

18 Modelleren

vwo

18.0 Inhoud

18.1	Natuurkundig model	2
	– Numerieke rekenmethode	2
	– De numerieke rekentaal	3
18.2	Rechtlijnige beweging	5
	– Constante snelheid	5
	– Constante versnelling	6
	– Vrije val (zonder luchtweerstand)	6
	– Vallen met luchtweerstand	7
	– Parachute met snelle ontvouwing	9
	– Parachute met langzame ontvouwing	10
	– Een vuurpijl met constant vermogen	12
	– Stuiterbal	14
18.3	Kromlijnige beweging	16
	– Een projectiel schuin omhoog zonder luchtweerstand	16
	– Een projectiel schuin omhoog met luchtweerstand	17
	– Satellieten	19
18.4	Trillingen	22
	– Harmonische trilling zonder demping	22
	– Harmonische trilling met demping	22
18.5	Radioactief verval	24
	– Verval van een radioactief isotoop	24
	– Moeder en stabiele dochterkernen	25
	– Moeder en instabiele dochterkernen	26

18.1 Natuurkundig model

Numerieke rekenmethode

Met een numerieke rekenmethode kun je de verandering van een grootte berekenen door in kleine stappen het natuurkundige proces te volgen. Wat je hiervoor nodig hebt is de beginsituatie én een rekenvoorschrift om de nieuwe situatie, even later in de tijd, uit te rekenen. Het rekenvoorschrift bevat de natuurkundige formules die je gebruikt. Deze formules zijn een benadering van de werkelijkheid, omdat er altijd invloeden zijn die je moet verwaarlozen. Wil je er meer invloeden bij betrekken, dan heb je een uitgebreider model nodig. Verder is ook de grootte van de tijdstappen belangrijk. Met grote stappen ben je snel klaar, maar is het resultaat minder nauwkeurig. Kleine tijdstappen zijn beter, maar dan heb je wel een snelle computer nodig.

VOORBEELD eenparig rechtlijnige beweging

Bij een eenparig rechtlijnige beweging is een numerieke methode niet nodig, omdat je met een simpele formule de plaats en de snelheid van het voorwerp op ieder moment kunt berekenen. Maar vanwege deze eenvoud is het geschikt als voorbeeld. Stel een voorwerp heeft een constante snelheid van 5,0 m/s. De afstand die dit voorwerp in 10 seconden aflegt wil je berekenen. De bewegingsvergelijking voor een eenparig rechtlijnige beweging is: $x = x_0 + v \cdot t$ en met $x_0 = 0$ vind je $x = 5,0 \cdot 10 = 50$ m. Bij een numerieke methode gaat de berekening als volgt:

- 1 Het tijdsinterval van 10 s wordt ingedeeld in kleine stappen, bijvoorbeeld 1000 stappen van 0,01 s.
- 2 Met het rekenvoorschrift $dx = v \cdot dt$ wordt de verandering van de plaats x na stap dt berekend.
- 3 Bij stapgrootte $dt = 0,01$ s vinden we $dx = 5,0 \cdot dt = 5,0 \cdot 0,01 = 0,05$ m.
- 4 Na de eerste tijdstap is de plaats: $x_1 = x_0 + 0,05 = 0 + 0,05 = 0,05$ m.
- 5 x_1 is de beginplaats voor de volgende stap.
- 6 Na twee tijdstappen: $x_2 = x_1 + v \cdot dt = 0,05 + (5,0 \cdot 0,01) = 0,10$ m.
- 7 Deze berekening kan worden herhaald en na n tijdstappen is de plaats:
 $x_n = x_{n-1} + v \cdot dt$.
- 8 Na 10 s met stapgrootte 0,01 s is de cyclus 1000 keer doorlopen.

In dit voorbeeld zie je dat voor de berekening van stap 1 gebruik wordt gemaakt van de gegevens op $t = 0$. Deze gegevens moeten dus bekend zijn. Voor de berekening van stap 2

maak je gebruik van de uitkomsten van stap 1. Op deze manier ga je verder. Steeds kun je een nieuwe rekenstap maken door de uitkomsten van de vorige stap te gebruiken.

De numerieke rekentaal

Bij een numerieke berekening worden de uitkomsten van veel berekeningen bij elkaar opgeteld en een computer is daarbij nodig. Om de computer te instrueren wat te doen gebruik je een programmeertaal. Het schrijven van een computerprogramma moet nauwkeurig gebeuren, want een computer kan niet begrijpen wat je bedoelt. Het is een machine die uitvoert wat je opschrijft. Maak je een kleine vergissing, zoals het vergeten van één leesteken, dan werkt het programma niet en krijg je een foutmelding.

Er zijn veel programmeertalen waaruit je kunt kiezen. Tegenwoordig werken veel programmeurs met: **Javascript**, **Python** en **C#**. Voor het aansturen van meetinstrumenten en robots wordt vaak **LabView** of **Arduino** gebruikt. Op Nederlandse middelbare scholen wordt veel gewerkt met de programma's **Coach** en **Powersim**. Het programma **Excel** is een spreadsheet-programma, maar kan ook worden gebruikt om eenvoudige natuurkundige problemen op te lossen.

Net als bij gewone talen heeft iedere computertaal zijn eigen grammaticaregels. Deze grammatica moet je goed kennen voordat je begint met programmeren. Ondanks de verschillen in grammatica is de structuur van een computerprogramma meestal goed te begrijpen. Een goed geschreven computerprogramma zit inzichtelijk in elkaar.

Stap 1

Ken aan iedere grootte een symbool toe. Het is verstandig om de letter te kiezen die gebruikt wordt in de natuurkunde. Om de herkenbaarheid te vergroten kun je ook een paar letters gebruiken, maar veel letters is niet handig, omdat je dan veel moet typen waardoor de code onoverzichtelijk wordt.

Stap 2

Leg voor iedere grootte vast welke eenheid je gebruikt. Gebruik altijd de standaard SI eenheden, dus geen cm^2 maar m^2 en geen minuten of uren, maar seconden. Noteer de gebruikte eenheden in het programma, zodat je weet met welke eenheden je de berekeningen uitvoert. Dit commentaar wordt niet gebruikt bij de berekeningen maar dient als geheugensteun voor de programmeur.

Stap 3

Maak aan het begin van het programma een lijstje met de grootheden en variabelen waarvan de waarden bekend zijn of door jou zijn gekozen. Stel dat de beginsnelheid nul is dan staat er zoiets als $v_0 = 0 \text{ m/s}$. Als je dit later wilt veranderen hoef je alleen de 0 te vervangen door een ander getal. Omdat je lijstje aan het begin van het programma staat hoef je niet door het hele programma te zoeken als je een startwaarde wilt veranderen.

Stap 4

Als de berekening ingewikkeld is maak je eerst een **blokschema** waarin je de ingewikkelde opdracht splitst in een aantal deelopdrachten. Een moeilijke opdracht wordt hierdoor de som van eenvoudige deelopdrachten. Deze deelopdrachten worden na elkaar uitgevoerd

en daarna met elkaar gecombineerd. Het blokschema bevat de **strategie** waarmee je het probleem te lijf gaat. Het is van groot belang om voordat je begint de strategie helder voor ogen te hebben. Een blokschema helpt om ervoor te zorgen dat je bij het schrijven het overzicht niet verliest.

Stap 5

Bij het schrijven van het programma volg je nauwgezet het blokschema. Een ingewikkeld programma bestaat uit een aantal kleinere programma's die **procedures** worden genoemd. In een procedure wordt een deelopdracht uitgevoerd. Het voordeel van het werken met procedures is dat als het programma niet goed werkt je iedere procedure afzonderlijk kan testen. Eenvoudige programma's, zoals de voorbeelden in dit hoofdstuk, bestaan uit één procedure. Maar zodra programma's ingewikkelder worden, is het werken met procedures noodzakelijk.

Stap 6

Als het programma klaar is moet je het eerst testen. Dit doe je door een opdracht uit te rekenen waarvan je de uitkomst al weet. Werkt het programma goed dan vind je ongeveer hetzelfde resultaat. Het resultaat van de computerberekening komt nooit exact overeen met het juiste antwoord. Dit heeft verschillende oorzaken.

- Hoewel de computer met nauwkeurige getallen van bijvoorbeeld 16 decimalen werkt wordt bij iedere berekening een afronding gemaakt. Een paar keer afronden is niet zo erg, maar als de computer bijvoorbeeld een miljard keer afrondt wordt het resultaat minder nauwkeurig.
- Bij veel opdrachten wordt de tijd of de afstand opgedeeld in kleine stappen. De grootte van deze stappen moet je van tevoren kiezen. Hoe kleiner de stappen zijn, hoe nauwkeuriger de berekening wordt. Maar met kleine stappen zijn er wel veel berekeningen nodig, waardoor de berekening lang duurt en onnauwkeurig wordt vanwege het vele afronden.

Stap 7

Als het programma steeds het goede antwoord geeft en je tevreden bent over de nauwkeurigheid van het resultaat weet je dat het programma goed werkt en kun je problemen gaan oplossen waarvan je de uitkomst niet weet.

18.2 Rechthijnige beweging

Constance snelheid

Laten we zo eenvoudig mogelijk beginnen met een eenparige rechthijnige beweging. Dat is een beweging in een rechte lijn met een constante snelheid. Stel een voorwerp beweegt met een constante snelheid van 5,0 m/s in een rechte lijn. Het programma waarmee deze beweging kunt uitrekenen heeft maar drie regels, zoals je hieronder kunt zien. Onder het programma leg ik uit hoe het programma werkt.

model		startwaarden in SI eenheden
1	$dx = v \cdot dt$	$v = 5$
2	$x = x + dx$	$x = 0$
3	$t = t + dt$	$t = 0$
		$dt = 0,01$

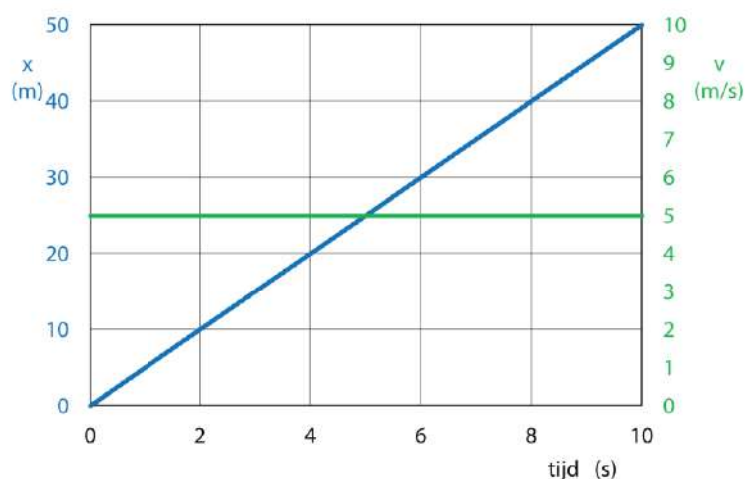
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

$x = 0 \text{ m}$	de plaats waar de beweging begint
$v = 5 \text{ m/s}$	de snelheid aan het begin (verandert niet)
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,01 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 2 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 3 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 1 Constante snelheid. Plaats (blauw) en snelheid (groen) uitgezet tegen te tijd. 1000 tijdstappen.

MERK OP dat in het programma niet is aangegeven wanneer de berekening moet stoppen. Hoe je dit moet programmeren leer je later.

Constate versnelling

We gaan nu kijken naar een eenparig versnelde beweging. Dat is een beweging in een rechte lijn met een constante versnelling. Stel een voorwerp versnelt uit stilstand met een constante versnelling van $2,0 \text{ m/s}^2$. De regels 3, 4 en 5 zijn hetzelfde als bij een constante snelheid. Maar er zijn twee regels toegevoegd. In regel 1 staat hoeveel de snelheid in een tijdstap verandert en in regel 2 staat hoe groot de snelheid is geworden.

model		startwaarden in SI eenheden
1	$dv = a \cdot dt$	$a = 2,0$
2	$v = v + dv$	$v = 0,0$
3	$dx = v \cdot dt$	$x = 0,0$
4	$x = x + dx$	$t = 0,0$
5	$t = t + dt$	$dt = 0,01$

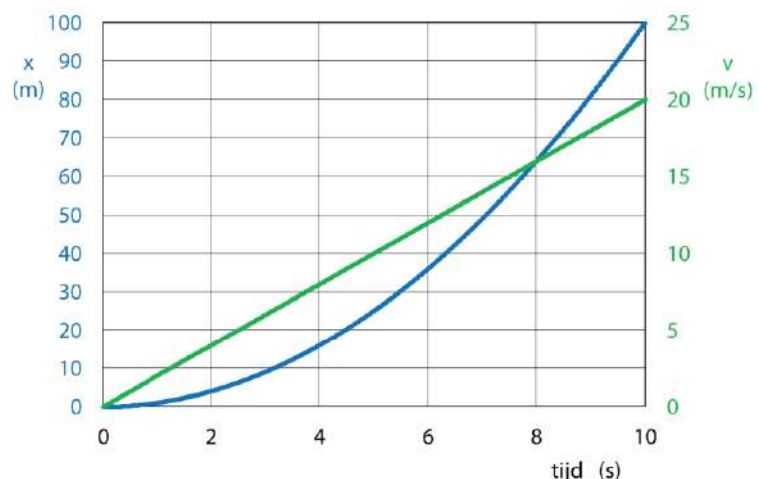
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

$a = 2 \text{ m/s}^2$	de versnelling aan het begin (verandert niet)
$v = 0 \text{ m/s}$	de snelheid aan het begin
$x = 0 \text{ m}$	de plaats waar de beweging begint
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,01 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
- 2 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
- 3 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 4 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 5 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 2 Constate versnelling. Plaats (blauw) en snelheid (groen) uitgezet tegen te tijd. 1000 tijdstappen.

Vrije val (zonder luchtweerstand)

Een voorwerp met een massa van $0,35 \text{ kg}$ valt vanuit stilstand vanaf 100 meter hoogte. Luchtweerstand wordt verwaarloosd. Omdat we later een val mét luchtweerstand gaan berekenen maken gebruiken we $F_{\text{res}} = m \cdot a$ met als F_{res} de zwaartekracht.

model		startwaarden in SI eenheden
1	$F_{\text{res}} = m \cdot g$	$m = 0,35$
2	$a = F_{\text{res}} / m$	$g = -9,81$
3	$dv = a \cdot dt$	$v = 0$
4	$v = v + dv$	$x = 100$
5	$dx = v \cdot dt$	$t = 0$
6	$x = x + dx$	$dt = 0,005$
7	$t = t + dt$	

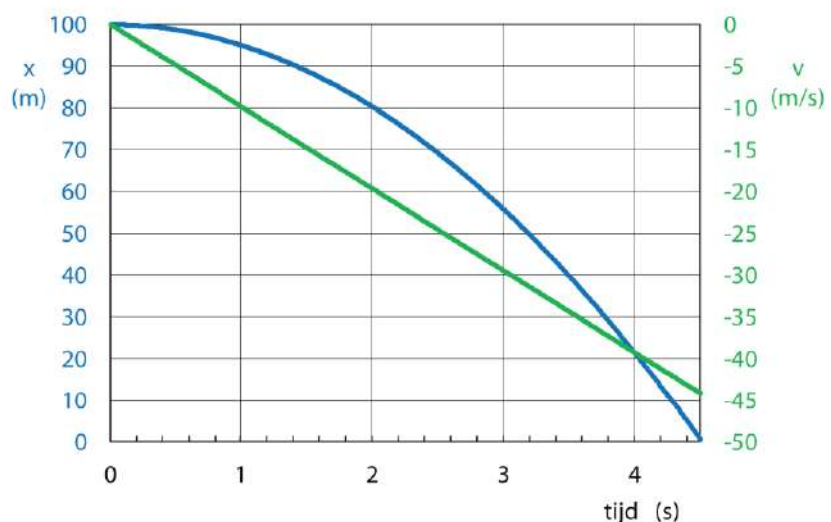
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

$m = 0,35 \text{ kg}$	de massa (bij deze berekening niet nodig)
$g = -9,81 \text{ m/s}^2$	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
$v = 0 \text{ m/s}$	de snelheid aan het begin
$x = 100 \text{ m}$	de plaats waar de beweging begint
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,005 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 de resulterende kracht is gelijk aan de zwaartekracht
- 2 de versnelling volgt uit $F_{\text{res}} = m \cdot a$
- 3 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
- 4 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
- 5 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 6 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 7 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 3 Vrije val. Plaats (blauw) en snelheid (groen) uitgezet tegen te tijd.

Vallen met luchtweerstand

Bij een val mét luchtweerstand neemt de versnelling in de loop van de tijd af. Uiteindelijk wordt de versnelling nul en krijgt het voorwerp een constante snelheid. De luchtweerstand oefent een kracht uit die toeneemt met het kwadraat van de snelheid.

Voor de luchtweerstand geldt: $F_w = k \cdot v^2$ met $k = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$

- c_w is de luchtweerstandscoefficiënt (geen eenheid)
- ρ is de dichtheid van lucht in kg/m^3
- A is de frontale oppervlakte van het voorwerp in m^2
- v is de snelheid van het voorwerp in m/s
- k $k = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$ (de eenheid van k is kg/m)

model		startwaarden in SI eenheden
1	$k = 0,5 \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$	$c_w = 0,5$
2	$F_{\text{res}} = m \cdot g + k \cdot v^2$	$\rho = 1,293$
3	$a = F_{\text{res}} / m$	$A = 10$
4	$dv = a \cdot dt$	$m = 75$
5	$v = v + dv$	$g = -9,81$
6	$dx = v \cdot dt$	$v = 0$
7	$x = x + dx$	$x = 100$
8	$t = t + dt$	$t = 0$
		$dt = 0,01$

TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

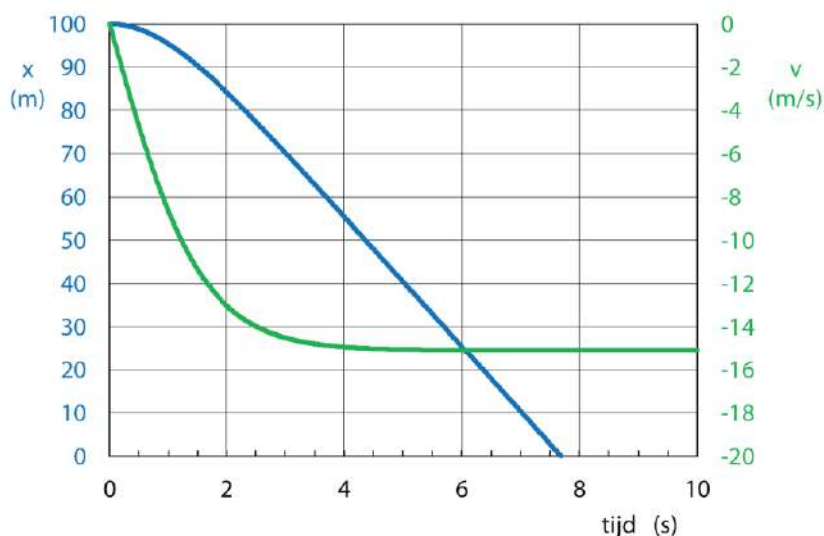
$c_w = 0,5$	de luchtweerstandscoefficiënt brengt de vorm in rekening
$\rho = 1,293 \text{ kg/m}^3$	de dichtheid van lucht bij het aardoppervlak
$A = 10 \text{ m}^2$	de frontale oppervlakte loodrecht op de bewegingsrichting
$m = 75 \text{ kg}$	de massa is bij deze berekening wél nodig
$g = -9,81 \text{ m/s}^2$	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
$v = 0 \text{ m/s}$	de snelheid aan het begin
$x = 100 \text{ m}$	de plaats waar de beweging begint
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,01 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 bereken k
- 2 F_{res} is de zwaartekracht plus de luchtweerstand (F_z heeft minteken en F_w niet)
- 3 de versnelling volgt uit $F_{\text{res}} = m \cdot a$
- 4 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
- 5 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
- 6 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 7 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 8 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd

MERK OP dat de richting ertoe doet. Bij de startwaarden staat $x = 100$ en dat betekent dat we naar boven als positieve richting hebben gekozen. En omdat de zwaartekrachtvector naar beneden wijst moeten we een negatief getal invullen. Met een minteken voor de valversnelling is dit geregeld. De snelheidsvector wijst ook naar beneden en je krijgt daarom negatieve getallen voor de snelheid. En omdat de snelheidsvector naar beneden wijst zal de luchtweerstandskracht naar boven wijzen, en dus positief zijn. Een weerstandskracht werkt immers altijd tegen de snelheid in.

Figuur 4 Val met luchtweerstand.



MERK OP dat uit de berekening volgt dat de snelheid na een tijdje constant wordt, in dit geval -15 m/s . Dat is niet zo gek, want de zwaartekracht is constant maar de luchtweerstand neemt toe als de snelheid groter wordt. Bij een bepaalde snelheid is de weerstandskracht net zo groot als de zwaartekracht en is de resulterende kracht nul. De versnelling is daardoor ook nul en als er geen versnelling is verandert de snelheid niet.

Parachute met snelle ontvouwing

Een parachutist met een massa (inclusief parachute) van 80 kg springt op een hoogte van 2000 meter uit een vliegtuig. Luchtweerstand wordt NIET verwaarloosd. We kiezen $k_{\text{dicht}} = 0,30 \text{ kg/m}$ (parachute is dicht) en $k_{\text{open}} = 30 \text{ kg/m}$ (parachute is open). Op $x = 400 \text{ m}$ gaat de parachute open. De berekening stopt als de grond is bereikt.

Het programma moet een test uitvoeren op de waarde van x :

- als $x > 400$ dan is de parachute dicht en heeft k de waarde k_{dicht}
- als $x < 400$ dan is de parachute open en heeft k de waarde k_{open}

model		startwaarden in SI eenheden
1	Als $x > 400$ Dan $k = k_d$ Anders $k = k_o$ EindAls	$k_d = 0,30$
2	$F_{\text{res}} = m \cdot g + k \cdot v^2$	$k_o = 30$
3	$a = F_{\text{res}} / m$	$m = 80$
4	$dv = a \cdot dt$	$g = -9,81$
5	$v = v + dv$	$v = 0$
6	$dx = v \cdot dt$	$x = 2000$
7	$x = x + dx$	$t = 0$
8	$t = t + dt$	$dt = 0,05$
9	Als $x < 0$ Dan Stop EindAls	

TOELICHTING

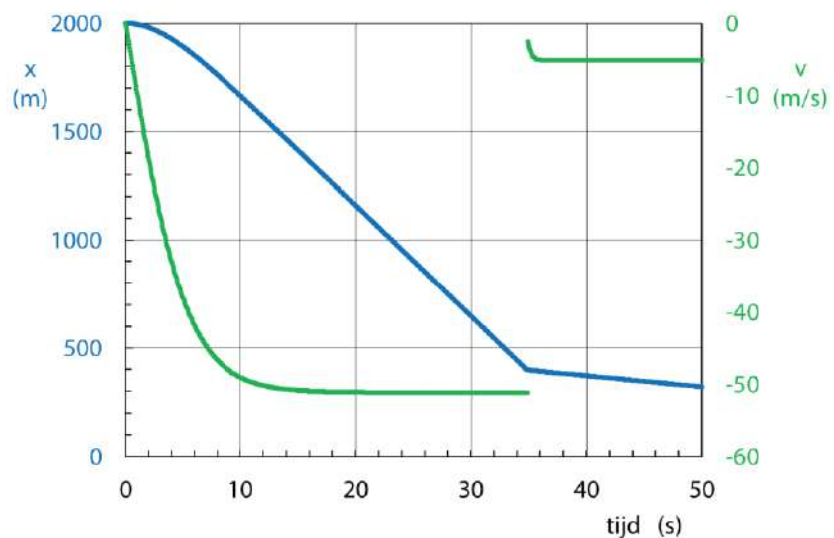
Startwaarden in SI eenheden

$k_d = 0,30 \text{ kg/m}$ de waarde van k als de parachute dicht is
 $k_o = 30 \text{ kg/m}$ de waarde van k als de parachute open is
 $m = 80 \text{ kg}$ de massa
 $g = -9,81 \text{ m/s}^2$ de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht

$v = 0 \text{ m/s}$	de snelheid aan het begin
$x = 2000 \text{ m}$	de plaats waar de beweging begint
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,05 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 keuze tussen k_d of k_o is afhankelijk van de hoogte, $x > 400$ WAAR of NIET WAAR
- 2 F_{res} is de zwaartekracht plus de luchtweerstand (F_z heeft minteken en F_w niet)
- 3 de versnelling volgt uit $F_{\text{res}} = m \cdot a$
- 4 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
- 5 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
- 6 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 7 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 8 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 9 de berekening stopt als $x < 0$



Figuur 5 Parachute met snelle ontvouwing.

Parachute met langzame ontvouwing

Zoals je in het (v, t) -diagram van de vorige berekening ziet verandert de snelheid op één tijdstip ($t = 35 \text{ s}$) van een grote naar een kleine waarde. De versnelling is enorm en de kracht op de parachutist dus ook. Dat overleeft hij niet en de parachute moet dus wat rustiger ontvouwen. Laten we dat eens gaan programmeren. We nemen dezelfde parachutist van 80 kg die op 2000 m uit een vliegtuig springt. Opnieuw kiezen we $k_{\text{dicht}} = 0,30 \text{ kg/m}$ (parachute is dicht) en $k_{\text{open}} = 30 \text{ kg/m}$ (parachute is open). Maar we passen het programma aan zodat het opengaan van de parachute over 200 meter wordt uitgesmeerd. Op 600 m begint de parachute te openen en op 400 m is hij volledig open. Tussen 600 m en 400 m is k lineair afhankelijk van de hoogte.

Het programma moet een test uitvoeren op de waarde van x :

- als $x > 600$ dan is de parachute dicht en heeft k de waarde k_{dicht}
- als $x < 400$ dan is de parachute open en heeft k de waarde k_{open}
- tussen $x = 600$ en $x = 400$ moet k worden berekend met

$$k = \left(\frac{k_{\text{open}} - k_{\text{dicht}}}{600 - 400} \right) (600 - x) + k_{\text{dicht}}$$

model		startwaarden in SI eenheden
1	Als $x > 600$ Dan $k = k_d$ EindAls	$k_d = 0,30$
2	Als $x < 400$ Dan $k = k_o$ EindAls	$k_o = 30$
3	Als $(x < 600)$ En $(x > 400)$ Dan $k = \{(k_o - k_d) / (600 - 400)\} * (600 - x) + k_d$ EindAls	$m = 80$
4	$F_{res} = m * g + k * v^2$	$g = -9,81$
5	$a = F_{res} / m$	$v = 0$
6	$dv = a * dt$	$x = 2000$
7	$v = v + dv$	$t = 0$
8	$dx = v * dt$	$dt = 0,1$
9	$x = x + dx$	
10	$t = t + dt$	
11	Als $x < 0$ Dan Stop EindAls	

TOELICHTING

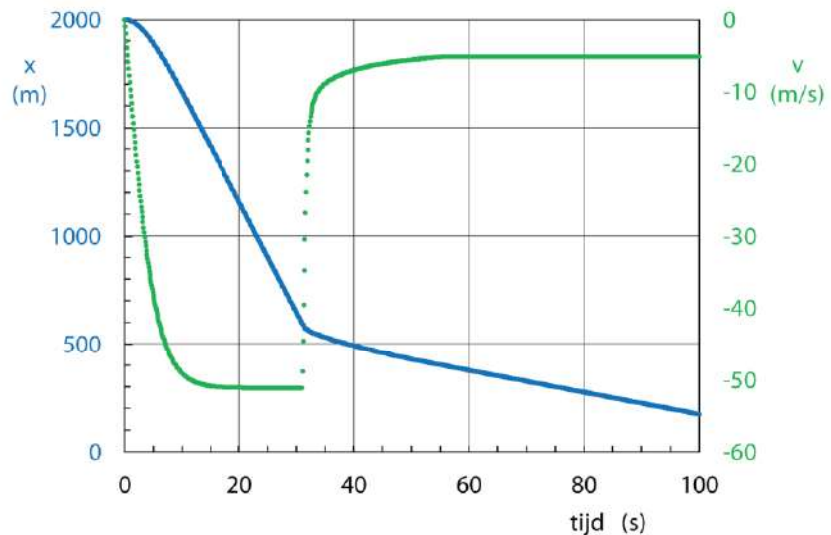
Startwaarden in SI eenheden

$k_d = 0,30 \text{ kg/m}$	de waarde van k als de parachute dicht is
$k_o = 30 \text{ kg/m}$	de waarde van k als de parachute open is
$m = 80 \text{ kg}$	de massa
$g = -9,81 \text{ m/s}^2$	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
$v = 0 \text{ m/s}$	de snelheid aan het begin
$x = 2000 \text{ m}$	de plaats waar de beweging begint
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,05 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 keuze voor k_d als $x > 600$ is WAAR
- 2 keuze voor k_o als $x < 400$ is WAAR
- 3 als de waarde van x tussen 400 en 600 meter is wordt k berekend
- 4 F_{res} is de zwaartekracht plus de luchtweerstand (F_z heeft minteken en F_w niet)
- 5 de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
- 6 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
- 7 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
- 8 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 9 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 10 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 11 de berekening stopt als $x < 0$

MERK OP dat het langzame ontvouwen in regel 3 is geprogrammeerd. Laten we daar nog eens goed naar kijken. Er staat $k = \{(k_o - k_d) / (600 - 400)\} * (600 - x) + k_d$. In het groene deel bereken je de toename van k per meter. Dit vermenigvuldigt je met het aantal gedaalde meters gerekend vanaf 600 m, aangegeven in oranje. We hebben nu de verandering van k berekend en als we hier k_d bij optellen krijgen we de grootte van k op hoogte x .



Figuur 6 Parachute met langzame ontvouwing.

Een vuurpijl met constant vermogen

Laten we nu eens kijken naar iets heel anders. We gaan een vuurpijl verticaal omhoog afschieten, maar het kan ook een raket zijn, want daarvoor geldt hetzelfde. De vuurpijl weegt in totaal 300 gram en bevat in het begin 100 gram kruit. Per seconde wordt 40 gram kruit verbrand, waardoor het voortstuwend vermogen 100 watt is. De vuurpijl heeft een luchtweerstandscoefficiënt van 0,5 en een frontaal oppervlakte van 10 cm². Voor de luchtweerstand geldt: $F_w = k \cdot v^2$ met $k = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$. De stuwkracht volgt uit $F_{\text{stuw}} = P / v$. We moeten opletten niet door nul te delen, want dan krijg je onmiddellijk een foutmelding. Vandaar dat we een kleine beginsnelheid kiezen, bijvoorbeeld $v = 1$ m/s. Als je een andere waarde voor v kiest, bijvoorbeeld $v = 2$ m/s heeft dat nauwelijks invloed op de berekening.

model		startwaarden in SI eenheden
1	Als $mk > 0$ Dan $mk = mk - dmk \cdot dt$ Anders $mk = 0$ EindAls	$m_l = 0,2$
2	Als $mk > 0$ Dan $F_{\text{stuw}} = P/v$ Anders $F_{\text{stuw}} = 0$ EindAls	$mk = 0,1$
3	$k = 0,5 \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$	$dmk = 0,04$
4	Als $v > 0$ Dan $F_{\text{res}} = (m_l + mk) \cdot g - k \cdot v^2 + F_{\text{stuw}}$ Anders $F_{\text{res}} = (m_l + mk) \cdot g + k \cdot v^2 + F_{\text{stuw}}$ EindAls	$P = 100$
5	$a = F_{\text{res}} / (m_l + mk)$	$c_w = 0,5$
6	$dv = a \cdot dt$	$\rho = 1,293$
7	$v = v + dv$	$A = 0,001$
8	$dx = v \cdot dt$	$g = -9,81$
9	$x = x + dx$	$v = 1$
10	$t = t + dt$	$x = 0$
11	Als $x < 0$ Dan Stop EindAls	$t = 0$
		$dt = 0,01$

TOELICHTING

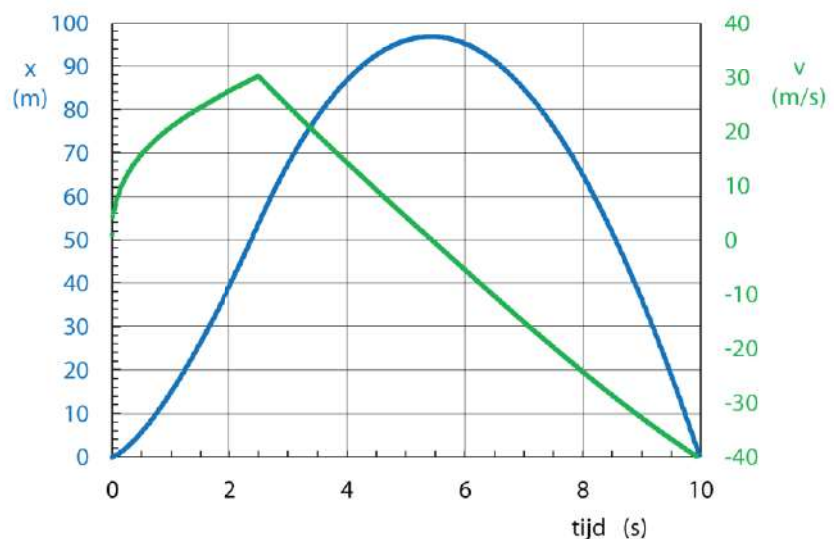
Startwaarden in SI eenheden

$m_l = 0,2$ kg	de massa van de vuurpijl zonder kruit
$mk = 0,1$ kg	de massa van het kruit aan het begin
$dmk = 0,04$ kg	de massa van het kruit dat per seconde wordt verbruikt
$P = 100$ W	het vermogen zolang er kruit is
$c_w = 0,5$	de luchtweerstandscoefficiënt

$\rho = 1,293 \text{ kg/m}^3$	de dichtheid van lucht bij het aardoppervlak
$A = 0,001 \text{ m}^2$	het frontale oppervlakte
$g = -9,81 \text{ m/s}^2$	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
$v = 1 \text{ m/s}$	de beginsnelheid niet nul vanwege $F_{\text{stuw}} = P/v$
$x = 0 \text{ m}$	de plaats waar de beweging begint
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,01 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 de massa van het kruit wordt berekend en mag niet kleiner zijn dan nul
- 2 zolang er kruit is is er stuwvermogen
- 3 k van de luchtwrijving wordt berekend
- 4 als $v > 0$ (beweging omhoog) is F_w omlaag gericht en als $v < 0$ (beweging omlaag) is F_w omhoog gericht Het teken van F_w is altijd tegengesteld aan het teken van v .
- 5 de versnelling volgt uit $F_{\text{res}} = m \cdot a$
- 6 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
- 7 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
- 8 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 9 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 10 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 11 de berekening stopt als $x < 0$



Figuur 7 Vuurpijl met constant vermogen.

MERK OP dat we in dit model aannemen dat bij het verbranden van het kruid een constant stuwvermogen ontstaat. Het is maar de vraag of dat waar is. Misschien is er een constante kracht in plaats van een constant vermogen. En dat maakt veel uit, want bij een constant vermogen wordt de stuwkracht steeds kleiner als de snelheid toeneemt. Toch is een constant vermogen geen slecht idee, want er wordt een bepaalde hoeveelheid kruid per seconde verbrand en er komt dus per seconde een hoeveelheid energie beschikbaar die aan de vuurpijl kan worden meegegeven.

Stuiterbal

We kunnen ook een model maken voor een beweging waarbij de richting steeds omkeert. Dat gebeurt bij een stuiterbal die je vanaf een hoogte loslaat en op de vloer terug stuitert. Als er geen energieverlies is zal de bal weer even hoog komen als vanwaar hij is gevallen. Maar dat gebeurt nooit, want er is altijd een beetje energieverlies. Bij de stuit wordt het rubber vervormt en daarbij ontstaat warmte. De warmte-energie is niet meer beschikbaar voor de beweging van de bal en vandaar dat de hoogte na iedere stuit afneemt. Hiervan gaan we een model maken, waarin we de luchtweerstand verwaarlozen.

model		startwaarden in SI eenheden
1	$E_h = m \cdot 9,81 \cdot h$	$f = 0,8$
2	$E_k = 0,5 \cdot m \cdot v^2$	$m = 0,020$
3	Als $x < 0$ Dan $v = (2 \cdot f \cdot E_k / m)^{0,5}$ EindAls	$a = -9,81$
4	$dv = a \cdot dt$	$v = 0$
5	$v = v + dv$	$x = 5$
6	$dx = v \cdot dt$	$t = 0$
7	$x = x + dx$	$dt = 0,001$
8	$t = t + dt$	
9	Als $t > 10$ Dan Stop EindAls	

TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

$f = 0,8$	factor waarmee de energie bij een stuit afneemt
$m = 0,020 \text{ kg}$	de massa van de stuiterbal
$a = -9,81 \text{ m/s}^2$	de valversnelling
$v = 0 \text{ m/s}$	de snelheid waarmee de bal wordt losgelaten
$x = 5 \text{ m}$	de hoogte waarop de bal wordt losgelaten
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,001 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

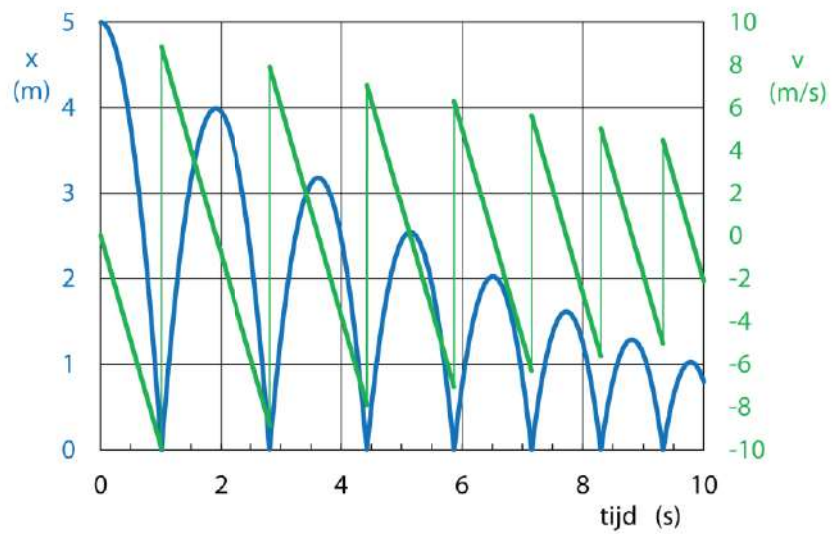
Model

- 1 de zwaarte energie wordt uitgerekend
- 2 de kinetische energie wordt uitgerekend
- 3 Bij een stuit wordt E_k verminderd tot $f \cdot E_k$
- 4 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
- 5 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
- 6 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 7 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 8 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 9 de berekening stopt na 10 seconden

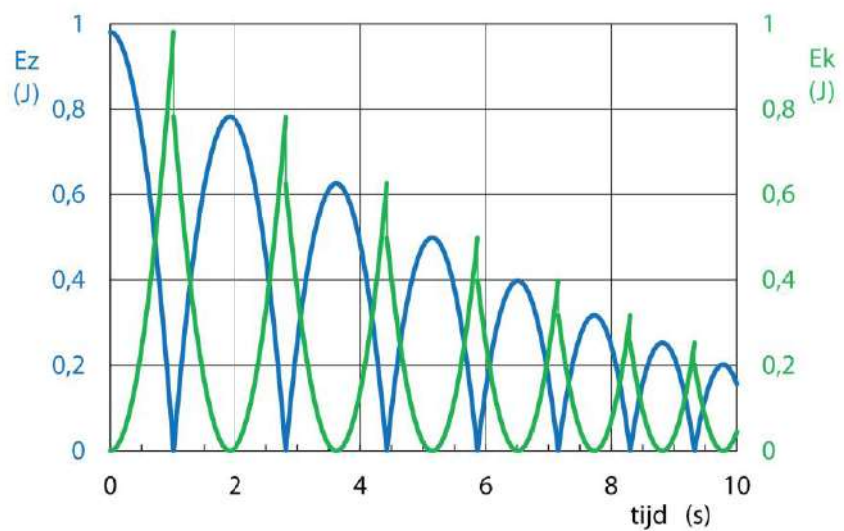
MERK OP dat in regel 3 zowel het omhoog stuiten van de bal als het energieverlies wordt geprogrammeerd. Dit gebeurt met behulp van de kinetische energie die in regel 2 wordt uitgerekend. Als de bal naar beneden beweegt is zijn snelheid negatief en bij $x = 0$ raakt de bal de grond. De kinetische energie is op dat moment $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. Dit vermenigvuldigen we met factor $f < 1$ zodat na de stuit niet alle energie meer beschikbaar is. Na de stuit hebben we $f \cdot E_k$ over en de snelheid die hierbij hoort is $f \cdot E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ waaruit volgt $v =$

$(2 \cdot f \cdot E_k / m)^{0,5}$. Deze snelheid is positief, want de wortel van een getal is altijd positief. De bal gaat na de stuit omhoog bewegen, precies wat we willen.

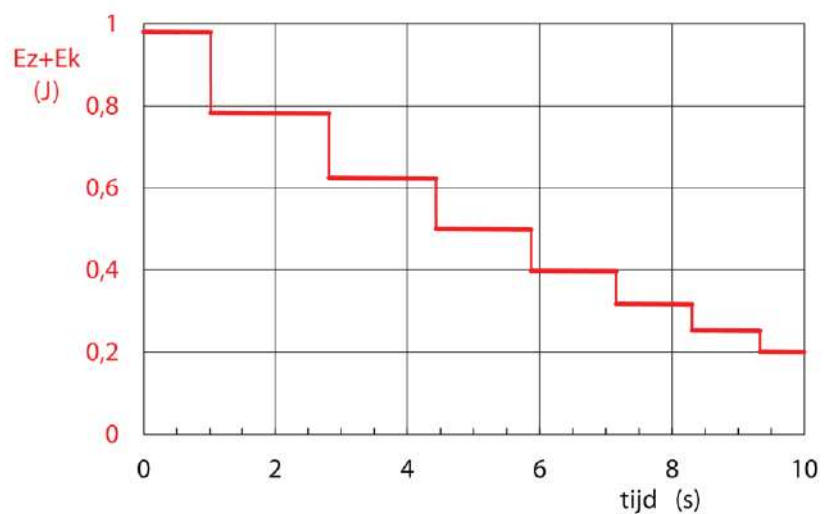
Figuur 8 Stuiterbal plaats en snelheid.



Figuur 9 Stuiterbal zwaarte energie en kinetische energie.



Figuur 10 Stuiterbal totale energie ($E_z + E_k$).



18.3 Kromlijnige beweging

Een projectiel schuin omhoog zonder luchtweerstand

De bewegingen die we tot nu toe hebben gemodelleerd zijn rechtlijnig. We hebben dan maar één coördinaat nodig die de plaats aangeeft. Maar we leven in een drie dimensionale ruimte en een beweging kan dus ook in twee of drie richtingen plaatsvinden. Laten we eens kijken naar bewegingen in een plat vlak, waarbij we de horizontale coördinaat aangegeven met x en de verticale coördinaat met y .

We schieten een projectiel schuin omhoog waarbij we de luchtweerstand verwaarlozen. Omdat er geen wrijving is werkt alleen de zwaartekracht verticaal omlaag. Horizontaal werkt er geen kracht. Dit geeft een combinatie van een horizontale beweging met een constante snelheid en een verticale beweging met een constante versnelling.

model		startwaarden in SI eenheden
	"beweging in de x-richting"	$m = 2$
1	$dx = vx \cdot dt$	$g = -9,81$
2	$x = x + dx$	hoek = 30
	"beweging in de y-richting"	$v_0 = 300$
3	$F_{resY} = m \cdot g$	$vx = v_0 \cdot \cos(\text{hoek})$
4	$ay = F_{resY} / m$	$vy = v_0 \cdot \sin(\text{hoek})$
5	$dvy = ay \cdot dt$	$x = 0$
6	$vy = vy + dvy$	$y = 0$
7	$dy = vy \cdot dt$	$t = 0$
8	$y = y + dy$	$dt = 0,01$
9	$t = t + dt$	
10	Als $y < 0$ Dan Stop EindAls	

TOELICHTING

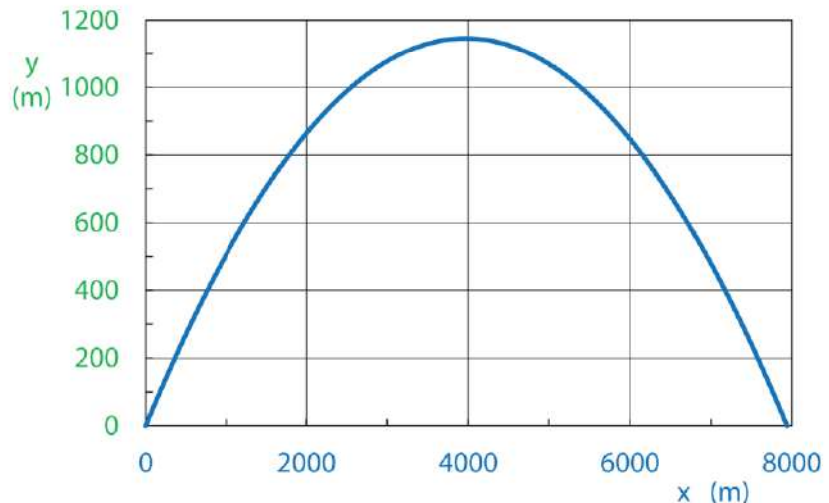
Startwaarden in SI eenheden

$m = 2 \text{ kg}$	de massa
$g = -9,81 \text{ m/s}^2$	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
hoek = 30	de hoek waarmee het projectiel wordt weggeschoten in graden
$v_0 = 300 \text{ m/s}$	de beginsnelheid
$vx = v_0 \cdot \cos(\text{hoek})$	de beginsnelheid in de x-richting
$vy = v_0 \cdot \sin(\text{hoek})$	de beginsnelheid in de y-richting
$x = 0$	de beginplaats in de x-richting
$y = 0$	de beginplaats in de y-richting
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,01 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 **x-richting** | de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 2 **x-richting** | nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 3 **y-richting** | F_{res} in de y-richting (F_{resY}) is de zwaartekracht

- 4 **y-richting** | de versnelling volgt uit $F_{\text{res}} = m \cdot a$
- 5 **y-richting** | de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
- 6 **y-richting** | nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
- 7 **y-richting** | de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
- 8 **y-richting** | nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
- 9 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 10 de berekening stopt als $y < 0$



Figuur 11 Projectiel zonder luchtweerstand. (y, x)-diagram

Een projectiel schuin omhoog met luchtweerstand

Nu hetzelfde maar met luchtweerstand. In de x-richting werkt alleen de wrijvingskracht. In de y-richting werkt de zwaartekracht plus de wrijvingskracht. De wrijvingskracht bereken je met $F_w = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$ met $v^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Net als in het vorige voorbeeld gaan we de beweging in de horizontale en in de verticale richting onafhankelijk van elkaar berekenen. Hiervoor moeten we voor ieder tijdstip de horizontale en verticale component van de wrijvingskracht berekenen. Dat gaat als volgt.

De wrijvingskracht is op ieder tijdstip tegengesteld gericht aan de snelheid en de richting van de snelheid is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan. Zie figuur 12.

Er geldt:

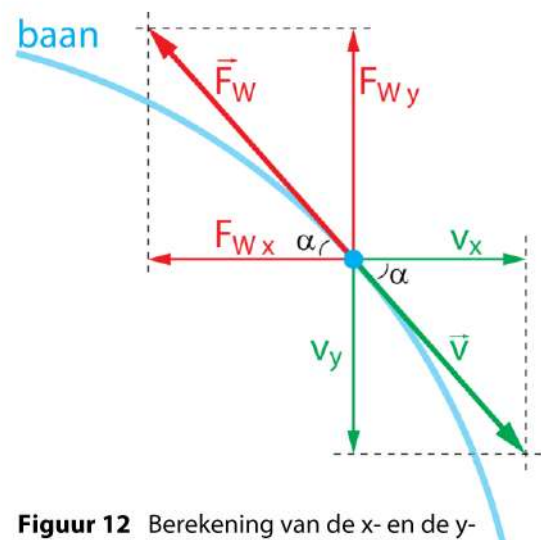
$$F_{wx} = F_w \cdot \cos \alpha \quad \text{en} \quad F_{wy} = F_w \cdot \sin \alpha$$

Verder geldt:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} \quad \text{en} \quad \sin \alpha = \frac{v_y}{v}$$

Hieruit volgt:

$$F_{wx} = F_w \cdot \frac{v_x}{v} \quad \text{en} \quad F_{wy} = F_w \cdot \frac{v_y}{v}$$



Figuur 12 Berekening van de x- en de y-component van de wrijvingskracht.

model		startwaarden in SI eenheden
1	$v = (v_x^2 + v_y^2)^{0,5}$	$c_w = 1,0$
2	$F_w = 0,5 * c_w * \rho * A * v^2$	$\rho = 1,293$
	"beweging in de x-richting"	$A = 0,005$
3	$F_{wx} = F_w * (v_x / v)$	$m = 2$
4	$F_{resX} = -F_{wx}$	$g = -9,81$
5	$a_x = F_{resX} / m$	hoek = 30
6	$dv_x = a_x * dt$	$v_0 = 300$
7	$v_x = v_x + dv_x$	$v_x = v_0 * \cos(\text{hoek})$
8	$dx = v_x * dt$	$v_y = v_0 * \sin(\text{hoek})$
9	$x = x + dx$	$x = 0$
	"beweging in de y-richting"	$y = 0$
10	$F_{wy} = F_w * (v_y / v)$	$t = 0$
11	$F_{resY} = m * g - F_{wy}$	$dt = 0,01$
12	$a_y = F_{resY} / m$	
13	$dv_y = a_y * dt$	
14	$v_y = v_y + dv_y$	
15	$dy = v_y * dt$	
16	$y = y + dy$	
17	$t = t + dt$	
18	Als $y < 0$ Dan Stop EindAls	

TOELICHTING

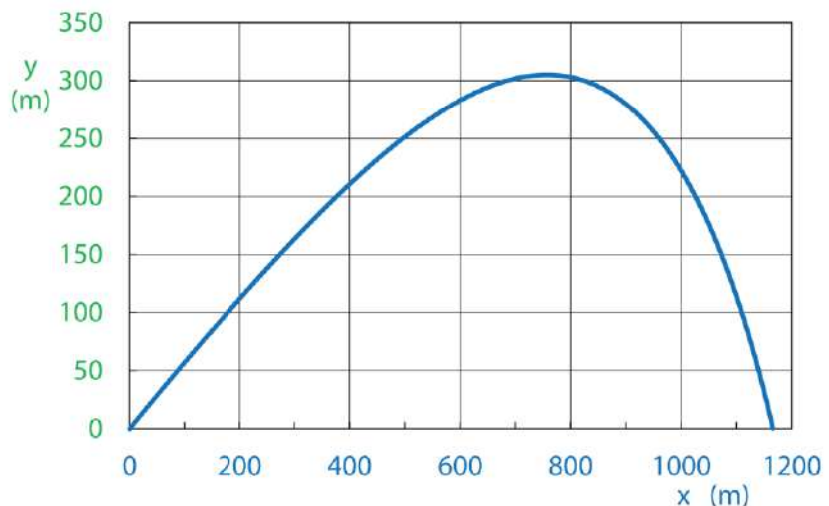
Startwaarden in SI eenheden

$c_w = 1,0$	de luchtweerstandscoefficiënt
$\rho = 1,293 \text{ kg/m}^3$	de dichtheid van lucht bij het aardoppervlak
$A = 0,005 \text{ m}^2$	het frontale oppervlakte
$m = 2 \text{ kg}$	de massa
$g = -9,81 \text{ m/s}^2$	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
hoek = 30	de hoek waarmee het projectiel wordt weggeschoten in graden
$v_0 = 300 \text{ m/s}$	de beginsnelheid
$v_x = v_0 * \cos(\text{hoek})$	de beginsnelheid in de x-richting
$v_y = v_0 * \sin(\text{hoek})$	de beginsnelheid in de y-richting
$x = 0$	de beginplaats in de x-richting
$y = 0$	de beginplaats in de y-richting
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop de beweging begint
$dt = 0,02 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 de waarde van v wordt uitgerekend $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- 2 de waarde van F_w wordt uitgerekend
- 3 **x-richting** | de x-component van F_w wordt uitgerekend
- 4 **x-richting** | F_{res} in de x-richting (F_{resX}) is de luchtweerstand
(het teken van F_{wx} is tegengesteld aan het teken van v_x)
- 5 **x-richting** | de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
- 6–9 **x-richting** | de plaats x wordt uitgerekend
- 10 **y-richting** | de y-component van F_w wordt uitgerekend

- 11 **y-richting** | F_{res} in de y-richting (F_{resY}) is de zwaartekracht plus de luchtweerstand
(het teken van F_{wy} is tegengesteld aan het teken van v_y)
- 12 **y-richting** | de versnelling volgt uit $F_{\text{res}} = m \cdot a$
- 13 – 16 **y-richting** | de plaats y wordt uitgerekend
- 17 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 18 de berekening stopt als $y < 0$



Figuur 13 Projectiel met luchtweerstand. (y, x)-diagram

MERK OP dat in regel 4 de resulterende kracht in de x-richting wordt berekend. Dat is de x-component van de wrijvingskracht waarvoor geldt $F_{\text{wx}} = F_w \cdot (v_x / v)$. Zie figuur 12. Omdat de richting van de wrijvingskracht tegenovergesteld is aan de richting van de snelheid moeten we een minteken toevoegen en schrijven we $F_{\text{resX}} = -F_{\text{wx}}$.

In regel 11 wordt de resulterende kracht in de y-richting berekend. In deze richting werkt de zwaartekracht én de y-component van de wrijvingskracht, zodat $F_{\text{resY}} = m \cdot g - F_{\text{wy}}$. Let hierbij goed op de mintekens. De zwaartekracht is $m \cdot g$ en met een negatief getal voor g is de zwaartekracht altijd negatief, dat wil zeggen naar beneden gericht. Maar met de wrijvingskracht F_{wy} gebeurt iets bijzonders. Bij het omhoog bewegen staat de wrijvingskracht omlaag (negatief teken) en bij het omlaag bewegen omhoog (positief teken). In regel 10 staat $F_{\text{wy}} = F_w \cdot (v_y / v)$ waarbij v altijd een positief getal is, namelijk de grootte van de snelheid. v_y is positief bij een beweging omhoog en negatief bij een beweging omlaag. Precies omgekeerd als de richting van F_{wy} en vandaar dat we een minteken toevoegen.

Satellieten

Satellieten bewegen om de aarde in ellipsvormige banen. De gravitatiekracht zorgt ervoor dat zowel de richting als de grootte van de snelheid voortdurend veranderen. Hiervan gaan we een model maken. Voor de gravitatiekracht geldt:

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

- F_G is de gravitatiekracht in newton (N)
- G is de gravitatieconstante $6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- m is de massa van de satelliet in kilogram (kg)
- M is de massa van de aarde in kilogram (kg)
- r is de afstand tussen de zwaartepunten van de aarde en de satelliet (m)

Laten we een model maken voor het ruimtestation ISS die zich op 410 km boven het aardoppervlak bevindt. We zoeken op:

$$m_{\text{ISS}} = 4,20 \cdot 10^5 \text{ kg} \quad | \quad m_{\text{aarde}} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad | \quad r_{\text{baan}} = 6,371 \cdot 10^6 + 410 \cdot 10^3 \text{ m}$$

De ISS heeft een snelheid van $7,66 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Dit gaan we als startwaarden in ons model invoeren.

De aarde bevindt zich in een brandpunt van de ellips. De gravitatiekracht op de ISS is gericht naar het middelpunt van de aarde. We gaan de beweging in de horizontale en in de verticale richting onafhankelijk van elkaar berekenen. Hiervoor moeten we voor ieder tijdstip de horizontale en verticale component van de gravitatiekracht berekenen. Dat gaat als volgt.

Er geldt:

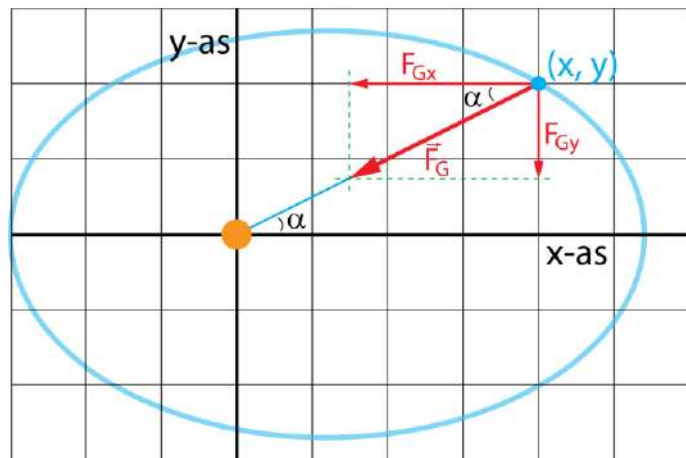
$$F_{Gx} = F_G \cdot \cos \alpha \quad | \quad F_{Gy} = F_G \cdot \sin \alpha$$

Verder geldt:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad | \quad \sin \alpha = \frac{y}{r}$$

Hieruit volgt:

$$F_{Gx} = F_G \cdot \frac{x}{r} \quad | \quad F_{Gy} = F_G \cdot \frac{y}{r}$$

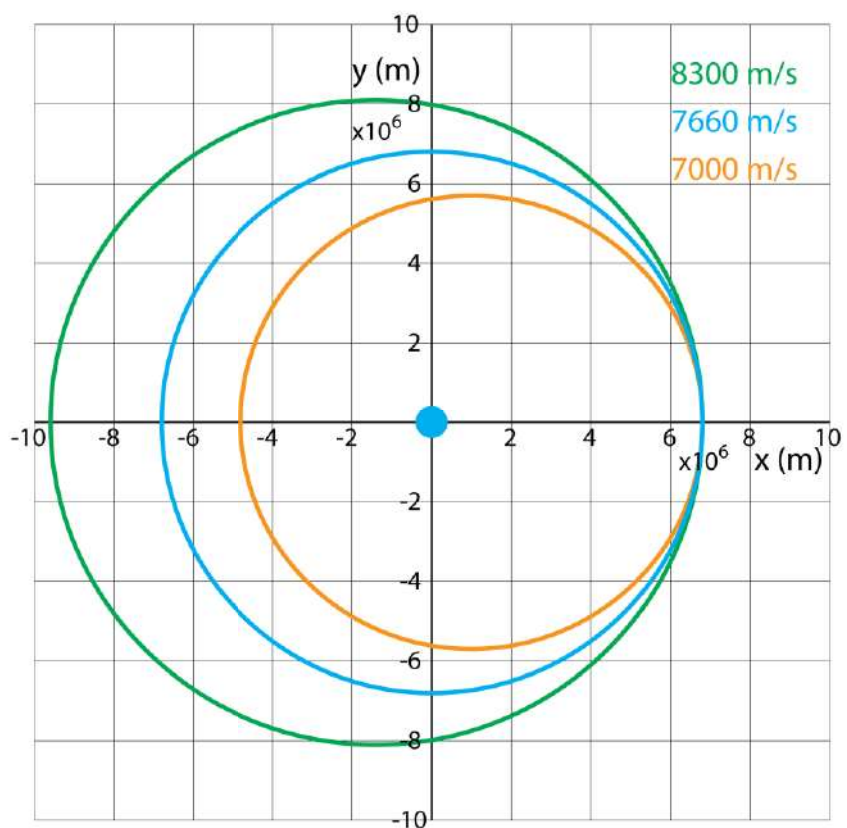


Figuur 14 Berekening van de x- en de y component van de gravitatiekracht.

model		startwaarden in SI eenheden
1	$r = (x^2 + y^2)^{0,5}$	$G = 6,674 \cdot 10^{-11}$
2	$F_g = G \cdot m \cdot M / r^2$	$m = 4,2 \cdot 10^5$
	"beweging in de x-richting"	$M = 5,972 \cdot 10^{24}$
3	$F_{gx} = F_g \cdot (x / r)$	
4	$a_x = (F_{gx} / m)$	$v_x = 0$
5	$dv_x = a_x \cdot dt$	$v_y = 7,66 \cdot 10^3$
6	$v_x = v_x + dv_x$	$x = 6,781 \cdot 10^6$
7	$dx = v_x \cdot dt$	$y = 0$
8	$x = x + dx$	
	"beweging in de y-richting"	$t = 0$
9	$F_{gy} = F_g \cdot (y / r)$	$dt = 10$
10	$a_y = (F_{gy} / m)$	
11	$dv_y = a_y \cdot dt$	
12	$v_y = v_y + dv_y$	
13	$dy = v_y \cdot dt$	
14	$y = y + dy$	
15	$t = t + dt$	
16	Als $t > 1000$ Dan Stop EindAls	

Model

- 1 de waarde van r wordt uitgerekend $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 2 de waarde van F_G wordt uitgerekend
- 3 **x-richting** | de x-component van F_G wordt uitgerekend
- 4 **x-richting** | de versnelling in de x-richting wordt uitgerekend, let op het minteken
- 5 – 8 **x-richting** | de plaats x wordt uitgerekend
- 9 **y-richting** | de y-component van F_G wordt uitgerekend
- 10 **y-richting** | de versnelling in de y-richting wordt uitgerekend, let op het minteken
- 11 – 14 **y-richting** | de plaats y wordt uitgerekend
- 15 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 16 de berekening wordt 1000 keer uitgevoerd



Figuur 15 Baan van de ISS met verschillende startwaarden van de snelheid. Bij 7660 m/s is de baan cirkelvormig.

MERK OP dat de straal van de aarde $6,371 \cdot 10^6$ m is. De oranje baan is dus onmogelijk, want dan stort de ISS op de aarde.

18.4 Trillingen

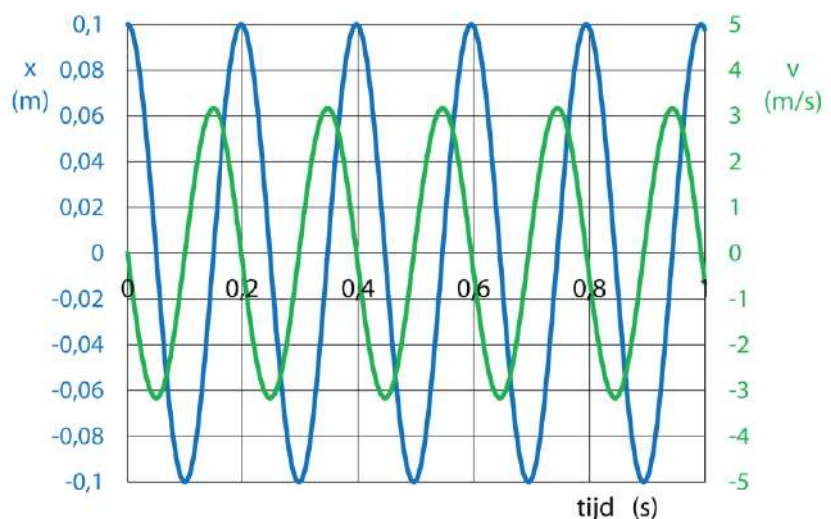
Harmonische trilling zonder damping

Voor een harmonische trilling is de resulterende kracht recht-evenredig met de uitwijking: $\Sigma F = -C \cdot x$. Dit geeft sinusvormige (x, t) -, (v, t) - en (a, t) -grafieken.

model		startwaarden in SI eenheden
1	$F_{res} = -C \cdot x$	$m = 0,1$
2	$a = F_{res} / m$	$C = 100$
3	$dv = a \cdot dt$	$v = 0$
4	$v = v + dv$	$x = 0,1$
5	$dx = v \cdot dt$	$t = 0$
6	$x = x + dx$	$dt = 0,0002$
7	$t = t + dt$	
8	Als $t > 1$ Dan Stop EindAls	

Model

- 1 de resulterende kracht wordt uitgerekend
- 2 de versnelling wordt uitgerekend
- 3 - 6 de plaats wordt uitgerekend (dit is de uitwijking)
- 7 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 8 de berekening wordt 1000 keer uitgevoerd



Figuur 16 Harmonische trilling zonder damping.

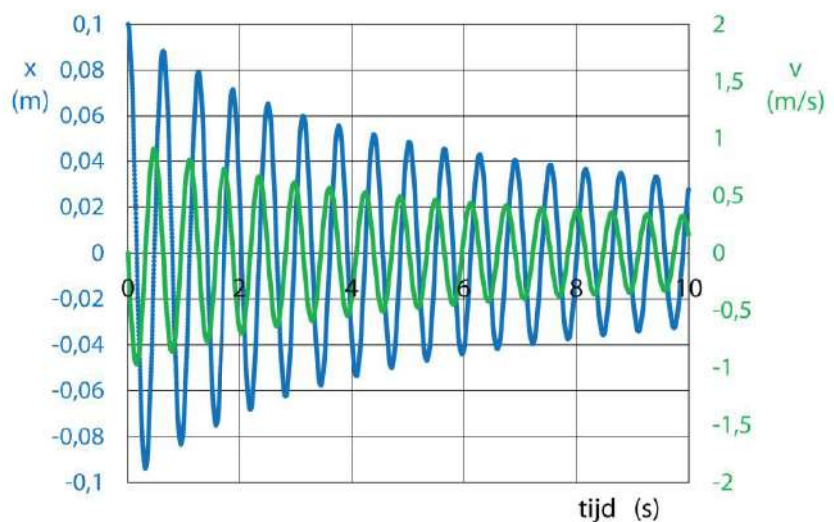
Harmonische trilling met damping

Voegen we bij een harmonische trilling luchtweerstand $F_w = k \cdot v^2$ toe, dan wordt de trilling gedempt. De amplitude neemt af, maar de trillingstijd verandert niet.

model		startwaarden in SI eenheden
1	Als $v > 0$ Dan $F_{res} = -C*x - k*v^2$ Anders $F_{res} = -C*x + k*v^2$ EindAls	$m = 0,1$
2	$a = F_{res} / m$	$C = 10$
3	$dv = a*dt$	$k = 0,05$
4	$v = v + dv$	$v = 0$
5	$du = v*dt$	$x = 0,1$
6	$x = x + dx$	$t = 0$
7	$t = t + dt$	$dt = 0,002$
8	Als $t > 10$ Dan Stop EindAls	

Model

- 1 de resulterende kracht wordt uitgerekend, F_w is tegengesteld gericht aan v
- 2 de versnelling wordt uitgerekend
- 3 - 6 de plaats wordt uitgerekend (dit is de uitwijking)
- 7 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
- 8 de berekening wordt 5000 keer uitgevoerd



Figuur 17 Harmonische trilling met demping.

18.5 Radioactief verval

Verval van een radioactief isotoop

Tot nu toe heb ik alleen bewegende voorwerpen behandeld maar daar hoeven we ons niet toe te beperken. In principe kun je van ieder proces dat in de tijd verloopt een model maken. Laten we daarom nu eens kijken naar radioactief verval. Je weet dat er instabiele isotopen zijn die na een poosje spontaan uit elkaar vallen. Bij dit verval hoort een halveringstijd, wat de tijd is waarin de helft van de kernen is vervallen. Met de volgende formule kun je het aantal aanwezige kernen op tijdstip t berekenen:

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{met} \quad n = \frac{t}{t_{1/2}}$$

- N is het aantal aanwezige instabiele kernen na n keer de halveringstijd
- N_0 is het aantal aanwezige instabiele kernen op $t = 0$
- n is het aantal halveringen: $n = t / t_{1/2}$
- t is de tijd in dezelfde eenheid als $t_{1/2}$
- $t_{1/2}$ is de halveringstijd

Deze formule is een exponentieel verband en een exponentieel verband ontstaat als de snelheid waarmee een grootte G verandert recht evenredig is met de waarde van deze grootte: $dG / dt = k \cdot G$, waarin k een vast getal is. Voor radioactief verval krijgen we:

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \rightarrow dN = k \cdot N \cdot dt \quad \text{waarin } N \text{ het aantal aanwezige kernen is.}$$

Dit gaan we gebruiken in ons model dat maar uit drie regels bestaat:

model		startwaarden in SI eenheden
1	$dN = k \cdot N \cdot dt$	$N = 1000$
2	$N = N - dN$	$k = 0,5$
3	$t = t + dt$	$t = 0$
		$dt = 0,01$

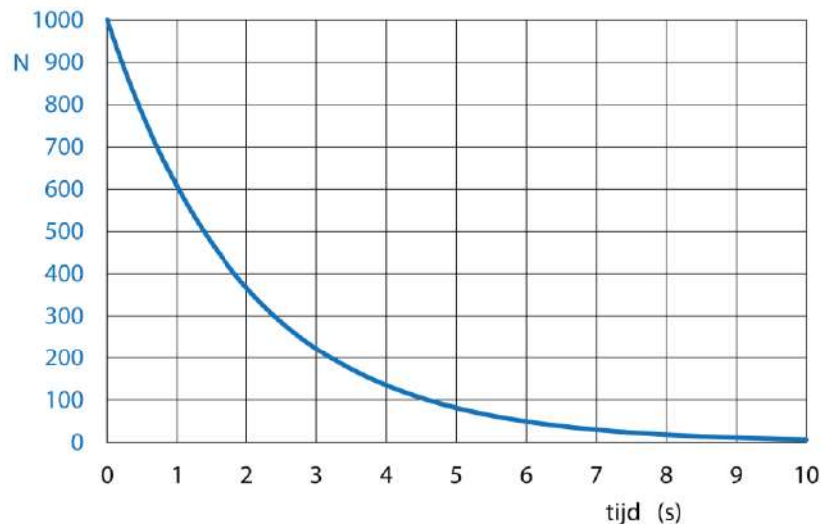
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

- $N = 1000$ het aantal kernen in het begin
 $k = 0,5$ geeft aan hoe snel kernen vervallen
 $t = 0 \text{ s}$ het tijdstip waarop het verval begint
 $dt = 0,01 \text{ s}$ de grootte van de tijdstap

Model

- 1 de verandering van het aantal kernen in één tijdstap wordt berekend
- 2 het nieuwe aantal kernen is het oude aantal min het aantal dat in één tijdstap is vervallen
- 3 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 18 Radioactief verval.

MERK OP dat de halveringstijd ongeveer 1,4 seconden is. Er is een wiskundig verband tussen de grootte van k en de halveringstijd maar dat is voor ons nu niet van belang.

Moeder en stabiele dochterkernen

Als een instabiele atoomkern vervalst ontstaat er een nieuwe kern. Dit wordt beschreven als een moederkern die een dochterkern voortbrengt. De dochterkern kan zelf ook instabiel zijn en dan gaat het proces door. Laten we eerst eens kijken naar het ontstaan van stabiele dochterkernen.

model		startwaarden in SI eenheden
1	$dN_m = k_m \cdot N_m \cdot dt$	$N_m = 1000$
2	$N_m = N_m - dN_m$	$k_m = 0,5$
3	$N_d = N_d + dN_m$	$N_d = 0$
4	$t = t + dt$	$t = 0$
		$dt = 0,01$

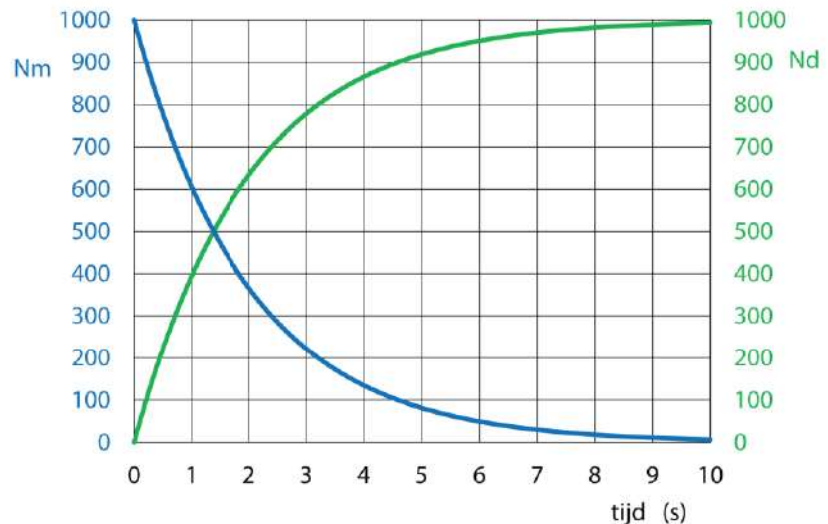
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

$N_m = 1000$	het aantal moederkernen in het begin
$k_m = 0,5$	geeft aan hoe snel moederkernen vervallen
$N_d = 0$	het aantal dochterkernen in het begin
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop het verval begint
$dt = 0,01 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 de verandering van het aantal moederkernen in één tijdstap wordt berekend
- 2 het nieuwe aantal moederkernen is het oude aantal min het aantal dat in één tijdstap is vervallen
- 3 het nieuwe aantal dochterkernen is het oude aantal plus het aantal moederkernen dat in één tijdstap is vervallen (want iedere vervallen moederkern krijgt één dochterkern)
- 4 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 19 Radioactief verval.
Moeder en stabiele dochter.

MERK OP dat het aantal moederkernen plus het aantal dochterkernen samen altijd 1000 is. Dat kan ook niet anders want als een moederkern vervalt ontstaat er een dochterkern, zodat het totale aantal kernen gelijk blijft.

Moeder en instabiele dochterkernen

Het wordt interessanter als ook de dochterkernen instabiel zijn. Om dit te berekenen voegen we één regel toe aan het model en een startwaarde k_d die aangeeft hoe snel de dochterkernen vervallen.

model		startwaarden in SI eenheden
	"het verval van moederkernen"	$N_m = 1000$
1	$dN_m = k_m \cdot N_m \cdot dt$	$k_m = 0,5$
2	$N_m = N_m - dN_m$	$N_d = 0$
	"het verval van dochterkernen"	$k_d = 0,1$
3	$dN_d = k_d \cdot N_d \cdot dt$	$t = 0$
4	$N_d = N_d + dN_m - dN_d$	$dt = 0,01$
5	$t = t + dt$	

TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

$N_m = 1000$	het aantal moederkernen in het begin
$k_m = 0,5$	geeft aan hoe snel moederkernen vervallen
$N_d = 0$	het aantal dochterkernen in het begin
$k_d = 0,1$	geeft aan hoe snel dochterkernen vervallen
$t = 0 \text{ s}$	het tijdstip waarop het verval begint
$dt = 0,01 \text{ s}$	de grootte van de tijdstap

Model

- 1 de verandering van het aantal moederkernen in één tijdstap wordt berekend
- 2 het nieuwe aantal moederkernen is het oude aantal min het aantal dat in één tijdstap is vervallen

- 3 het verval van het aantal dochterkernen in één tijdstap wordt berekend
- 4 het nieuwe aantal dochterkernen is het oude aantal plus het aantal moederkernen dat in één tijdstap is vervallen min het aantal dochterkernen dat in één tijdstap is vervallen
- 5 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd

Figuur 20 Radioactief verval.
Moeder en instabiele dochter.

