

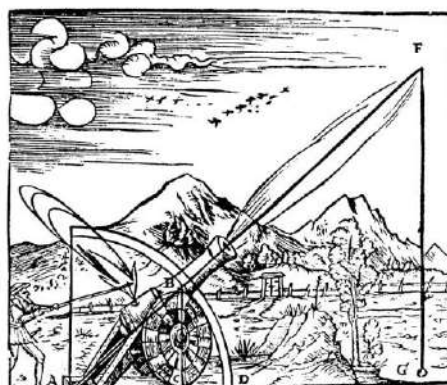
11 Kromlijnige beweging

vwo

11.0 Inleiding

Kromlijnige bewegingen zijn eeuwenlang onderwerp geweest van discussie. Het begint bij **Aristoteles** (384–322 v. Chr.) die onderscheidt maakt tussen horizontale en verticale bewegingen. Volgens hem hebben alle voorwerpen een natuurlijke plaats waar ze heen willen als dat mogelijk is. Hij denkt dat de aarde het middelpunt is van het heelal en vanaf het middelpunt van de aarde gerekend hebben voorwerpen een natuurlijke plaats van zwaar naar licht. De vier elementen aarde – water – lucht – vuur zijn daarom in schillen aanwezig. Laat je een steen los in de lucht, dan beweegt het naar beneden om zo dicht mogelijk bij het middelpunt te komen. Verder denkt Aristoteles dat zware stenen met een grotere snelheid vallen dan lichte stenen, omdat een zware steen meer geneigd is zijn natuurlijke plaats op te zoeken.

Voor Aristoteles zijn horizontale bewegingen niet natuurlijk en hebben ze een oorzaak van buiten. Als iemand een steen horizontaal weggooit krijgt het een horizontale snelheid, totdat die snelheid is uitgewerkt en de natuurlijke verticale beweging de overhand krijgt. In de figuur hiernaast zie je hoe volgens Aristoteles de baan van een kanonskogel eruitziet. In het begin is er een onnatuurlijke beweging schuin omhoog en als die is uitgewerkt valt de kogel recht omlaag.



De beweging van een kogel volgens Aristoteles.

Galileo Galilei (1564–1642) onderzoekt hoe voorwerpen werkelijk bewegen en komt er al snel achter dat de theorie van Aristoteles niet klopt. Volgens hem bestaat er niet zoiets als een natuurlijke plaats, staat de aarde niet in het middelpunt van het heelal en vallen zware voorwerpen niet met een grotere snelheid. Uit zijn onderzoek blijkt dat horizontale en verticale bewegingen niet fundamenteel van elkaar verschillen en dat de valversnelling onafhankelijk is van de massa. Hij begrijpt ook dat er geen natuurkundig verschil is tussen stilstaan en eenparig rechtlijnige beweging.



Aristoteles



Galileo Galilei

Eenparige cirkelbewegingen hebben wel een constante snelheid maar volgen geen rechte lijn. Aristoteles weet dat hemellichamen cirkelbewegingen uitvoeren en dat komt volgens hem omdat buiten de aarde de natuurkunde heel anders is. De vier elementen zijn daar

niet te vinden maar er is een vijfde element, de ether. Hoe het precies zit weet hij ook niet. De eerste die cirkelbewegingen systematisch onderzoekt is **Christiaan Huygens** (1629–1695). Als geen ander begrijpt Huygens dat beweging relatief is. Het woord beweging krijgt pas betekenis als je erbij zegt ten opzichte van welke plaats je het bekijkt, waarbij alle plaatsen gelijkwaardig zijn. Een vraag die Huygens zich stelt is of ook een cirkelbeweging relatief is. Hij bewijst dat de versnelling bij een cirkelbeweging wordt gegeven door het kwadraat van de baansnelheid gedeeld door de straal, v^2 / r , en hiermee stelt hij een theorie op over de zwaartekracht, gebaseerd op wervelingen van de ether.

Isaac Newton (1643–1727) verdiept zich grondig in deze kwestie en komt uiteindelijk tot een heel andere conclusie. Hij introduceert het idee dat de versnelling bij een cirkelbeweging kan worden veroorzaakt door een kracht die over afstand werkt. Zijn idee gaat in tegen de heersende opvatting dat beweging alleen kan worden overgedragen door botsingen, waarbij een voorwerp pas in beweging komt als een ander voorwerp er tegenaan botst.



Christiaan Huygens



Isaac Newton

Huygens is het volstrekt oneens met Newtons idee van krachtwerking over afstand. Maar wat je er ook van mag vinden, met de gravitatiewet van Newton kunnen de bewegingen van de planeten, zoals vastgesteld door **Johannes Kepler** (1571–1630), exact worden berekend. Ook de beweging van de maan en van de kometen zijn te begrijpen door de mysterieuze krachtwerking over afstand te aanvaarden. Met Newton en zijn succesvolle theorie is het verhaal niet ten einde. Het idee van krachtwerking over afstand blijft de natuurkunde bezighouden en is tot op de huidige dag een punt van discussie.

Een bron van verwarring is het gevoel dat bij een cirkelbeweging een naar buiten gerichte kracht ontstaat. Dit wordt dan de middelpuntvliedende kracht genoemd. Maar zoals je in dit hoofdstuk gaat leren is dit een misverstand. Volgens de eerste wet van Newton blijft een voorwerp met een constante snelheid in een rechten lijn bewegen, tenzij er een resulterende kracht werkt. En dat is precies wat gebeurt bij een cirkelbeweging. Er is een resulterende kracht die je naar het middelpunt duwt. Maar de derde wet van Newton geeft aan dat jij dan een even grote tegengestelde kracht uitoefent en deze tegengestelde kracht is naar buiten gericht. Om te zorgen dat je niet de bocht uitvliegt moet jij een naar buiten gerichte kracht uitoefenen, bijvoorbeeld door je ergens aan vast te houden. Als je loslaat wordt er geen naar binnen gerichte kracht meer op je uitgeoefend en ga je met een constante snelheid in een rechte lijn bewegen.

Inhoud

11.1	Projectielen afschieten	4
–	Bewegen in drie dimensies	4
–	Een steen schuin omhooggooien	4
–	Horizontaal afgeschoten projectiel	5
–	De baan van een horizontaal afgeschoten projectiel	6
–	De richting van de snelheidsvector	7
–	De wet van behoud van energie	9
–	Parabolische baan bij afgeschoten projectielen	10
–	Schuin omhooggeschoten projectielen	10
11.2	Eenparige cirkelbeweging	11
–	Cirkelbeweging	11
–	Omlooptijd en omloopfrequentie	11
–	Baansnelheid	11
–	Middelpuntzoekende kracht en versnelling	12
11.3	Horizontale cirkelbeweging	14
–	Een bocht maken	14
–	Een cirkelslinger	15
–	Een hellende bocht	17
11.4	Verticale cirkelbeweging	18
–	Een looping	18
–	Minimale snelheid	18
–	Looping tussen onder en boven	19
–	Wet van behoud van energie bij een looping	20
11.5	Gravitatie	21
–	De gravitatiewet van Newton	21
–	Gravitatiekracht en zwaartekracht	21
–	Ellipsvormige banen	22
–	Gravitatiekracht gericht naar het middelpunt van de aarde	22
–	Geostationaire satellieten	24
–	Satellieten op lage hoogte	25
–	Satellieten met polaire banen	25
–	Gravitatie energie	26
–	Ontsnappingsnelheid	27
11.6	Samenvatting	29
–	Grootheden en eenheden	29
–	Weten	29
–	Formules	30
–	Figuren	30

11.1 Projectielen afschieten

Bewegen in drie dimensies

Er zijn **drie onafhankelijke richtingen (dimensies)** waarin je kunt bewegen, van links naar rechts, van voor naar achter en van onder naar boven. Bewegingen in één richting zijn het eenvoudigst en ben je eerder tegengekomen. Bij een beweging in meerdere richtingen kun je met de wet van behoud van energie de snelheid en de hoogte aan het begin of aan het eind van de beweging uitrekenen. Maar als je wil weten hoelang de beweging duurt of welke baan het voorwerp aflegt lukt dat niet met alleen de wet van behoud van energie.

Het is opmerkelijk dat onze ruimte drie onafhankelijke richtingen heeft. Als een voorwerp zich horizontaal beweegt blijft zijn verticale positie constant. Om niet in de war te raken gebruiken we de letters x , y en z om de richtingen horizontaal, verticaal en diepte aan te geven. Om een tweedimensionale beweging te beschrijven kun je, net als in de wiskunde, een (y, x) -assenstelsel tekenen, waarbij een punt in dit assenstelsel de plaats van het voorwerp is. Voor een driedimensionale beweging moet je hier een z -as aan toevoegen, maar dat is lastig te tekenen in een plat vlak.

Bij het berekenen van een twee- of driedimensionale beweging splits je de beweging in twee of drie richtingen. Hoewel de beweging in de y -richting niet wordt beïnvloed door de beweging in de x -richting zijn de twee bewegingen niet los van elkaar te zien, want de **tijd** is voor beide bewegingen hetzelfde. In iedere richting loopt de klok even snel. Bij berekeningen aan kromme banen speelt de tijd dan ook een belangrijke rol.

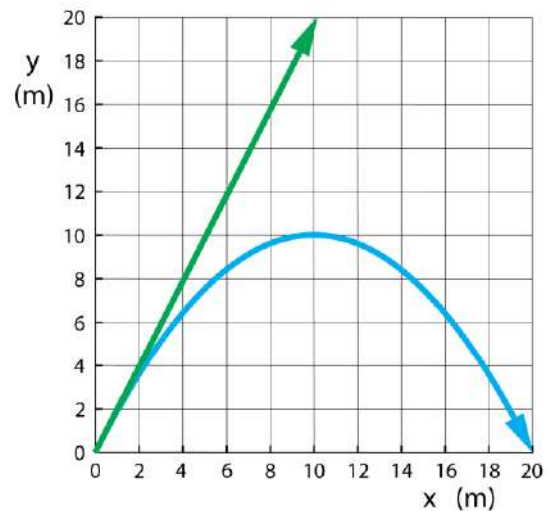
**Bewegingen in de x -, de y - en de z -richting zijn onafhankelijk .
De tijd is in iedere richting hetzelfde.**

We gaan ons in deze paragraaf bezighouden met de baan van een afgeschoten projectiel. Een **projectiel** is een voorwerp dat gedurende korte tijd door een kracht wordt versneld en daarna aan zichzelf wordt overgelaten. Vanaf het tijdstip van loslaten werken alleen de zwaartekracht en de weerstandskracht op het projectiel. De beweging komt tot stilstand als het projectiel ergens tegenaan botst. Dat kan de grond zijn of een object dat door het projectiel wordt geraakt.

Een steen schuin omhooggooien

Stel je gooit een steen schuin omhoog. Zonder zwaartekracht en zonder weerstandskracht blijft de steen langs een rechte lijn bewegen. Nadat de steen loskomt van je hand geldt immers $\Sigma F = 0$, zodat de grootte en richting van de snelheid niet meer veranderen. We verdelen de snelheid in een horizontale en een verticale snelheid. De horizontale snelheid is evenwijdig aan het aardoppervlak en de verticale snelheid staat loodrecht op het aardoppervlak. Evenwijdig aan het aardoppervlak noemen we de **x -richting**. De richting loodrecht op het aardoppervlak noemen we de **y -richting**.

Figuur 1 is een **(y, x)-diagram**. Op de horizontale as staat de **plaats x** en op de verticale as de **plaats y**. Een **(y, x)-grafiek** toont de plaats van het projectiel op verschillende tijdstippen. Dit is **de baan** van het projectiel. Als er geen krachten werken is zowel de horizontale snelheid als de verticale snelheid constant en is de (y, x)-grafiek een rechte lijn. Zie figuur 1, groene grafiek.



Figuur 1 De baan van een schuin omhoog afgeschoten projectiel, zonder zwaartekracht (groen) en met zwaartekracht (blauw).

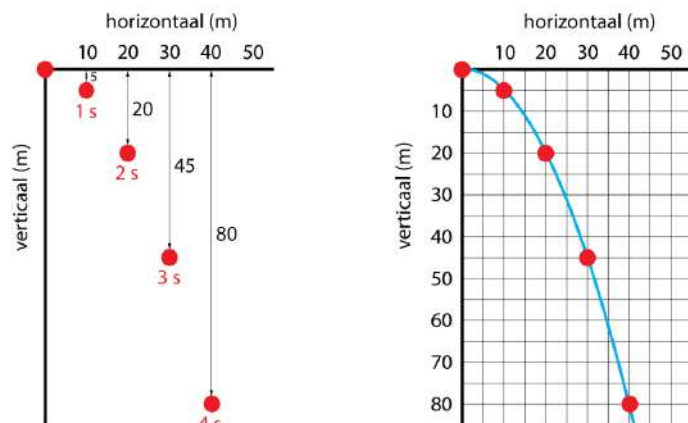
Als er zwaartekracht is krijgt de steen een kromme baan. Horizontaal geldt $\Sigma F_x = 0$ en de horizontale snelheid is dus constant. Maar verticaal werkt de zwaartekracht en geldt $\Sigma F_y = m \cdot g$. De zwaartekracht veroorzaakt een constante versnelling naar beneden. Zie figuur 1, blauwe grafiek. In figuur 1 zijn weerstandskrachten verwaarloosd.

De beweging van een projectiel lijkt in eerste instantie ingewikkeld, maar dat blijkt mee te vallen. De horizontale en verticale beweging kun je namelijk los van elkaar berekenen met de tijd als verbindende factor. Als weerstand mag worden verwaarloosd heeft een projectiel horizontaal een constante snelheid. Verticaal maakt het projectiel een valbeweging met een omlaag gerichte constante versnelling. Schiet je een projectiel schuin omhoog dan vertraagt het tot het hoogste punt is bereikt. Daar keert de beweging in de y-richting om met een constante versnelling omlaag.

Horizontaal afgeschoten projectiel

Als voorbeeld van een kromlijnige beweging gaan we de baan van een horizontaal afgeschoten projectiel berekenen. Om het eenvoudig te houden nemen we als valversnelling $g = 10 \text{ m/s}^2$ en schieten we het projectiel met 10 m/s horizontaal weg. De plaats in de x- en in de y-richting laten zich eenvoudig berekenen. Het resultaat vind je in de tabel hiernaast en in een (y, x) diagram. Zie figuur 2.

tijd (s)	x (m) $x = v_{\text{gem}} \cdot t$	y (m) $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$
0	0	0
1	10	5
2	20	20
3	30	45
4	40	80
5	50	125



Figuur 2 De baan van een horizontaal afgeschoten projectiel.

Om van een voorwerp de baan te kunnen berekenen moet je de plaats en de snelheid aan het begin weten én de resulterende kracht tijdens de beweging. Om de verschillende richtingen uit elkaar te houden voeren we de volgende notatie in:

x	en	y	de plaats in de x- en in de y-richting
v_x	en	v_y	de snelheid in de x- en in de y richting
a_x	en	a_y	de versnelling in de x- en in de y richting
ΣF_x	en	ΣF_y	de resulterende kracht in de x- en in de y richting

De baan van een horizontaal afgeschoten projectiel

Om te zien hoe dit in zijn werk gaat bereken we de baan van een projectiel dat horizontaal wordt afgeschoten van een toren. We verwaarlozen daarbij de luchtweerstand, zodat de horizontale snelheid v_x constant blijft en de verticale snelheid v_y iedere seconde met 9,81 m/s verandert. We schieten het projectiel op een hoogte van 50 meter met een horizontale snelheid van 20 m/s weg. Van dit projectiel gaan we berekenen:

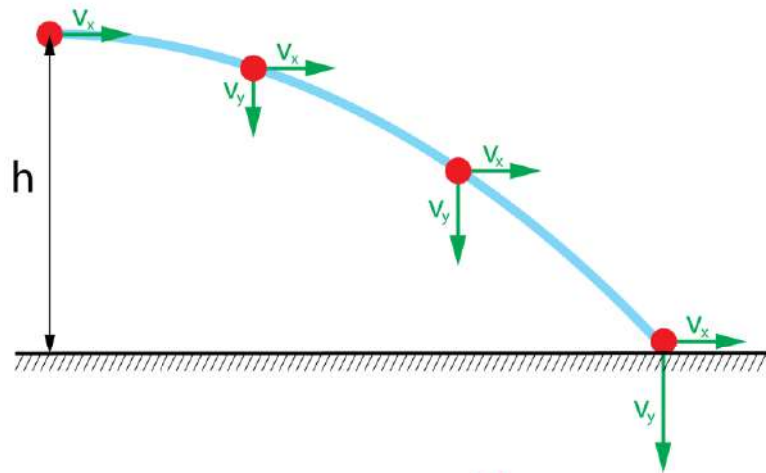
- 1) De horizontale afstand die het projectiel aflegt.
- 2) De snelheid waarmee het projectiel op de grond komt.

In het onderstaande schema zie je hoe je de berekeningen moet uitvoeren. Naar boven is de positieve richting en naar beneden is de negatieve richting.

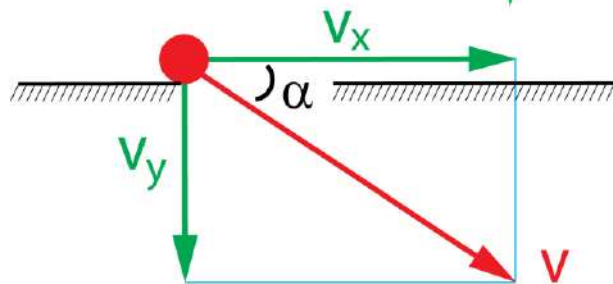
Horizontaal	Verticaal	Opmerkingen
$x_0 = 0 \text{ m}$ $v_{x0} = 20 \text{ m/s}$ $a_{x0} = 0 \text{ m/s}^2$	$y_0 = 50 \text{ m}$ $v_{y0} = 0 \text{ m/s}$ $a_{y0} = -9,81 \text{ m/s}^2$	Begin Plaats, snelheid en versnelling aan het begin van de beweging zijn bekend. v_x verandert niet.
$\Delta x = v_x \cdot t$ $v_x = v_{x0}$ $a_x = 0$	$\Delta y = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ $\Delta v_y = a \cdot t$ $a_y = -9,81 \text{ m/s}^2$	Formules Horizontaal is de snelheid constant; verticaal is de beweging eenparig versneld.
	$-50 = \frac{1}{2} \cdot -9,81 \cdot t^2$ $t = 3,19275 \text{ s}$	Bereken eerst tijdstip t waarop de beweging stopt.
$x_{\text{eind}} = 20 \cdot 3,19275$ $x_{\text{eind}} = 63,855 \text{ m}$		Horizontale verplaatsing van de kogel.
	$v_{y\text{eind}} = -9,81 \cdot 3,19275$ $v_{y\text{eind}} = -31,321 \text{ m/s}$	Verticale eindsnelheid van de kogel.
$x_{\text{eind}} = 64 \text{ m}$ $v_{x\text{eind}} = 20 \text{ m/s}$ $a_{x\text{eind}} = 0,0 \text{ m/s}^2$	$y_{\text{eind}} = 0,0 \text{ m}$ $v_{y\text{eind}} = -31 \text{ m/s}$ $a_{y\text{eind}} = -9,81 \text{ m/s}^2$	Eind Plaats, snelheid en versnelling aan het einde van de beweging.

In figuur 3 zie je de baan van het voorwerp. Als er geen weerstand is, is de vorm van deze baan bij benadering een parabool.

Figuur 3 De baan van een horizontaal afgeschoten voorwerp zonder weerstand.



Het voorwerp valt schuin op de grond en de hoek α waarmee dit gebeurt is de hoek tussen de snelheidsvectoren in de x- en de y-richting. Zie figuur 4. Hoek α kan worden berekend uit de waarden van v_x en v_y .



Figuur 4 De richting van de snelheid op het tijdstip waarop het projectiel de grond raakt.

Voor hoek α geldt:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

We vinden in dit geval voor **de richting**: $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{31,321}{20,0} \rightarrow \alpha = 57,4397 = 57^\circ$

De snelheid waarmee het projectiel op de grond valt is de grootte van de snelheidsvector die je kunt uitrekenen met de stelling van Pythagoras:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{20^2 + 31,321^2} = 37,16181 = 37 \text{ m/s}$$

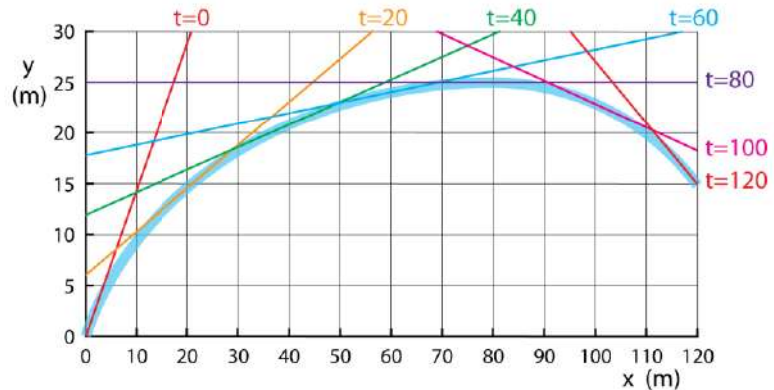
De richting van de snelheidsvector

Tijdens de beweging veranderen de grootte en de richting van de snelheid. De richting van de snelheid op een tijdstip is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan.

De richting van de snelheidsvector $\vec{v}$ op tijdstip t is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan op tijdstip t .

$$\frac{v_y}{v_x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{\text{raaklijn}}$$

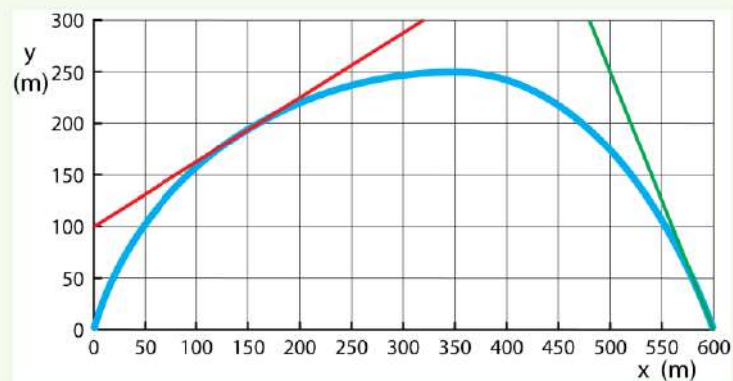
Als je de snelheid in de x-richting **of** in de y-richting op tijdstip t weet kun je uit de vorm van de baan de snelheid in de andere richting bepalen. En als je beide snelheidscomponenten v_x en v_y weet kun je met Pythagoras ook de totale snelheid op dat tijdstip berekenen. In figuur 5 zie je de baan van een voorwerp. De richting van de snelheid is de richting van de raaklijn aan de baan.



Figuur 5 De richting van de snelheid op tijdstip t is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan op dit tijdstip.

VOORBEELD de snelheid op een tijdstip bepalen uit de baan

Een projectiel wordt schuin omhoog afgeschoten. In figuur 6 zie je de baan van het projectiel. De horizontale snelheid is constant $v_x = 50$ m/s.



Figuur 6

Bepaal de snelheid op $t = 3,0$ s.

- $x = v_x \cdot t \rightarrow x = 50 \cdot 3 = 150$ m
- raaklijn op $x = 150$ m $\rightarrow$ richtingscoëfficiënt: $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\text{raaklijn}} = \frac{300 - 100}{320} = 0,625$
- $\frac{v_y}{v_x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\text{raaklijn}} = 0,625 \rightarrow \frac{v_y}{50} = 0,625 \rightarrow v_y = 31,25$ m/s
- $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow v = \sqrt{50^2 + 31,25^2} = 58,96 = 59$ m/s

Bepaal met welke snelheid het projectiel de grond raakt.

- raaklijn op $x = 600$ m $\rightarrow$ richtingscoëfficiënt: $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\text{raaklijn}} = \frac{-300}{600 - 480} = -2,5$
- $\frac{v_y}{v_x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\text{raaklijn}} = -2,5 \rightarrow \frac{v_y}{50} = -2,5 \rightarrow v_y = -125$ m/s
- $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow v = \sqrt{50^2 + (-125)^2} = 134,63 = 135$ m/s

De wet van behoud van energie

Ook met de wet van behoud van energie kun je de eindtoestand berekenen als je de begintoestand weet en andersom. Maar deze wet zegt niets over **hoe** het projectiel van begin naar eind gaat. Over de baan kom je dus niets te weten, want daarvoor heb je de bewegingsvergelijkingen nodig. Toch komt de wet van behoud van energie soms goed van pas, zoals je ziet in het volgende voorbeeld. We nemen dezelfde situatie als in het eerdere voorbeeld.

VOORBEELD energie van een afgeschoten projectiel

Een projectiel met een massa van 3,0 kg wordt op een hoogte van 50 meter met een snelheid van 20 m/s afgeschoten. Luchtweerstand wordt verwaarloosd.

Bereken de energie op $t = 0$.

- $E_{\text{begin}} = E_Z + E_K \rightarrow E_{\text{begin}} = m \cdot g \cdot h_{\text{begin}} + \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{begin}}^2$
- invullen: $h_{\text{begin}} = 50 \text{ m}$ en $v_{\text{begin}} = 20 \text{ m/s}$
- $E_{\text{begin}} = 3 \cdot 9,81 \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20^2 = 2071,5 = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J}$

Bereken de energie op t_{eind} .

- wet van behoud van energie: $E_{\text{begin}} + E_{\text{in}} - E_{\text{uit}} = E_{\text{eind}}$
- $E_{\text{in}} = 0$ en $E_{\text{uit}} = 0$ geen toegevoegde energie en geen weerstand
- $E_{\text{eind}} = E_{\text{begin}} = 2071,5 = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J}$

Bereken de eindsnelheid.

- $E_{\text{eind}} = E_Z + E_K \rightarrow E_{\text{eind}} = m \cdot g \cdot h_{\text{eind}} + \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{eind}}^2$
- invullen: $E_{\text{eind}} = 2071,5 \text{ J}$ en $h_{\text{eind}} = 0 \text{ m}$
- $2071,5 = 3 \cdot 9,81 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot v_{\text{eind}}^2 \rightarrow v_{\text{eind}} = 37,16181 = 37,2 \text{ m/s}$

Bereken de hoek waarmee het projectiel op de grond valt.

- $v_x = 20 \text{ m/s} \mid v_{\text{eind}} = 37,16181 \text{ m/s} \mid \alpha = \dots^\circ$
- $\cos \alpha = \frac{v_x}{v_{\text{eind}}} \rightarrow \cos \alpha = \frac{20}{37,16181} \rightarrow \alpha = 57,4397 = 57^\circ$

OOK GOED

- pythagoras $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow 37,16181 = \sqrt{20^2 + v_y^2} \rightarrow v_y = 31,321 \text{ m/s}$
- $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{31,321}{20} \rightarrow \alpha = 57,4397 = 57^\circ$

Uiteraard zijn deze resultaten hetzelfde als bij de eerdere berekeningen die we gemaakt hebben. Maar we hebben toch iets nieuws geleerd, want uit de energieberekening volgt dat de hoek waaronder we het projectiel afschieten geen invloed heeft op de eindsnelheid. Dit is een conclusie die misschien tegen je intuïtie ingaat. Schieten we een projectiel schuin omhoog dan kunnen we de baan uitrekenen en dan kom je tot dezelfde conclusie.

Parabolische baan bij afgeschoten projectielen

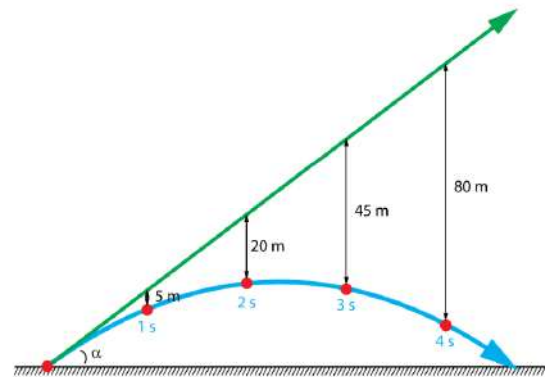
Als er geen luchtweerstand is krijgen alle afgeschoten projectielen bij benadering een **parabolische baan** met als vorm $y = a \cdot x^2 + b$. Ook schuin afgeschoten projectielen krijgen een parabolische baan. Dit is een benadering omdat we aannemen dat de valversnelling constant is en dat de aarde plat is. Zolang de beginsnelheid niet te groot is en de afstand klein ten opzichte van de straal van de aarde is dit een goede benadering.

BEWIJS

- $x = v_x \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_x}$
- $y = y_0 - \frac{1}{2}g \cdot t^2$
- $y = y_0 - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_x}\right)^2 \rightarrow y = y_0 - \frac{g}{2 \cdot v_x^2} \cdot x^2$
- vergelijk met: $y = a \cdot x^2 + b$ geeft: $a = -\frac{g}{2 \cdot v_x^2}$ en $b = y_0$

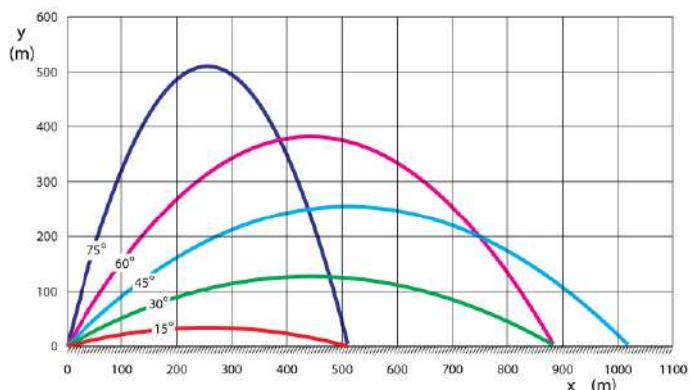
Schuin omhooggeschoten projectielen

Een schuin omhooggeschoten projectiel blijft zonder zwaartekracht schuin omhoog bewegen. De zwaartekracht zorgt voor een versnelling omlaag in de verticale richting. Het projectiel verliest dus hoogte volgens $\Delta y = \frac{1}{2}g \cdot t^2$, waarin Δy het hoogteverlies is en g de valversnelling van $9,81 \text{ m/s}^2$. De afstand x_{max} en de maximale hoogte y_{max} worden bepaald door de beginsnelheid en de hoek. Zie figuur 7.



Figuur 7 Schuin omhooggeschoten projectiel. De groene grafiek is de baan zonder zwaartekracht en de blauwe grafiek met zwaartekracht.

In figuur 8 zie je het resultaat van berekeningen aan een schuin omhoog afgeschoten projectiel met een beginsnelheid van $v_0 = 100 \text{ m/s}$. De schootsafstanden bij 75 en 15 graden zijn aan elkaar gelijk, net zoals die bij 60 en 30 graden. Bij 45 graden is de horizontale afstand het grootst.



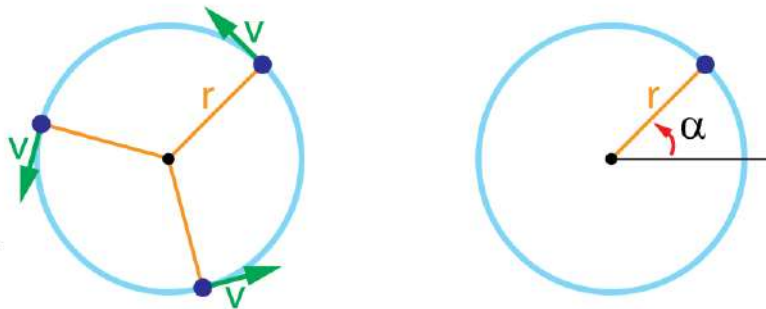
Figuur 8 Banen van een schuin omhooggeschoten projectiel met $v_0 = 100 \text{ m/s}$.

11.2 Eenparige cirkelbeweging

Cirkelbeweging

Bij een **cirkelbeweging** veranderen de x- en de y-coördinaten zodanig dat de afstand van het voorwerp tot een vast punt constant is. Er geldt: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{constant}$. Bij een **eenparige cirkelbeweging** is bovendien de **grootte van de snelheid** constant, zodat de cirkel in een vaste tijd wordt afgelegd, maar de **richting van de snelheid** is niet constant en verandert voortdurend. Zie figuur 9.

Figuur 9 Bij een eenparige cirkelbeweging is de grootte van de snelheid constant maar de richting van de snelheid verandert voortdurend.



Omlooptijd en omloofrequentie

De tijd die nodig is om één complete cirkelbaan af te leggen is de **omlooptijd T**. De **omloofrequentie f** is het aantal omlopen per seconde.

De omlooptijd T is de tijd waarin één complete cirkelbaan wordt afgelegd (s).
De omloofrequentie f is het aantal omlopen per seconde in hertz (Hz).

$$f = \frac{1}{T}$$

Baansnelheid

Bij een eenparige cirkelbeweging is de grootte van de snelheid constant. Een volledige cirkel wordt in de omlooptijd T afgelegd. Omdat de omtrek van een cirkel gelijk is aan $2\pi \cdot r$ vinden we voor de **baansnelheid**:

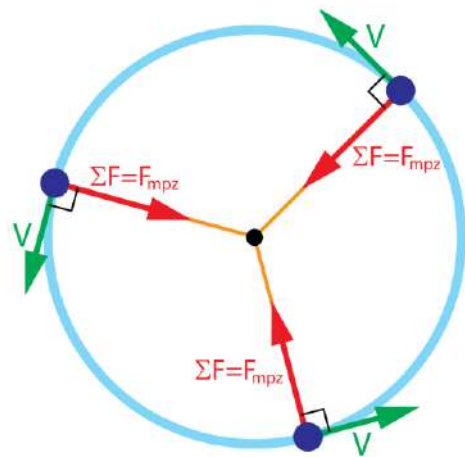
$$v_{\text{baan}} = \frac{2\pi \cdot r}{T} = 2\pi \cdot r \cdot f$$

- v_{baan} is de baansnelheid in meter per seconde (m/s)
- r is de straal in meter (m)
- T is de omlooptijd in seconde (s)
- f is de omloofrequentie in hertz (Hz)

Rechts in figuur 9 zie je dat bij een eenparige cirkelbeweging hoek α met een constante snelheid verandert. De snelheid waarmee de hoek verandert heet de **hoeksnelheid**.

Middelpuntzoekende kracht en versnelling

Om de richting van de snelheid te veranderen is een versnelling nodig en er moet dus een resulterende kracht zijn. Zonder resulterende kracht blijven zowel de grootte als de richting van de snelheid constant. Bij een eenparige cirkelbeweging verandert de grootte van de snelheid niet maar de richting wel. De resulterende kracht die wel de richting maar niet de grootte van de snelheid verandert moet daarom steeds loodrecht op de richting van de snelheid staan, en dus loodrecht op de baan. Dit kan alleen als de baan cirkelvormig is en ΣF voortdurend naar het middelpunt van deze cirkel is gericht. Zie figuur 10.



Figuur 10 De resulterende kracht bij een eenparige cirkelbeweging.

Omdat bij een eenparige cirkelbeweging ΣF steeds naar het middelpunt van de cirkelbaan wijst wordt dit de **middelpuntzoekende kracht** F_{mpz} genoemd.

Een eenparige cirkelbeweging ontstaat als de resulterende kracht constant is en naar het middelpunt wijst, zodat $\Sigma F = F_{mpz}$.

Bij een eenparige cirkelbeweging verandert de richting van ΣF voortdurend maar de grootte van ΣF is constant. Voor de grootte van $\Sigma F = F_{mpz}$ geldt:

$$\Sigma F = F_{mpz} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

- F_{mpz} is de middelpuntzoekende kracht in newton (N)
- m is de massa in kilogram (kg)
- v is de baansnelheid in meter per seconde (m/s)
- r is de straal in meter (m)

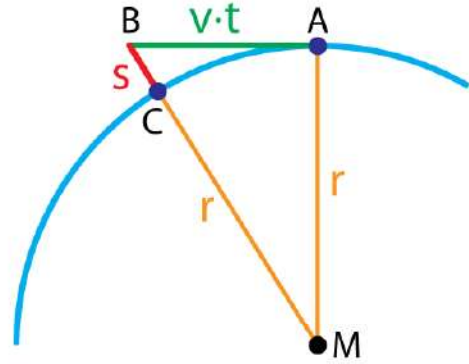
Omdat $\Sigma F = m \cdot a$ vinden we voor de middelpuntzoekende versnelling:

$$a_{mpz} = \frac{v^2}{r}$$

- a_{mpz} is de middelpuntzoekende versnelling (m/s^2)
- v is de baansnelheid in meter per seconde (m/s)
- r is de straal in meter (m)

BEWIJS (voor de liefhebber)

De formule voor de middelpuntzoekende versnelling: $a_{\text{mpz}} = v^2/r$ is in 1659 afgeleid door Christiaan Huygens (1629 – 1695). In 1673 publiceert hij deze formule in: *De vi centrifuga* ("over de middelpuntvliedende kracht"). Newton maakt later gebruik van deze formule om zijn mechanica verder te ontwikkelen. Zie figuur 11.



Figuur 11

- een voorwerp bevindt zich op plaats A met snelheid v
- als er geen kracht werkt bevindt het voorwerp zich na t seconde op plaats B
- afstand AB is $v \cdot t$
- de afstand BM noemen we ℓ : $\ell = r + s$
- pythagoras: $\ell = \sqrt{r^2 + (v \cdot t)^2} \rightarrow \ell = r \cdot \sqrt{1 + \frac{(v \cdot t)^2}{r^2}}$
- als t klein is geldt: $\frac{(v \cdot t)^2}{r^2} \ll 1$
- benadering: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ als $x \ll 1$
- $\ell \approx r \cdot \left(1 + \frac{(v \cdot t)^2}{2 \cdot r^2}\right) \rightarrow \ell \approx r + \frac{v^2 \cdot t^2}{2 \cdot r}$
- hieruit volgt: $s = \ell - r = \frac{v^2 \cdot t^2}{2 \cdot r}$
- invullen: $s = \frac{1}{2}a \cdot t^2 \rightarrow \frac{1}{2}a \cdot t^2 = \frac{v^2 \cdot t^2}{2 \cdot r} \rightarrow a = \frac{v^2}{r}$
- $\Sigma F = m \cdot a \rightarrow \Sigma F = F_{\text{mpz}} = m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{m \cdot v^2}{r}$

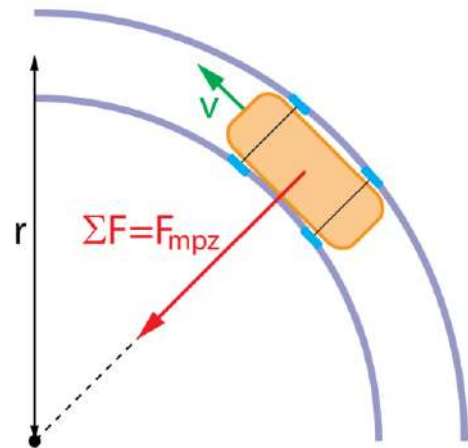
11.3 Horizontale cirkelbeweging

Een bocht maken

Om met een constante snelheid een bocht te kunnen maken moet een kracht worden uitgeoefend waarvan de richting steeds loodrecht staat op de snelheidsvector. Omdat deze kracht een cirkelbeweging veroorzaakt noem je dit de middelpuntzoekende kracht.

Als voorbeeld nemen we een trein die een bocht maakt. Zie figuur 12. Zonder resulterende kracht rijdt de trein met een constante snelheid in een rechte lijn. Omdat de rails in een bocht zijn gelegd oefenen de wielen een kracht op de rails uit. Vanwege de 3^e wet van Newton $F_{A \rightarrow B} = -F_{B \rightarrow A}$ oefenen de rails een tegengestelde kracht op de wielen uit. Deze kracht van de rails op de wielen is de zijwaarts gerichte resulterende kracht die ervoor zorgt dat de trein een bocht maakt. Als de bocht in de rails cirkelvormig is én als de trein een constante snelheid heeft is de zijwaartse kracht constant en staat die steeds loodrecht op de snelheidsvector. In dat geval geldt:

$$F_{\text{zijwaarts}} = \Sigma F = F_{\text{mpz}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$



Figuur 12

Voor een auto geldt hetzelfde als voor een trein. Het verschil is dat niet de rails maar de weg de zijwaartse kracht uitoefent. Om een bocht te maken draai je het voorwiel scheef. Door de schuifwrijving oefenen de voorbanden een kracht op de weg uit. Vanwege de 3^e wet van Newton $F_{A \rightarrow B} = -F_{B \rightarrow A}$ oefent de weg een tegengestelde kracht op de banden uit. Deze kracht van de weg op de banden is de zijwaarts gerichte resulterende kracht die ervoor zorgt dat de auto een bocht maakt.

VOORBEELD auto in een bocht

Een auto met een massa van 1200 kg moet een bocht nemen met een straal van 20 m. De maximale zijwaartse wrijvingskracht die banden op het wegdek kunnen uitoefenen is 10 kN.

Bereken de maximale snelheid waarmee de auto de bocht kan nemen.

• $m = 1200 \text{ kg} \mid r = 20 \text{ m} \mid F_{\text{W zijwaarts}} = 10 \cdot 10^3 \text{ N} \mid v = \dots \text{ m/s}$

• $F_{\text{W zijwaarts}} = \Sigma F = F_{\text{mpz}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$

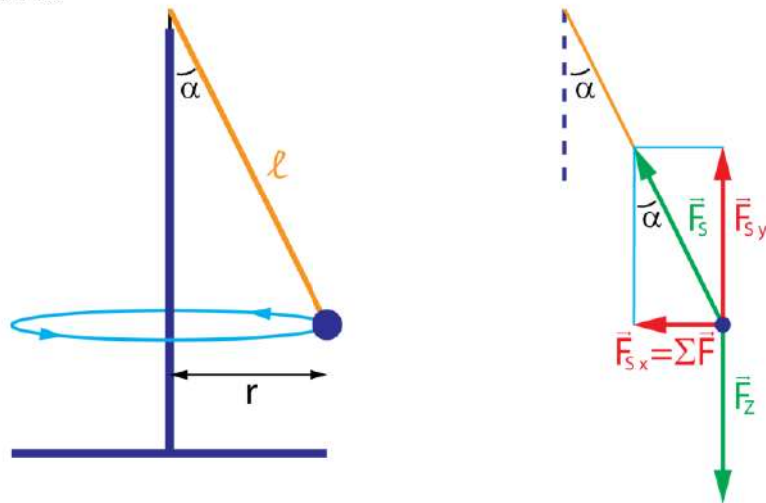
• $10000 = \frac{1200 \cdot v^2}{20} \rightarrow v^2 = 166,667$

• $v = \sqrt{166,67} = 12,9099 = 13 \text{ m/s}$

Een cirkelslinger

Bij een cirkelslinger voert een voorwerp aan een touw een cirkelbeweging uit. Zie figuur 13 links. Op het voorwerp werken de zwaartekracht F_Z en de spankracht F_S . In figuur 13 rechts zijn de krachten getekend.

Figuur 13 Een cirkelslinger.



In de verticale richting is er geen versnelling en dus geen resulterende kracht. De verticale component van de spankracht F_{Sy} is daarom gelijk aan de zwaartekracht F_Z . De horizontale component van de spankracht F_{Sx} wijst steeds naar het middelpunt en is de resulterende kracht. Bij een cirkelslinger fungeert de horizontale component van de spankracht als middelpuntzoekende kracht. Kijk je naar figuur 13 rechts dan vind je

$$\tan \alpha = \frac{F_{Sx}}{F_{Sy}} = \frac{\Sigma F}{F_Z} \rightarrow \Sigma F = F_Z \cdot \tan \alpha.$$

$$F_{\text{mpz}} = \Sigma F = F_Z \cdot \tan \alpha$$

Voor de snelheid waarmee de cirkelbaan wordt doorlopen geldt:

$$v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha}$$

- v is de snelheid waarmee de bocht wordt genomen (m/s)
- r is de straal van de bocht in meter (m)
- α is de hoek van de helling in graden (°)

BEWIJS

- $F_{\text{mpz}} = m \cdot g \cdot \tan \alpha$ en $F_{\text{mpz}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$
- $\frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g \cdot \tan \alpha$ m wegstrepen
- $\frac{v^2}{r} = g \cdot \tan \alpha \rightarrow v^2 = r \cdot g \cdot \tan \alpha \rightarrow v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha}$

Door de formules voor de snelheid $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ en $v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha}$ te combineren vind je

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g \cdot \tan \alpha}}$$

Als we bovenstaande formule vergelijken met die van een gewone slinger vinden we voor kleine hoek α bij benadering dezelfde formule.

Slinger: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ geldt alleen voor kleine hoek α

Cirkelslinger: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \cos \alpha}{g}}$ geldt altijd

BEWIJS (voor de liefhebber)

- uit figuur 13 volgt $\sin \alpha = \frac{r}{\ell} \rightarrow r = \ell \cdot \sin \alpha$
- invullen geeft $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \sin \alpha}{g \cdot \tan \alpha}}$
- gebruik $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \cos \alpha}{g}}$ als α klein is geldt $\cos \alpha \approx 1$ en worden de formules gelijk

VOORBEELD cirkelslinger versus gewone slinger

Een cirkelslinger met een lengte van 1,0 m voert een cirkelbeweging uit met een straal van 0,10 m. Zie figuur 13.

Bereken de omlooptijd T van de cirkelslinger.

- $\sin \alpha = \frac{r}{\ell} \rightarrow \sin \alpha = \frac{0,10}{1,0} \rightarrow \alpha = 5,739^\circ$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \cos \alpha}{g}} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1 \cdot \cos 5,739}{9,81}} \rightarrow T = 2,001 = 2,0 \text{ s}$

Bereken de slingertijd T van een gewone slinger.

- $\ell = 1,0 \text{ m} \mid T = \dots \text{ s}$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1,0}{9,81}} \rightarrow T = 2,006 = 2,0 \text{ s}$

Een hellende bocht

De formules die we hebben gevonden voor een cirkelslinger gelden ook bij het nemen van een bocht met een helling. In figuur 14 zie je zo'n hellende bocht bij een racecircuit.

Figuur 14 In de weg wordt een hellende bocht gemaakt, waardoor de bocht met een grotere snelheid kan worden genomen.



VOORBEELD auto in een hellende bocht

Een auto met een massa van 1500 kg neemt een hellende bocht met een straal van 100 m. De zijwaartse wrijvingskracht van de banden op weg wordt verwaarloosd. De helling in de bocht heeft een hoek van 31 graden.

Bereken de snelheid waarmee de auto de bocht moet nemen.

- $m=1500\text{ kg} \mid r=100\text{ m} \mid \alpha=31^\circ \mid v=\dots\text{m/s}$
- $v=\sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha} \rightarrow v=\sqrt{100 \cdot 9,81 \cdot \tan 31}=24,278=24\text{ m/s}$

MERK OP dat de massa van de auto geen invloed heeft.

De snelheid waarmee een hellende bocht zonder een extra weerstandskracht kan worden genomen is alleen afhankelijk van de straal r en de hoek α . Als de snelheid kleiner is dan $\sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha}$ glijdt de auto langs de helling naar beneden. Bij een grotere snelheid glijdt hij langs de helling omhoog en vliegt hij uit de bocht. En werkelijkheid is er altijd wel wrijving tussen de banden en het wegdek.

11.4 Verticale cirkelbeweging

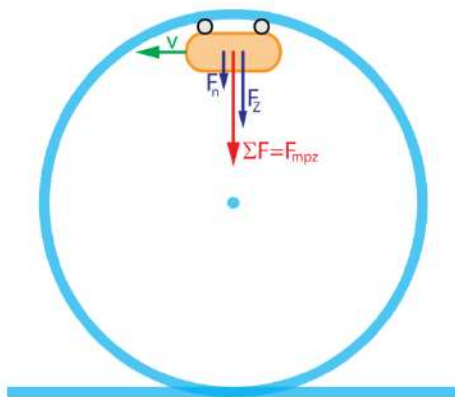
Een looping

Een looping is een voorbeeld van een verticale cirkelbeweging. Maar dit is geen eenparige cirkelbeweging, want de grootte van de snelheid is niet constant. Dit betekent dat de resulterende kracht niet steeds loodrecht op de baan staat. Alleen bovenin en onderin staat de resulterende kracht wel loodrecht op de baan en kunnen we de formule voor de middelpuntzoekende kracht gebruiken.

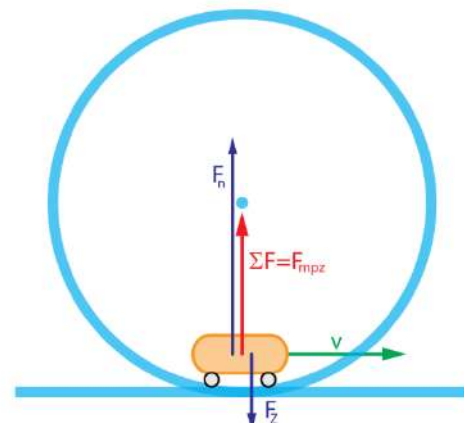


Figuur 15 Looping.

De resulterende kracht is de som van de zwaartekracht en de normaalkracht. De zwaartekracht wordt door de aarde uitgeoefend en de normaalkracht door de rails of door de beugels om je schouders.



Figuur 16 Bovenin de looping hebben F_z en F_n dezelfde richting. Er geldt:
 $\Sigma F = F_{mpz} = F_n + F_z$



Figuur 17 Onderin de looping zijn F_z en F_n tegengesteld gericht. Er geldt:
 $\Sigma F = F_{mpz} = F_n - F_z$

In figuur 16 zie je dat **bovenin** de looping de zwaartekracht en de normaalkracht dezelfde richting hebben. Dit geeft: $\Sigma F = F_{mpz} = F_n + F_z$. In figuur 17 zie je dat **onderin** de looping de zwaartekracht en de normaalkracht tegengesteld zijn. Dit geeft: $\Sigma F = F_{mpz} = F_n - F_z$.

Minimale snelheid

Als je in het treintje zit zonder beugels om je schouders heb je een minimale snelheid nodig om bovenin niet uit je stoel te vallen. Bij deze minimale snelheid is de normaalkracht nul en is de zwaartekracht gelijk aan F_{mpz} . Als de snelheid lager is dan dit minimum is de zwaartekracht groter dan F_{mpz} en kom je los van je stoel. Voor de minimale snelheid in het bovenste punt geldt:

$$v_{\min} = \sqrt{r \cdot g}$$

- $v_{\min}$ is de minimale snelheid bovenin in meter per seconde (m/s)
- r is de straal van de looping in meter (m)
- g is de valversnelling ($9,81 \text{ m/s}^2$)

BEWIJS

$$\bullet F_{\text{mpz}} = F_Z \rightarrow m \cdot \frac{v_{\min}^2}{r} = m \cdot g \rightarrow v_{\min}^2 = r \cdot g \rightarrow v_{\min} = \sqrt{r \cdot g}$$

Kleinere snelheid $v < \sqrt{r \cdot g}$

Als de snelheid kleiner is dan $v_{\min}$ zal het deel van F_Z dat groter is dan F_{mpz} ervoor zorgen dat je uit je stoel valt. Beugels om je schouders zijn nodig om dit te voorkomen. De beugels oefenen het verschil in kracht uit $F_{\text{beugels}} = F_Z - F_{\text{mpz}}$.

Grotere snelheid $v > \sqrt{r \cdot g}$

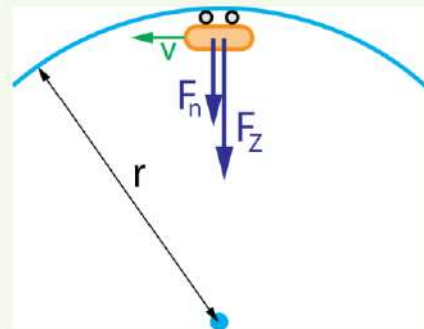
Als de snelheid groter is dan $v_{\min}$ is de zwaartekracht niet groot genoeg om de benodigde F_{mpz} te leveren. De stoel waarop je zit oefent een aanvullende kracht naar beneden uit. Beugels om je schouders zijn niet nodig.

VOORBEELD looping

Een treintje in een pretpark maakt een looping waarbij de snelheid bovenin 15 m/s is. De straal van de looping is 10 m . De massa van het treintje met passagiers is 800 kg . Zie figuur 18.

Bereken de normaalkracht bovenin.

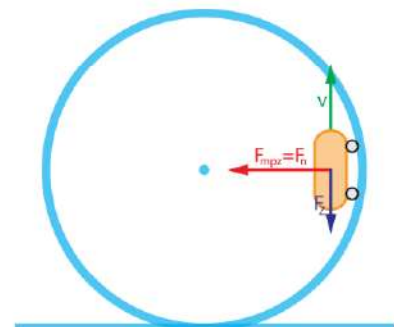
- $\Sigma F = F_{\text{mpz}} = F_n + F_Z$
- $\frac{m \cdot v^2}{r} = F_n + m \cdot g \rightarrow F_n = \frac{m \cdot v^2}{r} - m \cdot g$
- $F_n = \frac{800 \cdot 15^2}{10} - 800 \cdot 9,81 \rightarrow F_n = 1,0152 \cdot 10^4 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N}$



Figuur 18

Looping tussen onder en boven

Als het treintje niet bovenin en niet onderin is staat de resulterende kracht niet loodrecht op de snelheid. De component van ΣF in de richting van de snelheid – de tangentiële component – zorgt voor een verandering van de baansnelheid. De cirkelbeweging is niet eenparig en je mag ΣF daarom niet gelijkstellen aan F_{mpz} . Halverwege het laagste en het hoogste punt staan F_{mpz} en F_Z loodrecht op elkaar. Zie figuur 19. Op deze plaats is de middelpuntzoekende kracht gelijk aan de normaalkracht $F_{\text{mpz}} = F_n$. Weet je de snelheid halverwege dan kun je met Pythagoras de resulterende kracht uitrekenen.

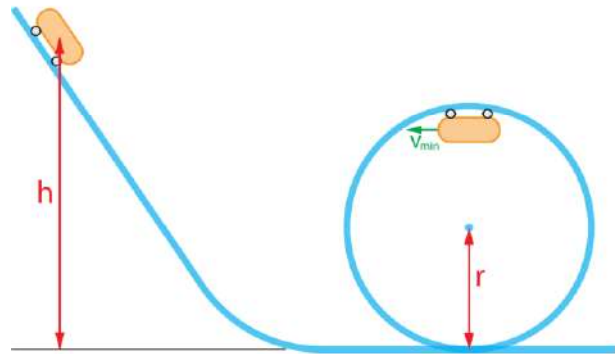


Figuur 19 Krachten halverwege. staan F_Z en F_n loodrecht op elkaar.

Wet van behoud van energie bij een looping

Ook bij een looping komt de wet van behoud van energie goed van pas. Omdat de baan-snelheid van het treintje voortdurend verandert is het berekenen van de snelheid met bewegingsvergelijkingen erg moeilijk. Door naar de energie te kijken wordt het allemaal een stuk makkelijker.

Stel we willen berekenen op welke hoogte het treintje moet worden losgelaten om bovenin de looping de minimale snelheid $v_{\min} = \sqrt{r \cdot g}$ te hebben. Zie figuur 20. We verwaarlozen de weerstandskrachten. Bij het loslaten heeft het treintje geen snelheid en heeft dan alleen zwaarte energie. Bovenin de looping heeft het treintje zwaarte energie én kinetische energie. De hoogte bovenin de looping is twee keer de straal.



Figuur 20 De hoogte waarop het treintje wordt losgelaten.

Omdat weerstandskrachten worden verwaarloosd mogen we de energie aan het begin gelijkstellen aan de energie bovenin de looping (eind). Hieruit volgt:

$$h_{\min} = 2,5 \cdot r$$

BEWIJS

- $E_{\text{begin}} = E_z = m \cdot g \cdot h$
- $E_{\text{eind}} = E_z = m \cdot g \cdot 2r + \frac{1}{2} m \cdot v^2$
- $v = v_{\min} \rightarrow v^2 = v_{\min}^2 = r \cdot g$
- $E_{\text{begin}} = E_{\text{eind}} \rightarrow m \cdot g \cdot h_{\min} = m \cdot g \cdot 2r + \frac{1}{2} m \cdot r \cdot g$ m wegstrepen
- $g \cdot h_{\min} = g \cdot 2r + \frac{1}{2} r \cdot g \rightarrow h_{\min} = 2,5 \cdot r$ g wegstrepen

11.5 Gravitatie

De gravitatiewet van Newton

De zwaartekracht op aarde volgt uit de algemene gravitatiewet van Newton. Hij veronderstelt dat massa's elkaar altijd aantrekken en dat deze aantrekkende kracht op de een of andere manier op afstand werkt. Hij heeft geen idee waarom dit zo is en wil daar ook niet over speculeren. In zijn boek *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (filosofie van de natuur op wiskundige grondslag) uit 1687 zet hij zijn ideeën uiteen. Volgens Newton is er een aantrekkende **gravitatiekracht** tussen twee voorwerpen.

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

- F_G is de gravitatiekracht in newton (N)
- G is de gravitatieconstante $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- m is de massa van voorwerp 1 in kilogram (kg)
- M is de massa van voorwerp 2 in kilogram (kg)
- r is de afstand tussen de zwaartepunten van beide voorwerpen in meter (m)

Omdat G zo klein is, is de gravitatiekracht veruit de zwakste kracht in de natuurkunde. Alle andere krachten, zoals de elektrische en magnetische kracht en de krachten in een atoomkern zijn onnoemelijk veel sterker. Alleen als één van de voorwerpen erg veel massa heeft, zoals een ster of een planeet, wordt de gravitatiekracht duidelijk merkbaar. We geven dit aan in de formule door kleine letter m voor de kleine massa en hoofdletter M voor de grote massa te gebruiken. Maar de gravitatiekracht werkt ook tussen bijvoorbeeld je potlood en je gum. Daar merk je alleen niets van, omdat deze aantrekkende kracht onmeetbaar klein is. In de scheikunde speelt de gravitatiekracht dan ook geen rol. Het zijn elektrische en magnetische krachten die het verloop van chemische reacties bepalen.

Gravitatiekracht en zwaartekracht

De formule voor de zwaartekracht op aarde $F_z = m \cdot g$ met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ komt voort uit de gravitatiewet van Newton. Passen we de gravitatiewet toe op een voorwerp met massa m op het oppervlak van de aarde dan vinden we:

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}^2} \rightarrow F_G = m \cdot \left(G \cdot \frac{M_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}^2} \right)$$

Vul je de waarden voor G , m_{aarde} en r_{aarde} in dan vind je $9,81 \text{ m/s}^2$ wat gelijk is aan de valversnelling g . Op dezelfde manier kun je voor ieder hemellichaam de valversnelling aan het oppervlak uitrekenen.

$$g = \left(G \cdot \frac{M_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}^2} \right)$$

Ellipsvormige banen

Als je op aarde met grote snelheid een kogel wegschiet heeft de kogel een baan zoals te zien in figuur 21. Vanwege de kromming van het aardoppervlak verdwijnt de kogel achter de horizon.

Figuur 21 Een voorwerp achter de horizon schieten.



De straal van de aarde is 6371 km. Hieruit kun je berekenen dat na 8,0 km het oppervlak van de aarde 5,0 m onder de horizon ligt. Zie figuur 22 (niet op schaal).

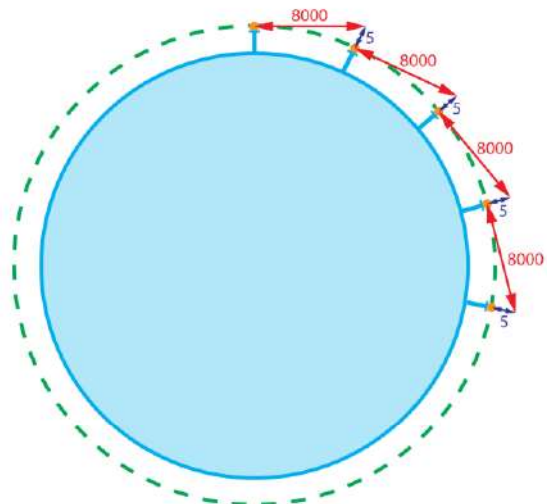
Figuur 22 Na 8,0 km ligt het oppervlak van de aarde 5,0 m onder de horizon.



Laten we het volgende gedachtenexperiment doen. We schieten een kogel van een 10 meter hoge toren horizontaal weg met een snelheid van 8,0 km/s. Uiteraard zal de luchtweerstand bij zo'n snelheid groot zijn, maar in onze redenering houden we daar geen rekening mee. We doen alsof de aarde geen dampkring heeft. Bij een horizontale snelheid van 8,0 km/s heeft de kogel in één seconde horizontaal 8000 m afgelegd. In één seconde valt de kogel 5 meter omlaag, maar na 8000 meter ligt het aardoppervlak ook 5 meter onder de horizon. De kogel is na één seconde dus nog steeds 10 meter boven de grond. In de volgende seconde herhaalt dit zich, met als resultaat dat de kogel het aardoppervlak nooit zal bereiken, zie figuur 23.

Dit inzicht bracht Newton ertoe de baan van de maan om de aarde op te vatten als het vallen van de maan naar de aarde, zonder ooit het aardoppervlak te bereiken. Ter hoogte van de maan is er geen luchtweerstand en de maan zal dus altijd om de aarde blijven draaien. Ons gedachtenexperiment verklaart de beweging van de maan om de aarde, van de aarde om de zon en van alle andere hemellichamen die om elkaar heen bewegen.

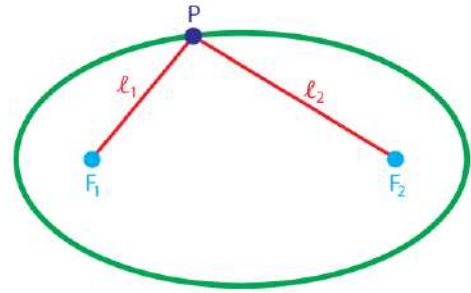
Figuur 23 Zonder luchtweerstand komt een projectiel dat met 8,0 km/s horizontaal wordt weggeschoten nooit aan bij het aardoppervlak.



Gravitatiekracht gericht naar het middelpunt van de aarde

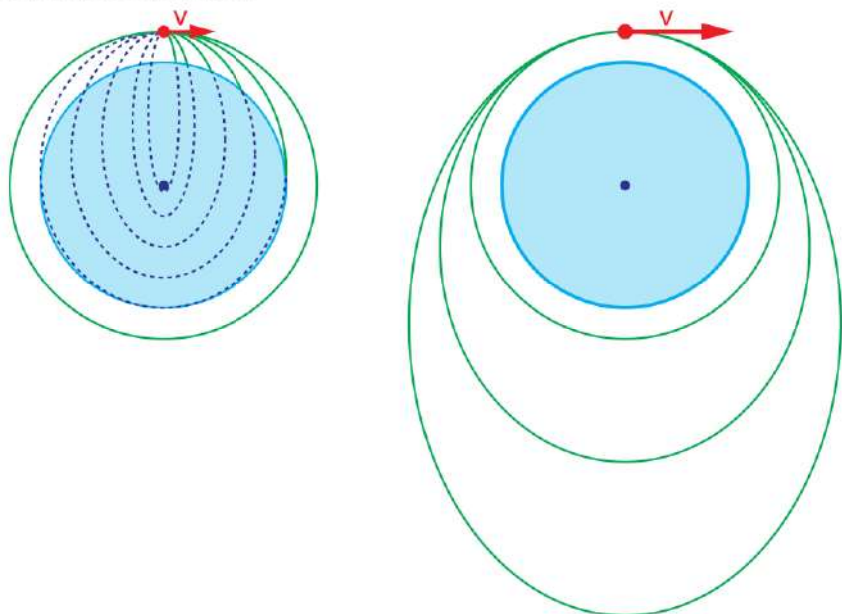
De gravitatiekracht is gericht naar het middelpunt van de aarde. Schiet je een kogel horizontaal weg dan krijgt de kogel een ellipsvormige baan. Een ellips is een speciale curve. Een punt beweegt in een elliptische baan als de som van de afstanden tot twee

vaste punten (de brandpunten) constant is. In figuur 24 zie je een ellips met twee brandpunten F_1 en F_2 . De afstanden van punt P tot deze brandpunten zijn ℓ_1 en ℓ_2 . Voor ieder punt P op de ellips is $\ell_1 + \ell_2$ hetzelfde.



Figuur 24 Een ellips heeft twee brandpunten F_1 en F_2 . Voor ieder punt P op de ellips geldt: $\ell_1 + \ell_2 = \text{constant}$.

In figuur 25 zie je de baan van een horizontaal weggeschoten projectiel zonder luchtweerstand. We maken de horizontale snelheid steeds groter. In figuur 25 links is de beginsnelheid kleiner dan 8,0 km/s, zodat het projectiel met een elliptische baan op aarde valt. De doorgetrokken lijnen zijn de banen tot aan het aardoppervlak. De gestreepte lijnen zijn de denkbeeldige banen als het projectiel dwars door de aarde zou kunnen bewegen. In figuur 25 rechts is de beginsnelheid groter dan 8,0 km/s en wordt het projectiel een satelliet van de aarde met een elliptische baan.



Figuur 25 Links, horizontaal weggeschoten projectiel met $v_{\text{begin}} < 8,0 \text{ km/s}$. Rechts, horizontaal weggeschoten projectiel met $v_{\text{begin}} > 8,0 \text{ km/s}$.

Hoewel gravitatiekracht een ellipsvormige baan geeft, houden we daar bij onze berekeningen geen rekening mee. We gaan uit van cirkelvormige banen en gebruiken de formule voor de middelpuntzoekende kracht. Dit mag zolang de ellips niet al te veel is uitgerekt, zoals bij de planeten in ons zonnestelsel die vrijwel cirkelvormige banen om de zon hebben. Omdat in de ruimte alleen de gravitatiekracht werkt geldt:

$$\Sigma F = F_G = F_{\text{mpz}} \rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

- F_G is de gravitatiekracht in newton (N)
- G is de gravitatieconstante: $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- m is de massa van het voorwerp met de cirkelbaan in kilogram (kg)
- M is de massa van voorwerp in het middelpunt van de cirkelbaan in kilogram (kg)
- r is de afstand tussen de zwaartepunten van beide massa's in meter (m)
- v is de baansnelheid van voorwerp met massa m in meter per seconde (m/s)

Hieruit kun je de volgende formule voor de baansnelheid afleiden.

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

BEWIJS

$$\bullet \quad F_G = F_{\text{mpz}} \rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M}{r} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Combineren we bovenstaande formule met $v = 2\pi \cdot r / T$ dan vinden we een formule die door Johannes Kepler (1571–1630) is gebruikt om de afstanden van de planeten tot de zon te berekenen en bekend staat als de **derde wet van Kepler**

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

BEWIJS

$$\begin{aligned} \bullet \quad v &= \frac{2\pi \cdot r}{T} \rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} \\ \bullet \quad \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} &= \frac{G \cdot M}{r} \rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2} \end{aligned}$$

VOORBEELD de massa van de zon

De afstand van de aarde tot het middelpunt van de zon is $1,496 \cdot 10^{11}$ m. De omlooptijd van de aarde om de zon is 365,256 dagen.

Bereken de massa van de zon.

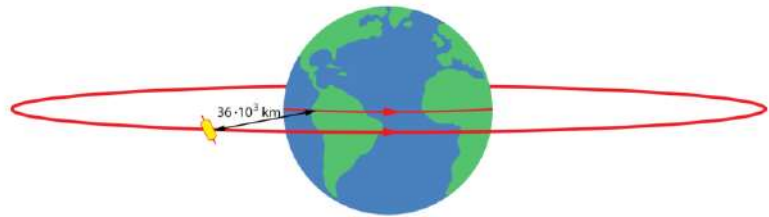
$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{r^3}{T^2} &= \frac{G \cdot M}{4\pi^2} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} \\ \bullet \quad M &= \frac{4\pi^2 \cdot (1,496 \cdot 10^{11})^3}{6,6743 \cdot 10^{-11} \cdot (365,256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 1,9885 \cdot 10^{30} \text{ kg} \end{aligned}$$

Geostationaire satellieten

Een geostationaire satelliet heeft een vaste plaats ten opzichte van het aardoppervlak. En omdat de aarde in 24 uur om haar as draait moet zo'n satelliet ook in 24 uur een volledige baan om de aarde afleggen. Verder moet een geostationaire satelliet zich boven de evenaar bevinden, zodat het vlak waarin de satelliet beweegt loodrecht staat op de draaias van de aarde. De straal van de baan van een geostationaire satelliet kun je met de 3^e wet van Kepler berekenen $T = 24\text{h} = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ s waaruit volgt $r = 4,22407 \cdot 10^7$ m. De

hoogte van een geostationaire satelliet boven het aardoppervlak vind je door hiervan de straal van de aarde (6371 km) af te trekken: $h_{\text{geo}} = 4,22407 \cdot 10^7 - 6,371 \cdot 10^6 = 3,58697 \cdot 10^7 \text{ m}$ (35.870 km). Zie figuur 26.

Figuur 26 Een geostationaire satelliet staat op een vast punt boven de evenaar op een hoogte van 36 duizend kilometer.



Geostationaire satellieten worden toegepast voor het uitzenden van televisie en radio signalen. De Europese ASTRA satellieten zenden digitale televisie en radiosignalen uit die je met een schotelantenne kunt ontvangen. Momenteel zijn er elf ASTRA satellieten in bedrijf. Ook voor satelliettelefoon worden soms geostationaire satellieten gebruikt.

Satellieten op lage hoogte

Een satelliet kan ook net buiten de dampkring op zeer lage hoogte rondjes om de aarde draaien. De dampkring wordt steeds ijler en op 200 km hoogte is er nog maar weinig luchtweerstand. Omdat 200 km klein is ten opzichte van de straal van de aarde, kunnen we voor de straal van de satellietbaan bij benadering de straal van de aarde invullen

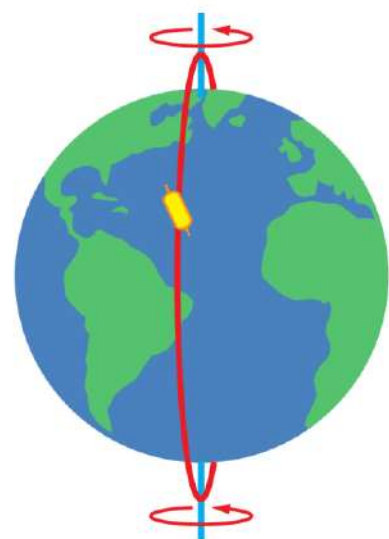
$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_{\text{aarde}}}{4\pi^2} \quad \text{met } r = 6,371 \cdot 10^6 \rightarrow T = 50609 \text{ s} \quad (\text{ongeveer anderhalf uur})$$

$$\text{Voor de snelheid vinden we } v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \rightarrow v = \frac{2\pi \cdot 6,371 \cdot 10^6}{5066} \rightarrow v = 7,90968 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Deze snelheid is ongeveer 8 km/s en zijn we eerder tegengekomen toen we de kromming van het aardoppervlak in rekening brachten bij een horizontaal weggeschoten projectiel.

Satellieten met polaire banen

Satellieten met polaire banen draaien om de Noord- en Zuidpool. Ze staan niet op een vaste plaats boven het aardoppervlak maar hebben een lage baan van bijvoorbeeld 400 km hoogte. Deze satellieten worden gebruikt om het aardoppervlak te observeren. Weersatellieten en spionagesatellieten horen tot deze categorie. De baansnelheid van een polaire satelliet is hoog en zijn omlooptijd is klein. Ze draaien rondjes om de aarde in iets meer dan $1,5$ uur en terwijl ze dat doen draait de aarde onder hen door. In een dag beweegt de satelliet 16 keer om de aarde, waarbij de aarde steeds $360/16 = 22,5$ graden om haar as is gedraaid. Zie figuur 27.

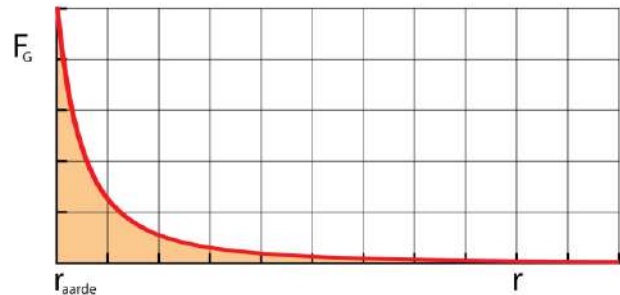


Figuur 27 Een polaire satelliet heeft een korte omlooptijd over de Noord- en Zuidpool.

Gravitatie energie

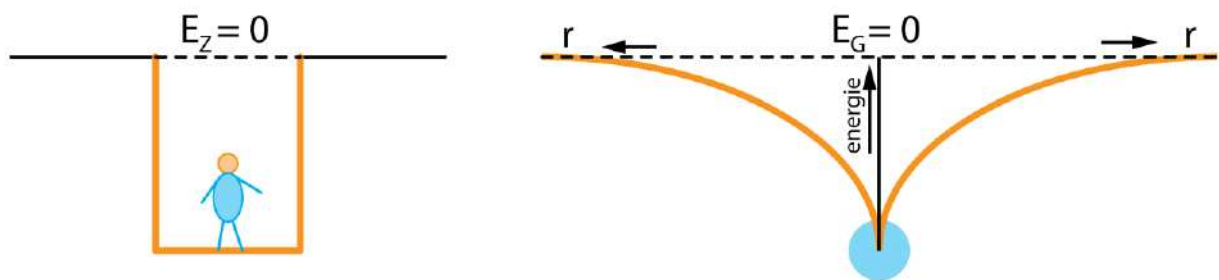
In een eerder hoofdstuk zijn we de zwaarte energie tegengekomen $E_z = m \cdot g \cdot h$. Deze formule geldt alleen vlakbij het oppervlak van de aarde, want op grote hoogte is de valversnelling kleiner dan $9,81 \text{ m/s}^2$ en mag je de formule dus niet meer gebruiken. In plaats van de zwaarte energie moet je de **gravitatie energie** gebruiken, die gebaseerd is op de gravitatiewet van Newton en daarom altijd geldig is.

De gravitatie energie is gelijk aan de arbeid die nodig is om een voorwerp met massa m vanaf het aardoppervlak tot hoogte h te verplaatsen. Er geldt $W = F_G \cdot s$ en omdat de gravitatiekracht kleiner wordt als de hoogte toeneemt moet je de oppervlakte onder de (F_G, r) -grafiek berekenen, waarbij r de afstand is tot het middelpunt van de aarde. Zie figuur 28.



Figuur 28 Gravitatiekracht als functie van de afstand.

Bij berekeningen met zwaarte energie, $E_z = m \cdot g \cdot h$, stel je de hoogte op nul op het oppervlak van de aarde. E_z is dan nul op het aardoppervlak en wordt groter als h toeneemt. Maar bij berekeningen met gravitatie energie is dit niet handig, omdat je hierbij de afstand tot het middelpunt van de aarde gebruikt. Het is daarom beter om het nulpunt van de gravitatie energie op oneindig grote afstand van de aarde te plaatsen. Een voorwerp op het oppervlak van de aarde bevindt zich dan in een energieput met negatieve energie. Zie figuur 29. Negatieve energie klinkt misschien raar maar is dat niet. Als je het nulpunt van zwaarte energie kiest op het oppervlak van de aarde dan heb je negatieve energie als je in een kuil zit, want het kost dan arbeid om uit de kuil te klimmen om op energie nul uit te komen. Hetzelfde idee gebruiken we voor de gravitatie energie. We zitten gevangen in een energieput op het oppervlak van de aarde. Het kost arbeid om hieruit te ontsnappen en op oneindig grote afstand van de aarde te komen.



Figuur 29 Links stel je de zwaarte energie op het aardoppervlak op nul en heb je negatieve energie als je in een put zit. Rechts stel je de gravitatie energie op oneindig grote afstand van de aarde op nul en heb je negatieve energie op het aardoppervlak. Op het oppervlak van de aarde zit je in een energieput.

Met deze afspraak voor het nulpunt geldt voor de **gravitatie energie**:

$$E_G = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

- E_G is de gravitatie energie in joule (J)
- G is de gravitatieconstante: $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- m is de massa van het voorwerp dat wordt verplaatst in kilogram (kg)
- M is de massa van het hemellichaam in kilogram (kg)
- r is de afstand tussen de zwaartepunten van beide massa's in meter (m)

BEWIJS (voor de liefhebber)

- bereken de integraal $W = \int_r^\infty F_G \, dr$
- $W = \int_r^\infty G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \, dr \rightarrow W = G \cdot m \cdot M \cdot \int_r^\infty \frac{1}{r^2} \, dr$
- de primitieve van $\frac{1}{x^2}$ is $-\frac{1}{x}$
- $W = G \cdot m \cdot M \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_r^\infty \rightarrow W = G \cdot m \cdot M \cdot \left(0 - \frac{-1}{r} \right)$
- $W = G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$ dit is de arbeid die nodig is om uit de put te komen
- $W = E_{G\text{eind}} - E_{G\text{begin}} \rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r} = 0 - E_{G\text{begin}} \rightarrow E_{G\text{begin}} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$

VOORBEELD geostationaire satelliet

Een geostationaire satelliet moet vanaf de oppervlakte van de aarde in een baan op een afstand van $r = 4,22407 \cdot 10^7 \text{ m}$ worden gebracht. De satelliet wordt gelanceerd vanaf de evenaar en heeft een massa van $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$.

Bereken hoeveel energie hiervoor nodig is.

- BEGIN satelliet op de oppervlakte van de aarde bij de evenaar $r = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$
- $E_{G\text{begin}} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r} \rightarrow E_{G\text{begin}} = -6,6743 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{6,378 \cdot 10^6} = -6,24944 \cdot 10^{10} \text{ J}$
- EIND satelliet op afstand $r = 4,22407 \cdot 10^7 \text{ m}$
- $E_{G\text{eind}} = -6,6743 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{4,22407 \cdot 10^7} = -9,43614 \cdot 10^9 \text{ J}$
- VERSCHIL
- $E_{G\text{eind}} - E_{G\text{begin}} = -9,43614 \cdot 10^9 - (-6,24944 \cdot 10^{10}) = 5,30583 \cdot 10^{10} = 5,3 \cdot 10^{10} \text{ J}$

Ontsnappingssnelheid

Stel we schieten een projectiel vanaf de oppervlakte van de aarde in de ruimte. Zoals we hebben gezien is er een snelheid van $8,0 \text{ km/s}$ nodig om het projectiel in een baan om de aarde te brengen. Bij een snelheid groter dan $8,0 \text{ km/s}$ wordt de ellipsvormige baan steeds langwerpiger. Bij een bepaalde snelheid komt het projectiel niet in een baan om de aarde maar ontsnapt het uit de energieput. De minimale snelheid die hiervoor nodig is heet de

ontsnappingsnelheid. Om die te berekenen stellen we de kinetische energie van het projectiel op het aardoppervlak gelijk aan de diepte van de energieput.

$$E_{G\text{ begin}} = -G \cdot \frac{m \cdot M_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}} \quad | \quad E_{G\text{ eind}} = 0 \rightarrow \Delta E_G = E_{G\text{ eind}} - E_{G\text{ begin}} = G \cdot \frac{m \cdot M_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}}$$

De kinetische energie waarmee het projectiel wordt weggeschoten moet minimaal gelijk zijn aan dit verschil in energie:

$$E_{K\text{ ontsnap}} = E_{G\text{ eind}} - E_{G\text{ begin}} \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{ontsnap}}^2 = G \cdot \frac{m \cdot M_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}} \rightarrow v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}}}$$

Deze formule geldt niet alleen voor de aarde maar voor alle hemellichamen en we vinden

$$v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}$$

- v_{ontsnap} is de ontsnappingsnelheid in meter per seconde (m/s)
- G is de gravitatieconstante $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- M is de massa van het hemellichaam in kilogram (kg)
- r is de afstand tot het middelpunt van dit hemellichaam in meter (m)

Vullen we de gegevens in dan vinden we voor de aarde: $v_{\text{ontsnap}} = 11,186 \text{ km/s}$ (ongeveer 40000 km/h). De ontsnappingsnelheid wordt bepaald door de verhouding tussen de massa en de straal en is voor ieder hemellichaam anders.

Hemellichaam	Ontsnappingsnelheid
Aarde	11,2 km/s
Maan	2,38 km/s
Mars	5,03 km/s
Jupiter	59,5 km/s
Zon	600 km/s
zwart-gat	meer dan de lichtsnelheid

11.6 Samenvatting

Grootheden en eenheden

- T is de omlooptijd in seconde (s)
- f is de omloofrequentie in hertz (Hz)
- g is de valversnelling op aarde in meter per seconde kwadraat (m/s^2)
- G is de gravitatieconstante ($\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$)
- m en M zijn de massa's die elkaar aantrekken in kilogram (kg)
- r is de afstand tussen de zwaartepunten van m en M in meter (m)
- E_G is de gravitatie energie in joule (J)
- v_{ontsnap} is de ontsnappingssnelheid in meter per seconde (m/s)

Weten

- Bewegingen in de x- en y richtingen zijn onafhankelijk.
- De richting van de snelheid is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan.
- F_{mpz} is de kracht die nodig is om een cirkelbeweging te kunnen krijgen.
- Voor een eenparige cirkelbeweging geldt: $\Sigma F = F_{\text{mpz}}$ $v_{\text{baan}} = \text{constant}$
- Bij een cirkelslinger is F_{mpz} de vectorsom van de zwaartekracht en de spankracht.
- Bij een looping is F_{mpz} de vectorsom van de zwaartekracht en de normaalkracht.
- Een geostationaire satelliet heeft een vaste plaats ten opzichte van het aardoppervlak. De afstand tot het middelpunt van de aarde is $4,224 \cdot 10^7$ m en de omlooptijd $T = 24$ h. Ze worden gebruikt voor communicatie (satelliettelefoon en televisie).
- Een polaire satelliet cirkelt boven de polen op lage hoogte met een korte omlooptijd. Ze worden gebruikt voor aardobservatie (weerkunde en spionage).
- De ontsnappingssnelheid is de minimale snelheid die nodig is om van het oppervlak van een hemellichaam te ontsnappen in de ruimte.
- $F_z = m \cdot g$ mag je alleen gebruiken op het oppervlak van een hemellichaam.
- $E_z = m \cdot g \cdot h$ mag je alleen gebruiken op het oppervlak van een hemellichaam.
- In de ruimte moet je altijd de gravitatiekracht $F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ gebruiken.
- In de ruimte moet je altijd de gravitatie energie $E_G = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$ gebruiken.

Formules

$$f = \frac{1}{T} \leftrightarrow T = \frac{1}{f}$$

$$v_{\text{baan}} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\Sigma F = F_{\text{mpz}} = \frac{m \cdot v_{\text{baan}}^2}{r}$$

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

gravitatiekracht

$$g = \left(G \cdot \frac{M_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}^2} \right)$$

valversnelling aarde

$$E_G = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

gravitatie energie

$$v_{\text{baan}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

baansnelheid van een satelliet of planeet

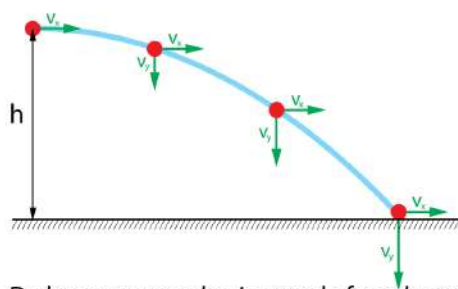
$$v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}$$

ontsnappingsnelheid van een voorwerp

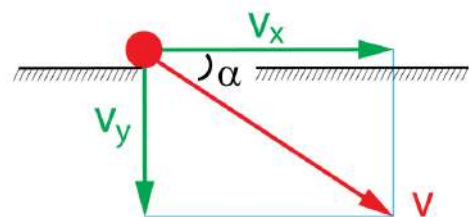
$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

3^e wet van Kepler, M is de massa in het middelpunt

Figuren

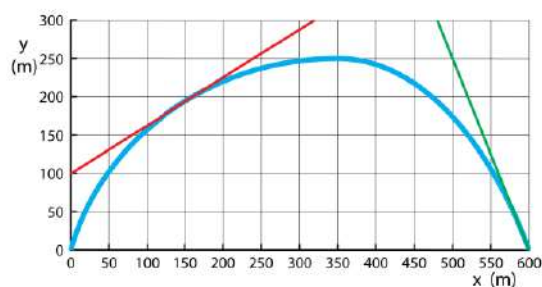


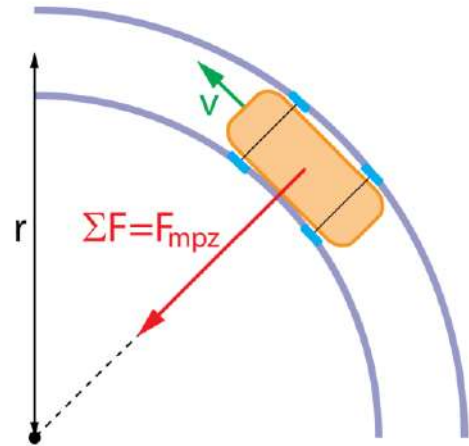
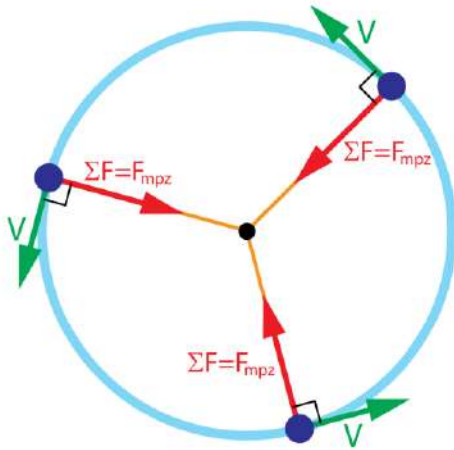
De baan van een horizontaal afgeschoten voorwerp.



De richting van de snelheid als het projectiel de grond raakt.

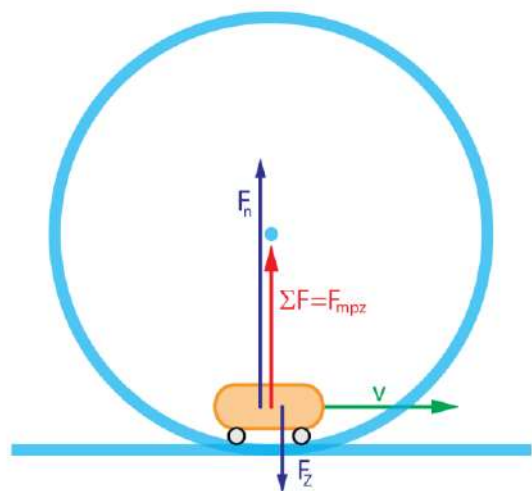
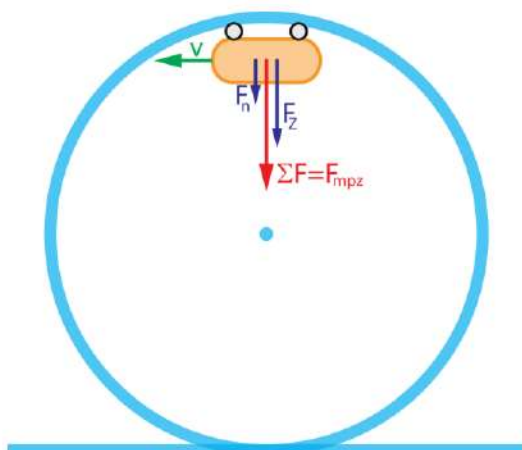
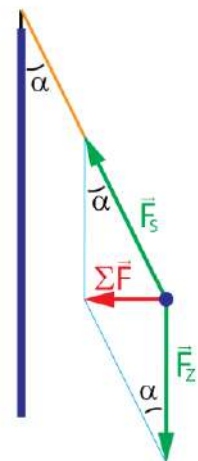
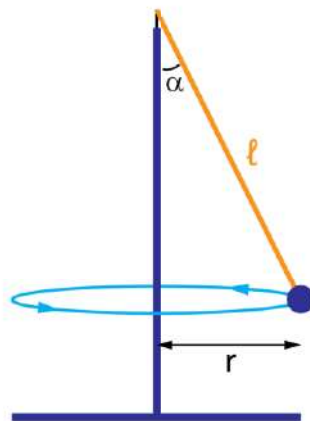
De richting van de snelheid op tijdstip t is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan.



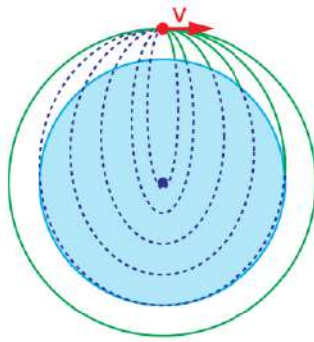


Bij een eenparige cirkelbeweging is er een resulterende kracht loodrecht op de snelheidsvector, waardoor de richting van de snelheid steeds verandert maar de grootte van de snelheid constant blijft.

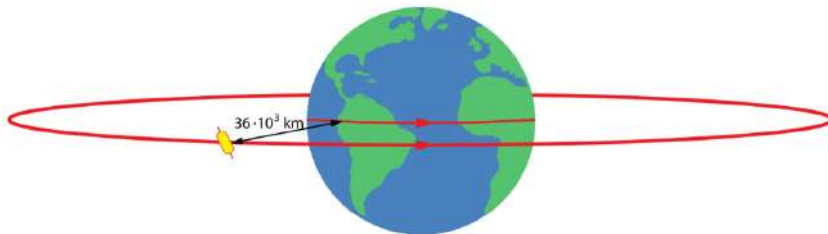
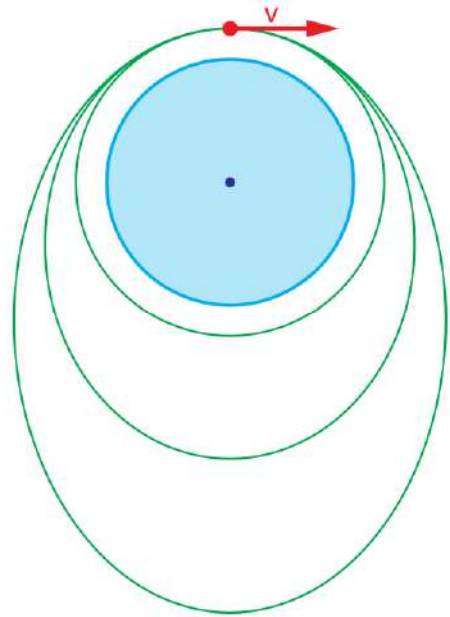
Horizontale cirkelbeweging. De zwaartekracht plus de spankracht geven een middelpuntzoekende kracht.



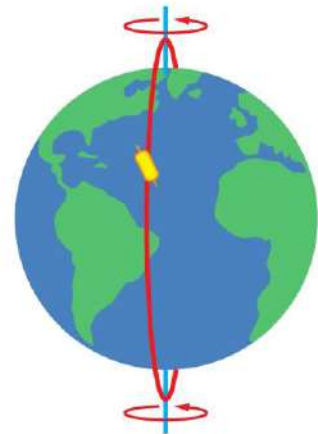
Verticale cirkelbeweging. De zwaartekracht plus de normaalkracht geven een middelpuntzoekende kracht. Bovenin staan de zwaartekracht en de normaalkracht in dezelfde richting. Onderin staan ze in tegengestelde richting.



Een horizontaal weggeschoten projectiel met $v < 8,0$ km/s valt terug op aarde. Bij $v > 8,0$ km/s krijgt het projectiel een ellipsvormige baan om de aarde. Bij $v > 11,2$ km/s ontsnapt het projectiel naar de ruimte.

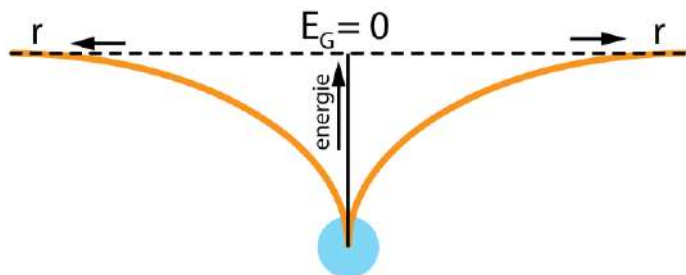
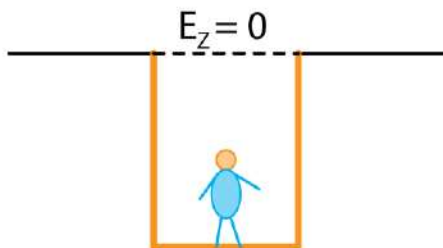
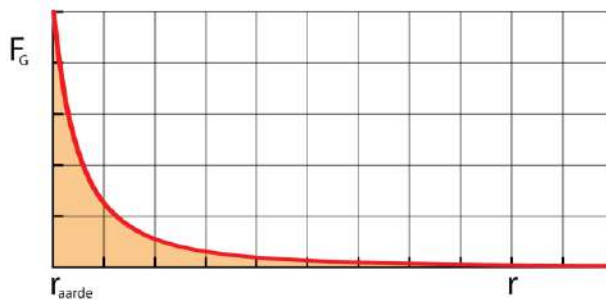


Een geostationaire satelliet staat op een vast punt boven de evenaar op een hoogte van 36 duizend kilometer.



Een polaire satelliet draait met een korte omlooptijd om de polen. De aarde draait er onder, zodat het hele aardoppervlak kan worden waargenomen.

Gravitatiekracht als functie van de afstand.



Negatieve zwaarte energie als je in een put zit. Negatieve gravitatie energie omdat we energie op grote afstand in de ruimte op nul hebben gesteld.