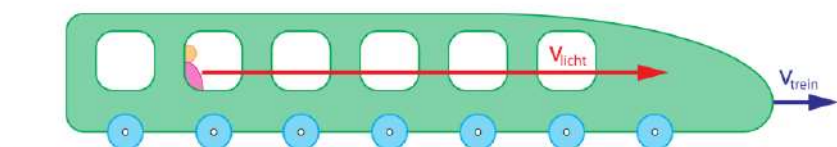
Een andere waarnemer (rood) bevindt zich in een ander referentiestelsel. Voor deze waarnemer beweegt de boom naar haar toe.

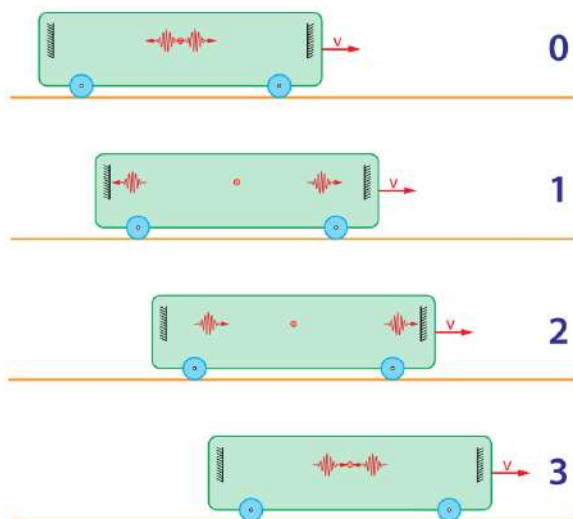
De plaats van de waarnemers is steeds $x = 0$.

Een waarnemer op de grond berekend de snelheid van de conducteur door de snelheid van de trein op te tellen bij de snelheid van de conducteur volgens een waarnemer in de trein.



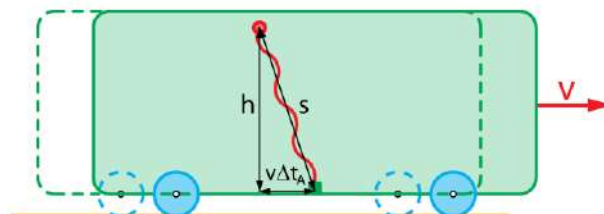
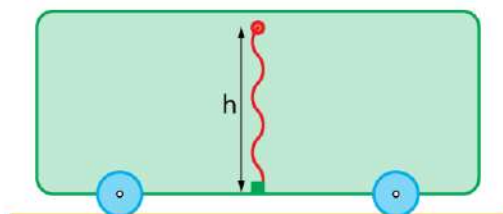
Maar bij licht mag dit niet. De snelheid van licht is voor een waarnemer op de grond gelijk aan die volgens een waarnemer in de trein.



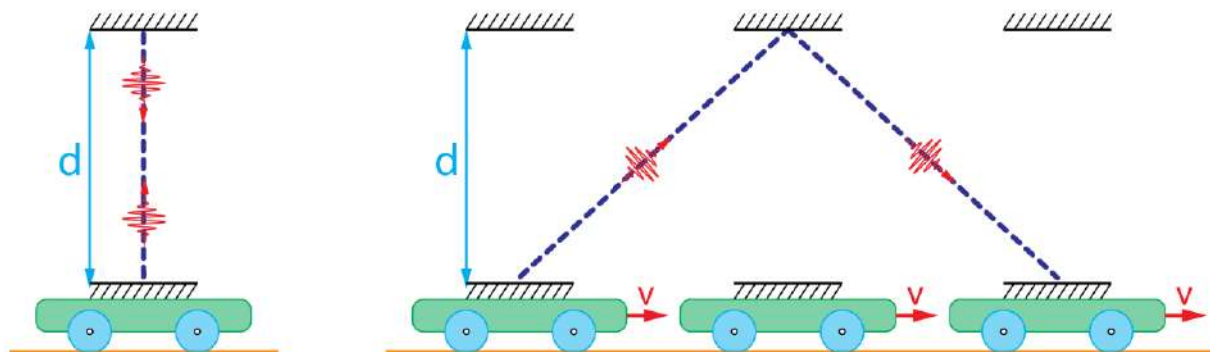


Voor een waarnemer in de trein zijn gebeurtenissen 1 en 2 gelijktijdig.

Voor een waarnemer op de grond is gebeurtenis 1 (lichtpuls bereikt de achterste spiegel) eerder dan gebeurtenis 2 (lichtpuls bereikt de voorste spiegel).

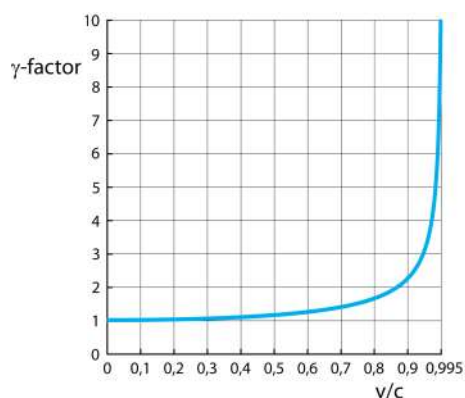


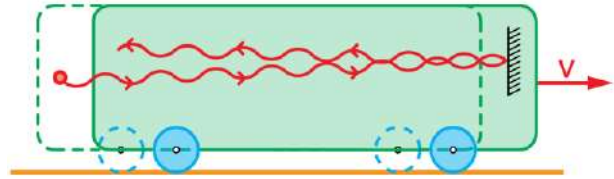
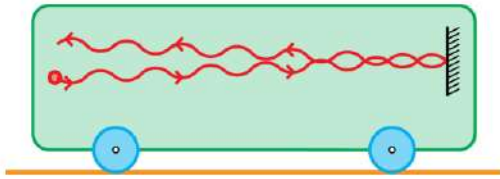
De tijd die het licht nodig heeft om van de lamp naar de vloer te gaan is voor een waarnemer in de trein minder dan voor een waarnemer op de grond.



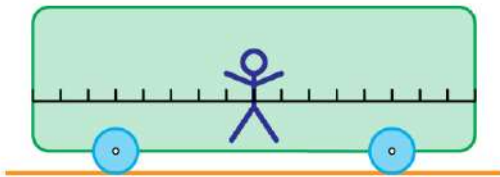
Een bewegende lichtklok zie je langzamer tikken dan als dezelfde klok stilstaat in je eigen referentiestelsel. Het is niet alleen de lichtklok die langzamer tikt maar alle klokken die je ziet bewegen tikken langzamer. En als alles langzamer gaat dan gaat de tijd zelf langzamer. Dit noemje tijddilatatie of tijdrek.

De gamma-factor (γ -factor) is de factor waarmee de tijd vertraagt. Pas bij $v > 0,3 c$ merk je het verschil. Als v de lichtsnelheid nadert wordt de γ -factor oneindig groot.





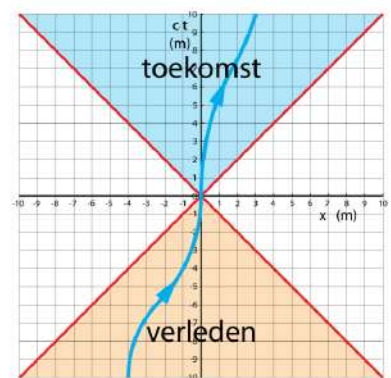
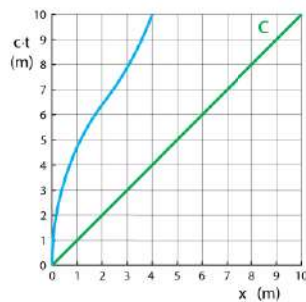
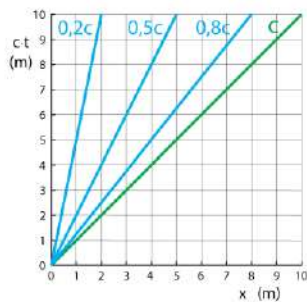
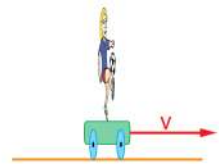
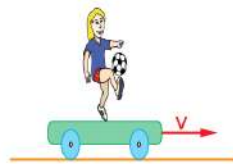
Links meet een waarnemer in een trein hoe lang de trein is door een lichtpuls heen-en-weer laten gaan. Als een waarnemer op de grond hiernaar kijkt meet hij een kleinere lengte dan de waarnemer in de trein. Dit noem je lengtekrimp. De γ -factor geeft aan hoeveel korter de lengte is voor een waarnemer op de grond.



Om de lengte te bepalen moet je gelijktijdig de plaats van de voorkant en van de achterkant meten.



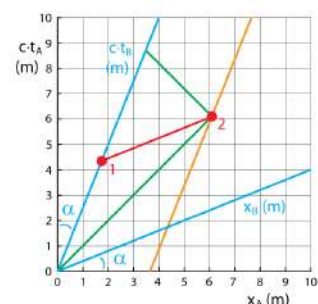
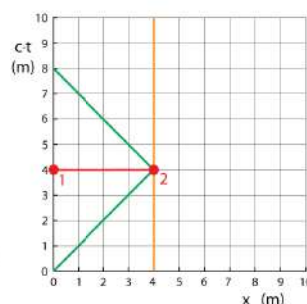
Lengtekrimp gebeurt alleen in de richting van de beweging.

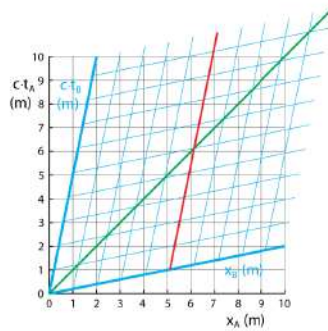
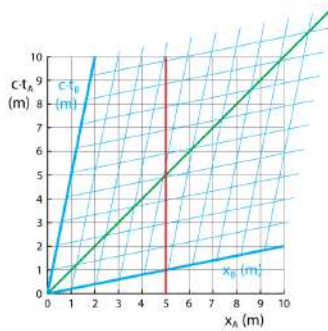


In een ruimtetijd-diagram staat op de verticale as $c \cdot t$ in meter. Om de tijd uit te rekenen deel je $c \cdot t$ door c . Op de horizontale as staat de plaats x in meter. Hierdoor is de grafiek van licht een rechte lijn met een helling van 45 graden.

De wereldlijn van een voorwerp toont voor ieder tijdstip waar het voorwerp is.

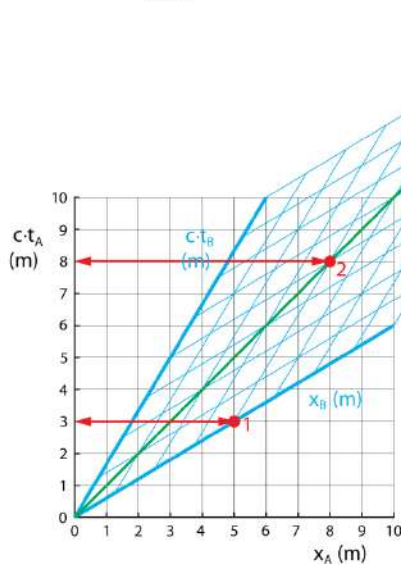
Om de tijd en de plaats af te kunnen lezen voor waarnemers in verschillende referentiestelsels teken je twee ruimtetijd diagrammen door elkaar heen. Het zwarte diagram is voor je eigen referentiestelsel en het blauwe diagram voor een bewegend referentiestelsel. In het blauwe diagram zijn de $c \cdot t$ -as en de x -as ingeklapt met hoek α .



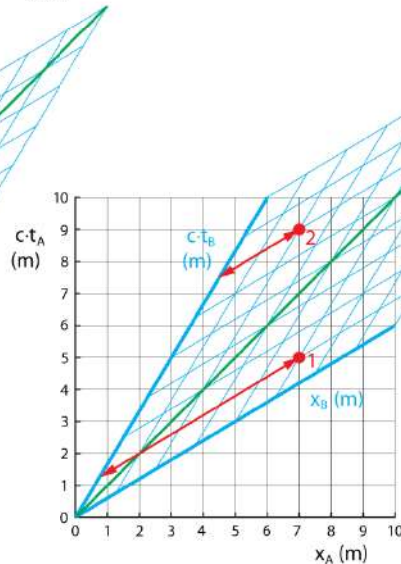


De rode grafiek links is de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in je eigen stelsel.

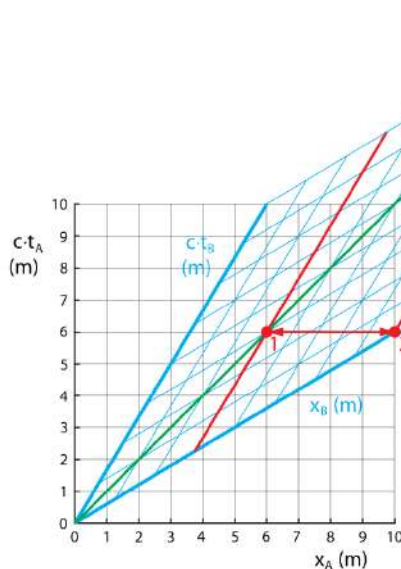
De rode grafiek rechts is de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in het stelsel dat je ziet bewegen.



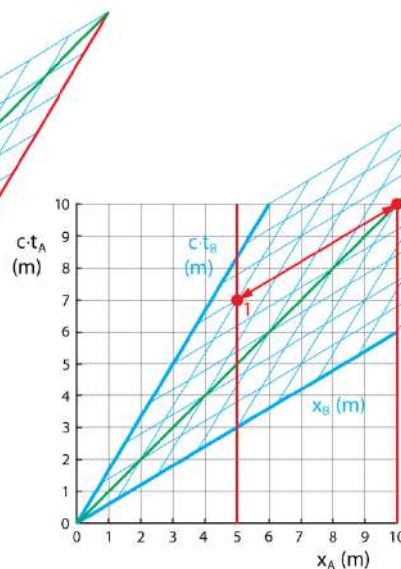
Een klok staat stil in het stelsel van Bea (blauw). De tijd tussen gebeurtenissen 1 en 2 is voor Bea $\Delta t_e = 4 / c$. Een klok in het stelsel van Anna (zwart) geeft meer tijd aan tussen 1 en 2 $\rightarrow \Delta t_b = 5 / c$.



Een klok staat stil in het stelsel van Anna (zwart). De tijd tussen gebeurtenissen 1 en 2 is voor Anna $\Delta t_e = 4 / c$. Een klok in het stelsel van Bea (blauw) geeft meer tijd aan tussen 1 en 2 $\rightarrow \Delta t_b = 5 / c$.

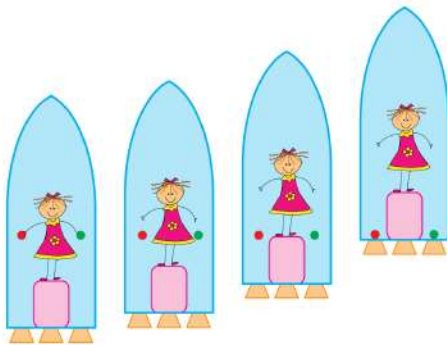
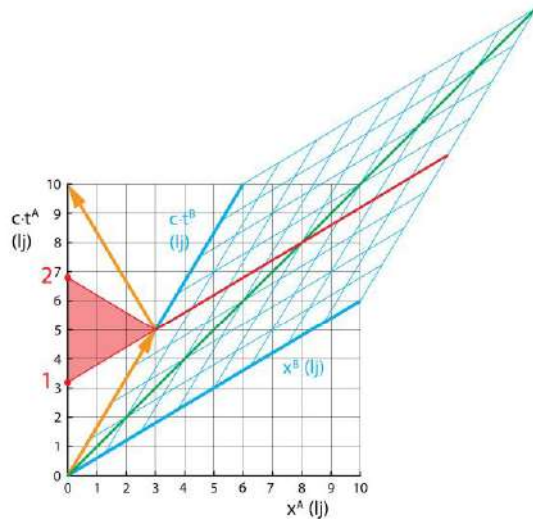


Voorwerpen staan stil in het stelsel van Bea (blauw). De afstand tussen de voorwerpen is voor Bea $\Delta t_e = 5 \text{ m}$. Een gelijktijdige meting in het stelsel van Anna (zwart) geeft minder afstand aan tussen 1 en 2 $\rightarrow \Delta t_b = 4 \text{ m}$.

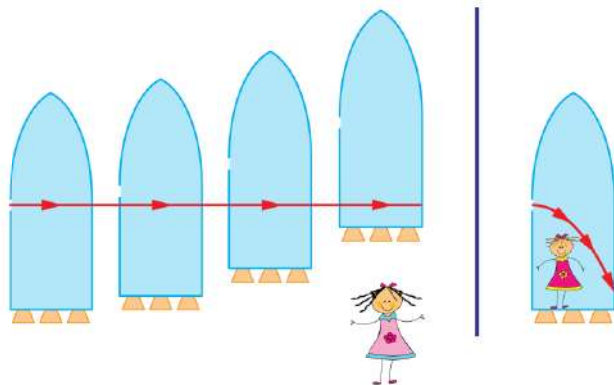


Voorwerpen staan stil in het stelsel van Anna (zwart). De afstand tussen de voorwerpen is voor Anna $\Delta t_e = 5 \text{ m}$. Een gelijktijdige meting in het stelsel van Bea (blauw) geeft minder afstand aan tussen 1 en 2 $\rightarrow \Delta t_b = 4 \text{ m}$.

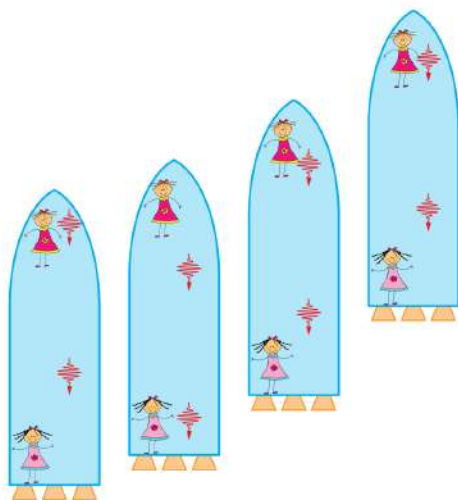
Bij de tweelingparadox is degene die omkeert bij thuiskomst jonger. Tijdens het omkeren verandert de tijd van de reiziger nauwelijks en maakt de thuisblijver een sprong in de tijd.



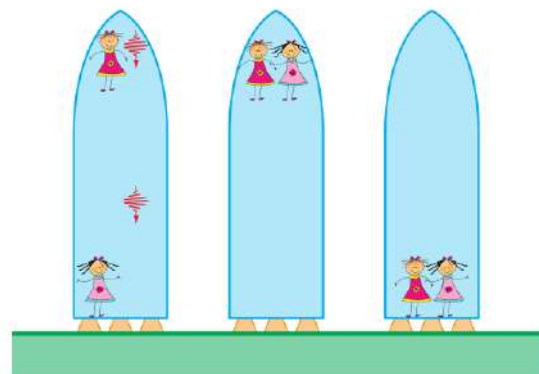
Bea in de raket ziet dat de ballen tegelijk op de grond vallen. Buiten de raket ziet Anna dat de ballen stil hangen en dat de raket versnelt



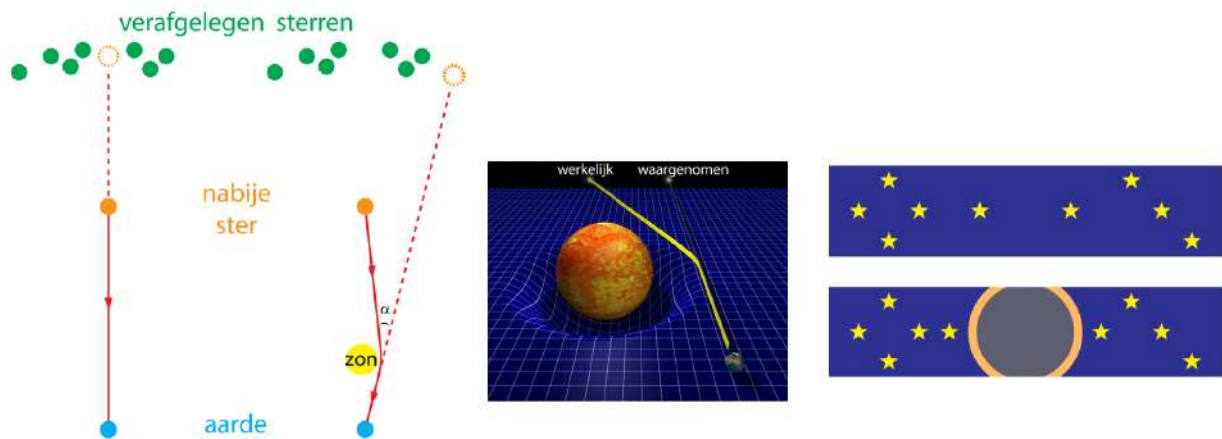
Bea in de raket ziet dat een lichtstraal een kromme baan heeft. Buiten de raket ziet Anna dat licht in een rechte lijn gaat.



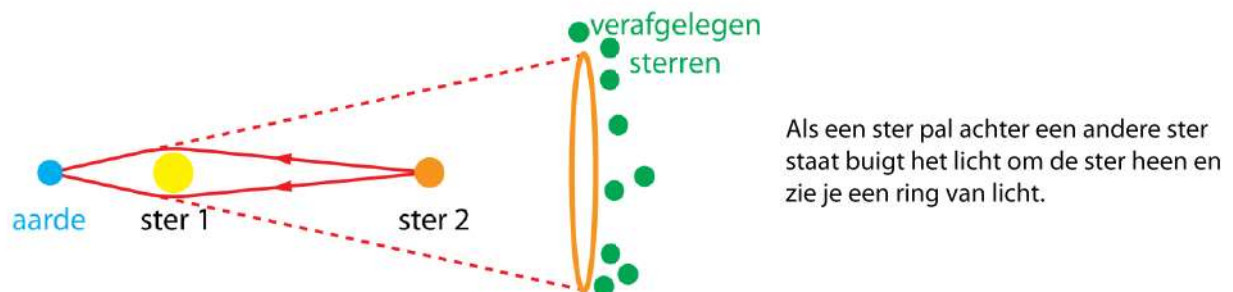
Bea en Anna zitten in een raket die versnelt. Bea zit bovenin en stuurt lichtpulsen naar Anna onderin. Door de versnelling is de tijd tussen de pulsen voor Anna kleiner dan voor Bea. Bij Anna gaat de tijd langzamer dan bij Bea.



Bea en Anna zitten in een raket die stilstaat op een planeet. Bea zit bovenin en stuurt lichtpulsen naar Anna onderin. Door de grotere zwaartekracht is de tijd tussen de pulsen voor Anna kleiner dan voor Bea. Bij Anna gaat de tijd langzamer dan bij Bea.



Tijdens een zonsverduistering zie je dat de plaats van een nabije ster die achter de zon staat verschuift. Dit gebeurt omdat de zwaartekracht van de zon het licht afbuigt. Zwaartekracht werkt als een lens.



Een zwart gat veroorzaakt zoveel kromming van de ruimte dat er een bolvormig gebied om een zwart gat is waarbinnen alles wordt opgeslokt. Ook licht kan niet ontsnappen.

