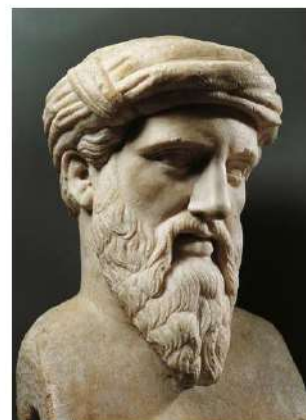


10 Golven

vwo

10.0 Inleiding

Pythagoras (570 – 500 v. Chr.) is een zonderlinge figuur waar veel over is geschreven. In 540 v. Chr. verhuist hij van Samos, een eiland voor de Turkse kust, naar Croton aan de zuid Italiaanse kust waar hij een gemeenschap opricht met 300 leerlingen om hen te onderwijzen in zijn filosofische gedachten. Bekend is zijn onderzoek aan de tonen in de muziek. Hij gebruikt een plank met een ingeklemde snaar verdeeld in 12 stukken, waarmee hij aantoont dat alleen bij de juiste verhoudingen muzieknoten als harmonisch worden ervaren. Hoe de lengte van de snaar samenhangt met de frequentie van de muzieknoot wist hij niet, maar in zijn redenering gebruikt hij de kennis die we nu hebben over staande golven in een snaar.



Pythagoras

Christiaan Huygens (1629 – 1695) heeft een grote bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de natuurkunde. Zijn vader Constantijn Huygens is een belangrijke diplomaat en adviseur van de Oranjes en daarnaast ook dichter, componist en architect. Christiaan krijgt privées en is bijzonder leergierig. Behalve theoretische vakken, zoals wiskunde, logica, Latijn, Grieks, Frans en Italiaans vindt Christiaan het ook leuk om met zijn handen te werken. In 1645 gaat hij rechten en wiskunde studeren aan de Universiteit Leiden. Na twee jaar vertrekt hij naar Breda, waar Frederik Hendrik van Oranje een school met universitair onderwijs heeft opgericht. Door toedoen van zijn invloedrijke vader komt Christiaan in contact met vooraanstaande wiskundigen, zoals René Descartes en Marin Mersenne.



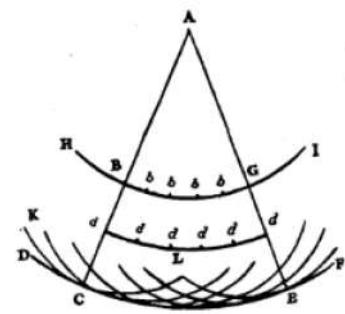
Christiaan Huygens

In 1649 schrijft Christiaan zijn eerste publicaties over de oppervlakten van hyperbolen, ellipsen en cirkels. Hij raakt steeds meer geïnteresseerd in natuurkundige problemen en richt zich op optica, het slingeruurwerk en de kansrekening. Ook als uitvinder is hij actief. Zo bedenkt hij een lenscombinatie die zo min mogelijk kleurafwijking vertoont en een apparaat waarmee je lenzen kunt slijpen. Hij ontwerpt de slingerklok en het zakhorloge en hij vindt de toverlantaarn uit, waarmee je plaatjes kunt projecteren die lijken te bewegen als je ze snel verwisseld. Hij schrijft over de werking van de stoommachine en de buskruitmotor. En hij bedenkt de 31-toonzetting, waarbij het octaaf in 31 intervallen is verdeeld in plaats van de gebruikelijke 12 halve tonen.

In 1663 wordt Huygens lid van de Royal Society in Londen en in 1666 onderzoeksdirecteur van de Franse academie van wetenschappen in Parijs. In 1672 verklaart Frankrijk de oorlog aan Nederland, waardoor zijn verblijf in Parijs steeds lastiger wordt. Hij wordt tegengewerkt, raakt depressief en keert in 1681 terug naar Den Haag. Hij is niet meer welkom in Parijs en gaat op buitenplaats Hofwijck in Voorburg wonen. In 1689 bezoekt hij Londen, waar hij onder andere Isaac Newton spreekt. Op een aantal punten is hij het volstrekt oneens met Newton. Zo beweert Newton dat licht uit deeltjes bestaat maar volgens Huygens zijn het golven.

In zijn boek "Traité de la lumière" uit 1690 toont Huygens aan dat licht een golf is en zijn golftheorie van licht staat nu bekend als **het principe van Huygens**.

"Elk punt van een golf front is op te vatten als een nieuwe trillingsbron, die op zijn beurt lichtgolven uitzendt. Een nieuw golf front vindt men door de omhullende van deze elementaire golf fronten te nemen".



Illustratie in Traité de la lumière.

Isaac Newton gaat in zijn boek Optics uit 1704 tegen de golftheorie van Huygens in. Volgens hem bestaat licht uit deeltjes. Met beide theorieën kun je het terugkaatsen en breken van licht verklaren. Lange tijd is het onduidelijk wie er gelijk heeft. Maar dat verandert in 1801 door het beroemde tweespleten experiment van Thomas Young.

Thomas Young (1773 – 1829) is ook al zo'n alleskunner. Hij is arts, natuurkundige en egyptoloog. Zo onderzoekt hij de Steen van Rosetta, waarmee hij verschillende hiërogliefen kan vertalen. Zijn ontcijfering van de hiërogliefen wordt later afgerond door Champollion. In de natuurkunde is hij vooral beroemd door het twee-spleten experiment. Als licht door twee spleten gaat zie je op het scherm plaatsen waar veel licht komt en plaatsen waar vrijwel geen licht komt. Dit verschijnsel kennen we nu als interferentie. Interferentie is een typische eigenschap van golven, want golven kunnen elkaar uitdoven maar deeltjes kunnen dat niet.



Thomas Young

Het tweespleten experiment toont aan dat Huygens gelijk heeft en dat licht een golf is. In 1873 ontwikkelt James Clerk Maxwell (1831–1879) een theorie die licht in verband brengt met elektriciteit en magnetisme. Licht is een elektromagnetische golf en in het hoofdstuk "Elektromagnetische straling" leer je hier meer over. Toch is dit niet het einde van het verhaal, want in 1905 toont Albert Einstein aan dat je licht ook mag opvatten als een stroom deeltjes. En dit wordt het begin van de kwantummechanica. Het is niet golf OF deeltje maar golf EN deeltje. Een bizar einde van een discussie die meer dan 200 jaar heeft geduurd.



James Clerk Maxwell

Inhoud

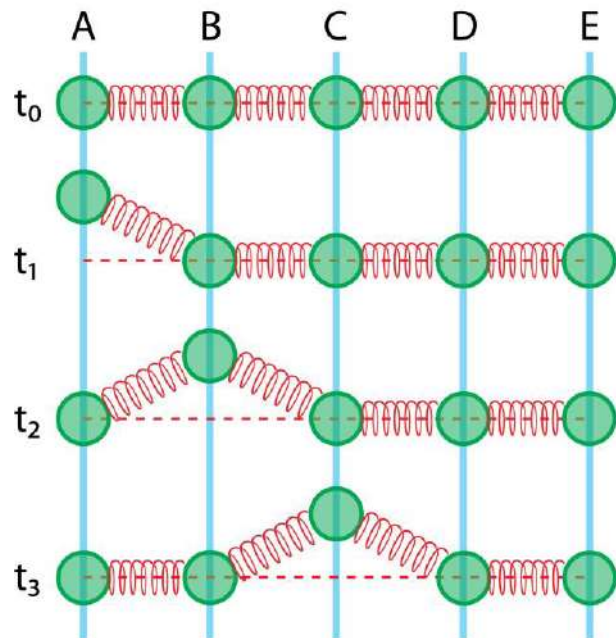
10.1	Lopende golven	5
–	Lopende golf	5
–	Transversale golf	5
–	Longitudinale golf	6
–	Het (u, x) -diagram	7
–	Het (u, t) -diagram	8
–	Golflengte	8
–	Golfsnelheid	9
–	Golflengte en faseverschil	10
10.2	Transport van energie	12
–	Transport van energie	12
–	Intensiteit	12
–	Vlakke golven, cilindrische golven en sferische golven	13
–	Terugkaatsing (reflectie) van golven	16
–	De terugkaatsingswet	16
–	Gedeeltelijke terugkaatsing	17
–	Breking (refractie)	17
10.3	Interferentie	18
–	Buiken en knopen	19
–	Superpositie	20
10.4	Watergolven, geluid en licht	22
–	Oppervlaktegolven van water	22
–	Geluid	22
–	Voortplantingssnelheid van geluid	23
–	Antigeluid	23
–	Licht	24
10.5	Het dopplereffect	25
–	Bewegende trillingsbron	25
–	Bewegende waarnemer	27
–	Bewegende bron én bewegende waarnemer	29
–	Dopplereffect bij licht	29
10.6	Staande golven	31
–	Staande golven	31
–	Staande transversale golven bij vaste uiteinden	31
–	Boventonen	32
–	Spankracht en toonhoogte	34
–	Staande transversale golven bij losse uiteinden	35
–	Staande longitudinale golven (blaasinstrumenten)	36

– Staande longitudinale golven bij losse uiteinden	36
– Staande golven bij één vast en één los uiteinde	38
– Blaasinstrumenten met één dicht en één open uiteinde	38
– Het spelen van een toon	40
– Muziekinstrumenten in de praktijk	41
– De menselijke stem	41
10.7 Samenvatting	42
– Grootheden en eenheden	42
– Weten	42
– Formules	43
– Figuren	44

10.1 Lopende golven

Lopende golf

Als het voorste punt van een gespannen koord beweegt zie je even later dat een punt verderop precies dezelfde beweging uitvoert. De beweging van het voorste punt wordt doorgegeven in het koord. In figuur 1 zie je hoe dit in zijn werk gaat. De ballen A t/m E zijn met veren verbonden en kunnen alleen verticaal bewegen. Op t_1 wordt A omhooggetrokken en omdat B elastisch met A is verbonden zal B een tijdje later ook omhooggaan. Op t_2 is A weer terug en nu heeft B zijn maximale hoogte bereikt. Bal B trekt vervolgens bal C omhoog en deze bal bereikt zijn maximale hoogte op t_3 etc. De verticale beweging van bal A wordt horizontaal doorgegeven aan de andere ballen. Dit doorgeven kost tijd.



Figuur 1 Bij een golf wordt beweging doorgegeven aan de omgeving.

Beweegt het voorste punt van een koord op en neer, dan voert het een trilling uit. Deze trilling wordt doorgegeven in het koord, waardoor een **lopende golf** in het koord ontstaat. Een golf ontstaat als een voorwerp een trilling uitvoert in een **elastisch medium**. Daarmee bedoel je een omgeving die flexibel is, zoals een koord, het oppervlak van water of de lucht. Het doorgeven van de trilling kost tijd. Het trillende voorwerp zelf beweegt niet langs het koord, maar veroorzaakt de beweging van andere punten op het koord.

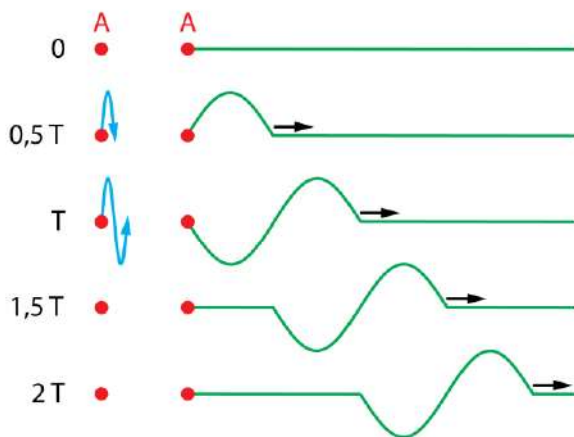
- 1) Een golf is het doorgeven van beweging in een elastisch medium.
- 2) Het doorgeven van beweging heeft tijd nodig.
- 3) Bij een golf wordt GEEN materie verplaatst.

Transversale golf

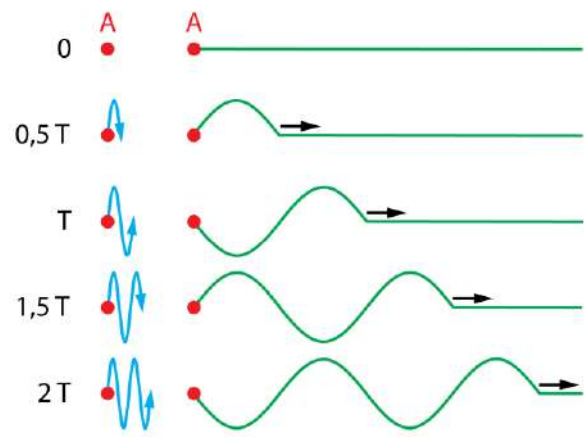
In de figuur 2 zie je een koord dat aan het linker uiteinde A in een **verticale** trilling wordt gebracht. Het buigzame koord zorgt ervoor dat de trilling in **horizontale** richting (naar rechts) wordt doorgegeven. De verticale beweging van het linker uiteinde veroorzaakt een **golfberg** en een **golfdal** die zich horizontaal verplaatsen.

In figuur 2 begint het linker uiteinde op $t=0$ aan een trilling die maar één periode duurt. De trilling wordt naar rechts doorgegeven en beweegt door het koord. Op $t = 0,5 T$ heeft het linker uiteinde een halve trilling uitgevoerd en op $t = T$ een hele trilling. Eén golfberg en

één golfdal verplaatsen zich naar rechts. Herhaal je de beweging van het linker uiteinde dan ontstaat er een lopende golf met meerdere golfbergen en golfdalen. Zie figuur 3.

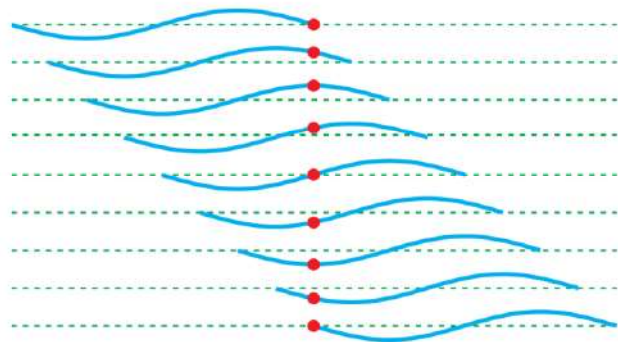


Figuur 2 Het uiteinde van een koord is één keer snel op en neer bewogen, zodat er een golfberg en golfdal ontstaan die naar rechts bewegen.



Figuur 3 Het uiteinde van een koord wordt vanaf $t=0$ voortdurend snel op en neer bewogen. Hierdoor ontstaat een naar rechts bewegende golf.

Hoewel de kop van de golf naar rechts beweegt is er geen enkel stukje koord met een snelheid naar rechts. De punten van het koord trillen verticaal maar de golf verplaatst zich horizontaal. Een golf waarbij de voortplantingsrichting loodrecht staat op de trillingsrichting heet een **transversale** golf. Zie figuur 4.



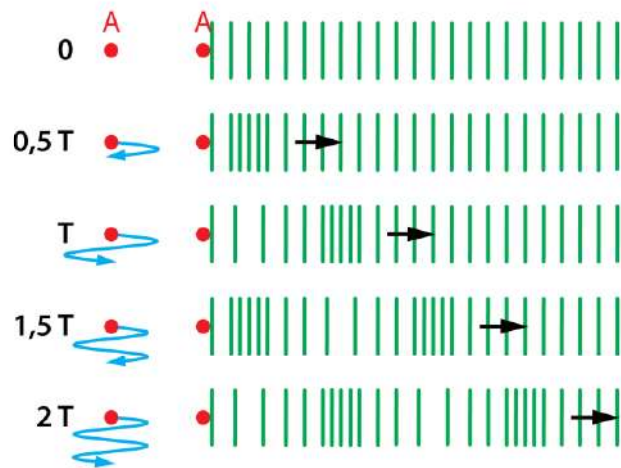
Figuur 4 Op het water drijft een bal. Als een golf voorbijkomt beweegt het water omhoog en omlaag.

Een transversale golf verplaatst zich loodrecht op de richting van de trilling.

Longitudinale golf

In figuur 5 zie je een spiraalveer die aan het linker uiteinde A in een **horizontale** trilling is gebracht. De spiraal zorgt ervoor dat de trilling in **horizontale** richting (naar rechts) wordt doorgegeven. De horizontale beweging van het linker uiteinde veroorzaakt **verdichtingen** en **verdunningen** die zich naar rechts verplaatsen.

Ieder stukje van de spiraal voert een horizontale trilling uit en geeft deze trilling horizontaal door. Zowel de trilling als de golf hebben een horizontale beweging. Een golf waarbij de voortplantingsrichting evenwijdig is aan de trillingsrichting heet een **longitudinale** golf.

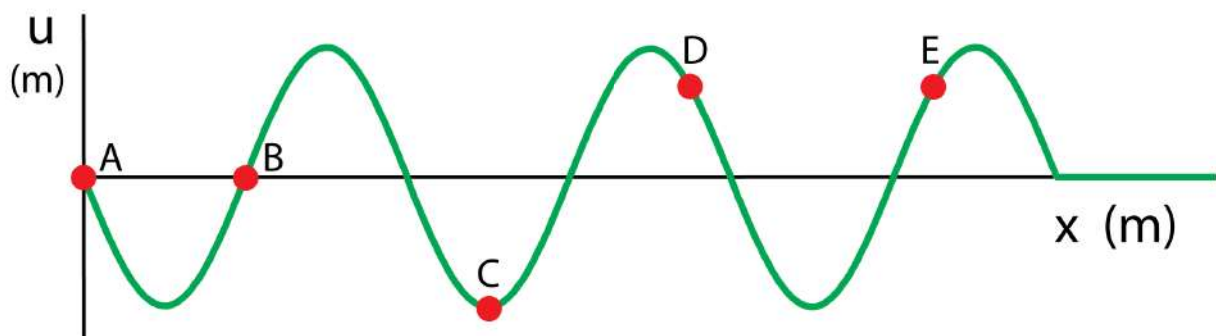


Figuur 5 Het uiteinde van een spiraal wordt snel naar rechts en links bewogen. Hierdoor ontstaat een naar rechts bewegende longitudinale golf.

Een longitudinale golf verplaatst zich evenwijdig aan de richting van de trilling.

Het (u, x)-diagram

In een (u, x)-diagram wordt de vorm van een golf op één bepaald tijdstip weergegeven en is daarom een **momentopname** (een foto) van het medium. In figuur 6 zie je een koord op het moment waarop uiteinde A drie trillingen heeft uitgevoerd. Punt B ligt op een afstand van A en heeft op dat moment nog maar 2,5 trillingen uitgevoerd. Zie figuur 6.



Figuur 6 Op $t=0$ is uiteinde A in trilling gebracht. Op het moment waarop de "foto" is genomen heeft A drie trillingen uitgevoerd. Omdat punt B op een afstand van A ligt heeft punt B op dat moment nog maar 2,5 trillingen uitgevoerd.

Omdat de golf naar rechts beweegt beginnen de punten verder naar rechts op het koord later te trillen dan de punten meer naar links. Punt A is eerder gaan trillen dan punt B en punt B eerder dan punt C, etc. Rechts van punt E zie je de eerste golfberg. Hieruit blijkt dat punt A in het verleden is begonnen met een beweging omhoog. Op het moment waarop het (u, x)-diagram is opgenomen geldt voor de punten A t/m E:

- A** heeft 3 trillingen uitgevoerd en beweegt **omhoog**
- B** heeft $2\frac{1}{2}$ trillingen uitgevoerd en beweegt **omlaag**
- C** heeft $1\frac{3}{4}$ trillingen uitgevoerd en staat **stil** en gaat daarna **omhoog** bewegen
- D** heeft $1\frac{1}{8}$ trillingen uitgevoerd en beweegt **omhoog**
- E** heeft $\frac{3}{8}$ trillingen uitgevoerd en beweegt **omlaag**

In figuur 6 zie je dat de trilling van punt A na enige tijd in punt E aankomt. We concluderen daarom het volgende. Stel, een trillingsbron veroorzaakt een golf die vanuit de bron naar punt P beweegt. Pas als de golf bij P is aangekomen begint P ook te trillen. Punten dichterbij de trillingsbron beginnen eerder te trillen en lopen voor op P. Punten verder van de trillingsbron beginnen later te trillen en lopen achter op P.

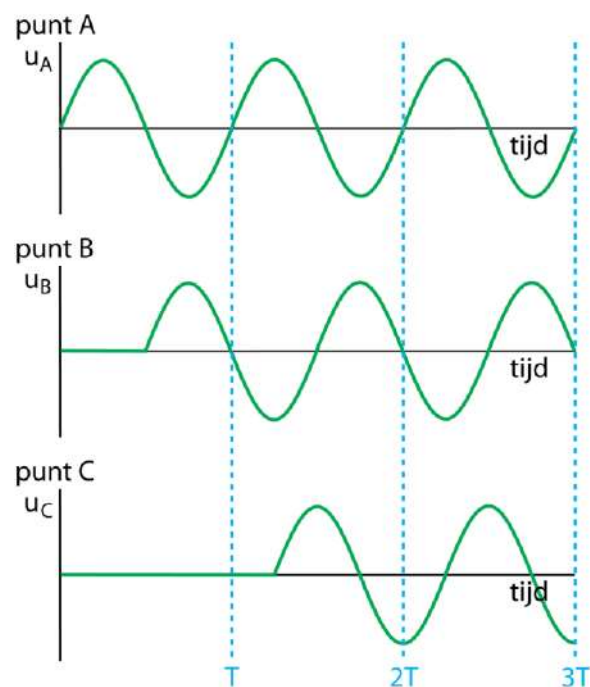
Aan de golven tussen de trillingsbron en punt P zie je hoe P in de toekomst zal gaan bewegen.

Aan de golven achter punt P, gezien vanaf de trillingsbron, zie je hoe P in het verleden heeft bewogen.

Het (u, t)-diagram

In een (u, t)-diagram zie je hoe de uitwijking van een bepaald punt verandert in de tijd. Figuur 7 is het (u, t)-diagram van de punten A, B en C van figuur 6. Punt A begint op $t = 0$ met een beweging omhoog, waardoor er een golfberg ontstaat. Na $\frac{1}{4}$ periode begint A omlaag te bewegen en na $\frac{1}{2}$ periode gaat A door de evenwichtsstand omlaag. De golfberg wordt nu afgewisseld door een golfdal.

Ook voor de punten B en C zijn de (u, t)-grafieken gegeven. Op $t = 0$ begint A te trillen. Na $0,5 T$ komt de golf aan in punt B en na $1\frac{1}{4} T$ in punt C. De (u, t)-grafieken van A, B en C hebben dezelfde vorm. Punt B start op $0,5 T$ en punt C op $1\frac{1}{4} T$. Door deze vertragingen zijn de diagrammen van B en C naar rechts verschoven.



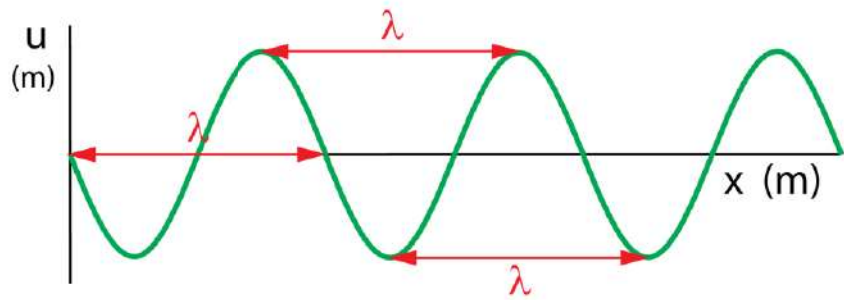
Figuur 7 (u, t)-diagram van punt A (boven), punt B (midden) en punt C (onder).

Golflengte

In figuren 2 en 3 zijn momentopnamen te zien van een koord. Op $t = 0$ is uiteinde A in trilling gebracht. Op $t = T$ heeft A één hele trilling uitgevoerd en is in het koord een golfberg en een golfdal ontstaan. De lengte van één golf noemen we de **golflengte**. Het symbool voor golflengte is λ (Griekse letter, spreek uit als lambda). Als A blijft trillen herhaalt het zijn beweging in de tijd, waardoor de golf zich in de ruimte gaat herhalen.

De golflengte λ (lambda) is de afstand waarover het golfpatroon zich in de ruimte herhaalt en is de lengte van één golf.

Figuur 8 Bepaling van de golflengte λ uit een (u, x) -diagram kan op verschillende manieren.

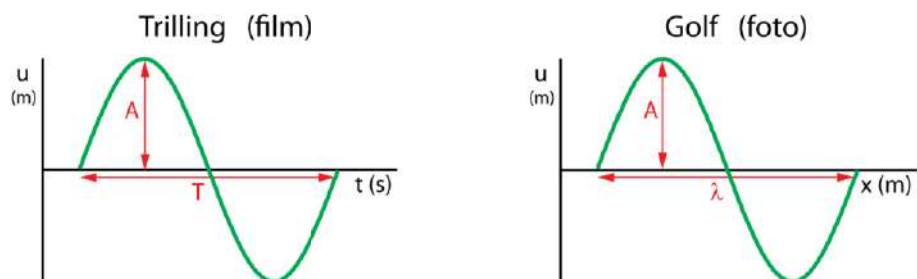


De trillingstijd T en golflengte λ hebben veel met elkaar gemeen.

- de trillingstijd is de **tijd** waarover de trilling zich herhaalt
- de golflengte is de **afstand** waarover het golfpatroon zich herhaalt

Het (u, t) -diagram van een trilling lijkt veel op het (u, x) -diagram van een golf. Bij een trilling staat op de horizontale as de tijd en bij een golf staat op de horizontale as de plaats. Zie figuur 9.

Figuur 9 (u, t) - en (u, x) -diagram.



Golfsnelheid

De snelheid waarmee een golf zich verplaatst wordt bepaald door het gemak waarmee het medium kan vervormen. Een gemakkelijk vervormbaar medium heeft een kleine golfsnelheid en een moeilijk vervormbaar medium heeft een grote golfsnelheid. De golfsnelheid is NIET afhankelijk van de frequentie of de amplitude van de trillingsbron.

De golfsnelheid is een eigenschap van het medium en is NIET afhankelijk van de frequentie of de amplitude van de trillingsbron.

Voor de golfsnelheid geldt de volgende formule:

$$\lambda = v_{\text{golf}} \cdot T \quad \rightarrow \quad v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda$$

- λ is de golflengte in meter (m)
- v_{golf} is de golfsnelheid in meter per seconde (m/s)
- T is de trillingstijd in seconde (s)

BEWIJS

- $s = v_{\text{gem}} \cdot t$
- in T seconden legt de golf een afstand λ af $\rightarrow \lambda = v_{\text{golf}} \cdot T$
- $v_{\text{golf}} = \frac{\lambda}{T} \rightarrow v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda$

Golflengte en faseverschil

De fase φ van een punt in het medium is het aantal trillingen dat dit punt sinds $t = 0$ heeft uitgevoerd. Het faseverschil $\Delta\varphi$ tussen twee punten is de fase van het punt op plaats x_2

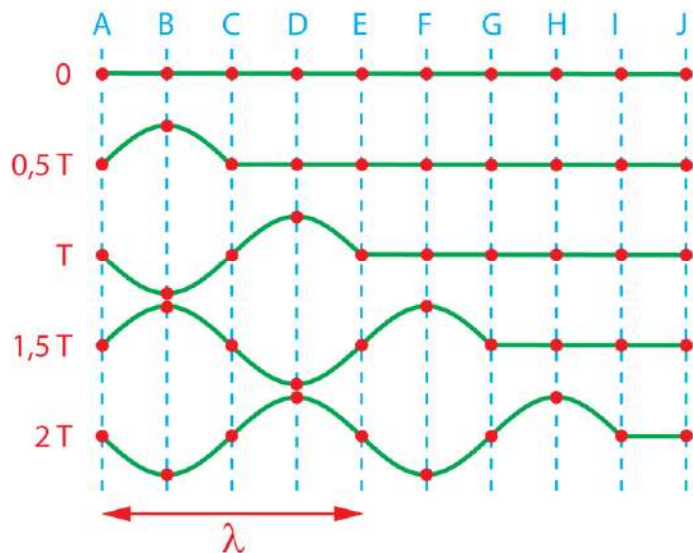
min de fase van het punt op plaats x_1 : $\Delta\varphi = \frac{x_2}{\lambda} - \frac{x_1}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \frac{\Delta x}{\lambda}$.

Bevindt het trillende voorwerp zich in een elastisch medium dan ontstaat er een golf. Bij deze golf zijn de fase en het faseverschil zichtbaar als verschil in afstand. In één keer de trillingstijd legt de golf immers een afstand af gelijk aan de golflengte. In Figuur 10 zie je een koord met daarop de punten A, B, C, ..., J. De afstand tussen deze punten is steeds $\frac{1}{4}\lambda$. Punt A begint op $t=0$ te trillen. De andere punten lopen achter op punt A en beginnen later te trillen. De achterstand van B is $\frac{1}{4}T$ omdat B op een afstand $\frac{1}{4}\lambda$ van A ligt. De afstand tussen A en E is precies één keer de golflengte. Punt E begint daarom T seconde later te trillen dan punt A. Er is dus een relatie tussen de afstand A–X en de fase van punt X, want hoe groter de afstand tussen A en X is hoe later punt X begint te trillen en hoe kleiner zijn fase is ten opzichte van de fase van A.

Punt B ligt op $\frac{1}{4}\lambda$ van A en begint daarom $\frac{1}{4}T$ later te trillen. Als punt A twee trillingen heeft uitgevoerd dan heeft punt B $1\frac{3}{4}$ trillingen uitgevoerd.

Punt C is $\frac{1}{2}T$ later gaan trillen dan punt A. Als punt A twee trillingen heeft uitgevoerd heeft punt C $1\frac{1}{2}$ trillingen uitgevoerd.

Punt E is T seconden later gaan trillen dan punt A. Als punt A twee trillingen heeft uitgevoerd heeft punt E één trilling uitgevoerd.



Figuur 10 De punten A, B, C, ..., J liggen op een afstand van $\frac{1}{4}\lambda$. Voor iedere $\frac{1}{4}\lambda$ naar rechts wordt de fase $\frac{1}{4}$ kleiner.

Op $t = 2T$ geldt:

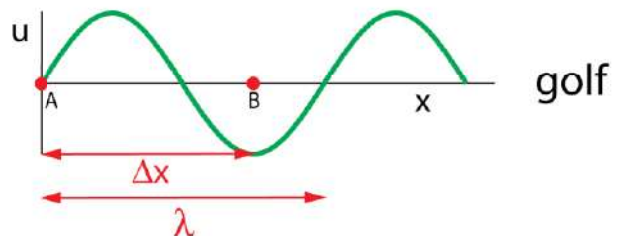
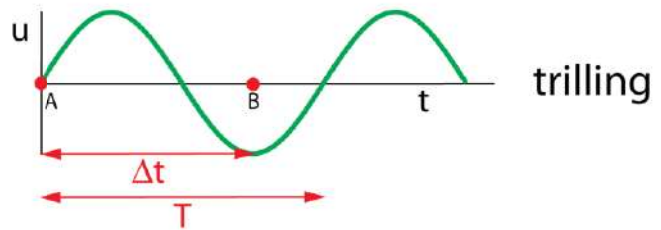
$$\varphi_A = 2 \quad | \quad \varphi_B = 1\frac{3}{4} \quad | \quad \varphi_C = 1\frac{1}{2} \quad | \quad \varphi_D = 1\frac{1}{4} \quad | \quad \varphi_E = 1 \quad | \quad \varphi_F = \frac{3}{4} \quad | \quad \varphi_G = \frac{1}{2} \quad | \quad \varphi_H = \frac{1}{4} \quad | \quad \varphi_I = 0$$

Voor het faseverschil $\Delta\varphi$ bij een golf geldt:

$$\Delta\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \frac{\Delta x}{\lambda}$$

- $\Delta\varphi$ is het faseverschil (geen eenheid want het is een verhouding)
- Δx is de afstand tussen de plaatsen x_1 en x_2 in meter (m)
- λ is de golflengte in meter (m)

Bij een trilling kan het faseverschil uit een (u, t) diagram worden bepaald en bij een golf uit een (u, x)-diagram. Zie figuur 11.



Figuur 11 Bij een trilling kun je $\Delta\varphi = \Delta t / T$ bepalen uit een (u, t)-diagram (boven). Bij een golf kun je $\Delta\varphi = \Delta x / \lambda$ bepalen uit een (u, x)-diagram (onder).

Trilling: $\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T}$ te bepalen uit een (u, t) diagram

Golf: $\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda}$ te bepalen uit een (u, x) diagram

VOORBEELD lopende golf in een koord

Van een koord AB met een lengte van 1,20 m wordt op $t = 0$ uiteinde A in trilling gebracht en begint punt A door de evenwichtsstand omhoog. De trillingstijd is 0,16 s en de golflengte is 0,50 m. De afstand tussen P en A is 0,85 m.

Bereken de fase van A op $t = 0,40$ s.

- $\varphi = \frac{t}{T} = \frac{0,40}{0,16} = 2,5$

Bereken de fase van P op $t = 0,40$ s.

- faseverschil tussen A en P: $\Delta\varphi_{AP} = \frac{\Delta x}{\lambda}$

- $\Delta\varphi_{AP} = \frac{0,85}{0,5} = 1,7$

- P loopt achter op A $\rightarrow \varphi_P = \varphi_A - \Delta\varphi_{AP} = 2,5 - 1,7 = 0,8$

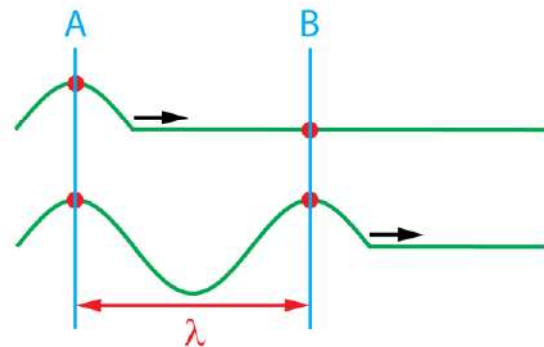
10.2 Transport van energie

Transport van energie

Het kost kracht om een voorwerp in een elastisch medium te verplaatsen. Breng je het voorwerp uit de evenwichtsstand dan wordt er arbeid opgeslagen als veerenergie. Laat je het voorwerp daarna los, dan gaat het bewegen waarbij veerenergie wordt omgezet in kinetische energie (bewegingsenergie). Een trillend voorwerp in een elastisch medium bevat dus veerenergie en kinetische-energie. Maar we hebben gezien dat de beweging wordt overgedragen op de omgeving en dus zal een trillend voorwerp in een elastisch medium energie afstaan aan de omgeving. Als de trillingsbron niet in beweging wordt gehouden raakt het zijn energie kwijt, waardoor de amplitude van de trillingsbron afneemt tot nul. Deze afname van de amplitude wordt NIET veroorzaakt door wrijving. Er is dus GEEN sprake van damping, want er wordt geen energie omgezet in warmte.

Bij een golf staat de trillingsbron energie af aan de omgeving.

In figuur 12 zie je (u, x) -diagrammen van een golf. De punten A en B liggen op afstand λ van elkaar. In het bovenste diagram heeft punt A een uitwijking en dus veerenergie. Punt B is in rust en bevat nog geen energie. Even later is de golf in B aangekomen en heeft B energie van A ontvangen.



Figuur 12 Energie wordt van A naar B verplaatst.

Intensiteit

De **intensiteit** van een golf is de hoeveelheid energie die per seconde per vierkante meter stroomt. Het symbool voor intensiteit is I (hoofdletter i). Omdat de energie per seconde het vermogen is met de eenheid watt, is de intensiteit het vermogen per vierkante meter. De eenheid van intensiteit is daarom watt per vierkante meter W / m^2 .

De intensiteit is de hoeveelheid energie die per seconde per vierkante meter stroomt en heeft als eenheid watt per vierkante meter (W / m^2).

In het hoofdstuk trillingen zagen we dat bij een harmonische trilling de maximale snelheid wordt bereikt in de evenwichtsstand en dat deze maximale snelheid recht evenredig is met de frequentie én recht evenredig met de amplitude. In de evenwichtsstand is er alleen kinetische energie en die is kwadratisch afhankelijk van de snelheid. Hieruit concluderen we dat de energie van een trilling kwadratisch afhankelijk is van de frequentie én kwadratisch afhankelijk van de amplitude.

BEWIJS

- $v_{\max} = \frac{2\pi A}{T} = 2\pi f \cdot A$
- $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
- evenwichtsstand → alleen kinetische energie
- $E_{\text{trilling}} = \frac{1}{2} m \cdot (2\pi f \cdot A)^2 \rightarrow E_{\text{trilling}} = 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$

Hetzelfde geldt voor de intensiteit van een golf. De intensiteit is kwadratisch afhankelijk van de frequentie én kwadratisch afhankelijk van de amplitude.

De intensiteit van een golf is kwadratisch afhankelijk is van de frequentie én kwadratisch afhankelijk van de amplitude.

Als een golf zich verspreidt over een groter oppervlak wordt de energie per vierkante meter kleiner. De frequentie verandert niet en dus neemt de amplitude af.

Verspreidt een golf zich over een groter oppervlak dan neemt de amplitude af.

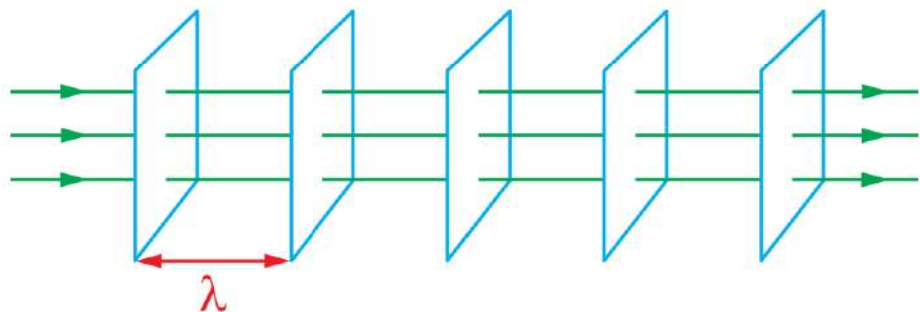
Vlakke golven, cilindrische golven en sferische golven

De energie die de trillingsbron afstaat aan de omgeving wordt verspreid en als er geen wrijving is blijft de totale hoeveelheid energie constant. Het verspreiden van energie kan gebeuren in 1, 2 of 3 dimensies. Bij verspreiding in 1 dimensie spreek je van een **vlakke golf**, in 2 dimensies van een **cilindervormige golf** en in 3 dimensies van een **bolvormige golf**. Deze drie gevallen gaan we hieronder bekijken.

– vlakke golf –

Zoals je in figuur 13 ziet verplaatst de golf zich naar rechts maar verspreidt de golf zich niet in andere richtingen. De hoeveelheid energie die per seconde per vierkante meter stroomt blijft gelijk, zodat de intensiteit van de golf hetzelfde blijft. Dit is bijvoorbeeld het geval bij een lichtgolf uitgezonden door een laser.

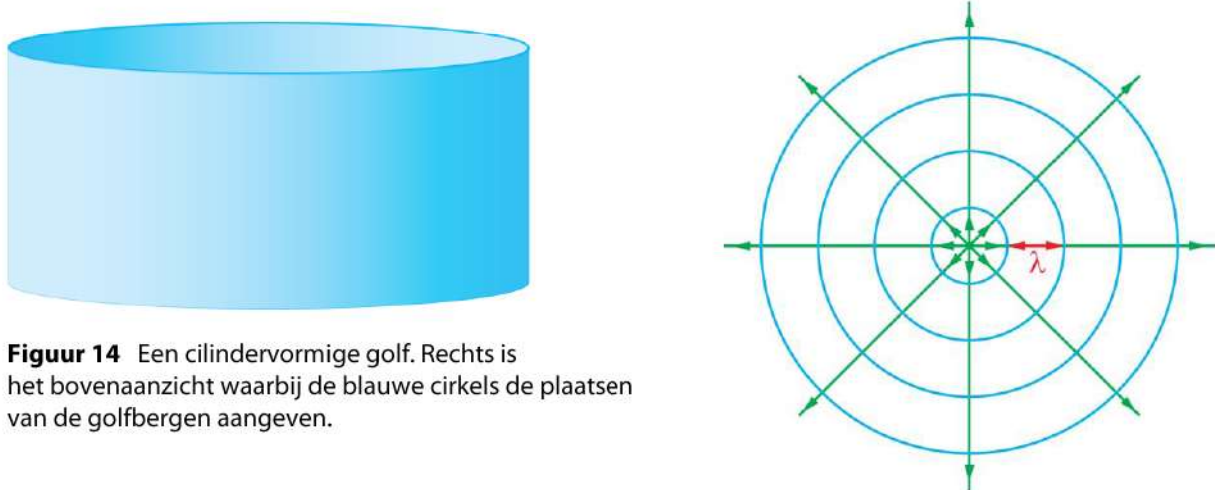
Figuur 13 Een vlakke golf. De blauwe vlakken geven de plaatsen van de golfbergen aan.



Vlakke golf → I_{golf} is onafhankelijk van de afstand

– cilindervormige golf –

Een **cilindervormige golf** is een golf die zich cilindervormig uitbreidt. Denk aan de golf die ontstaat als je een steen in het water gooit. De steen veroorzaakt een trilling, waarbij energie naar de omgeving stroomt. Zie figuur 14. De hoeveelheid energie verandert niet (er is geen wrijving), maar tijdens het verplaatsen van de golf wordt de energie over een steeds groter oppervlak verdeeld, waardoor de amplitude afneemt. De afname van de amplitude wordt NIET veroorzaakt door demping maar door het verspreiden van de golf.



Figuur 14 Een cilindervormige golf. Rechts is het bovenaanzicht waarbij de blauwe cirkels de plaatsen van de golfbergen aangeven.

Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi \cdot r \cdot h$ en voor de intensiteit van een cilindervormige golf vinden we daarom:

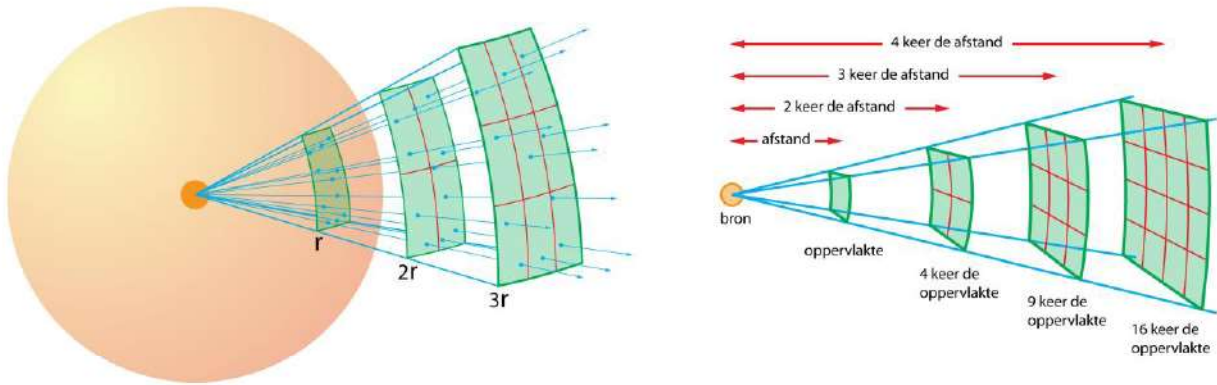
$$I = \frac{P_{\text{bron}}}{2\pi \cdot r \cdot h}$$

- I is de intensiteit in watt per vierkante meter (W / m^2)
- P_{bron} is het vermogen van de trillingsbron in watt (W)
- r is de afstand tot de trillingsbron in meter (m)
- h is de hoogte van de cilinder in meter (m) h verandert niet

– sferische (bolvormige) golf –

Een **sferische (bolvormige) golf** is een golf die zich bolvormig uitbreidt. Denk aan de geluidsgolf die ontstaat als je in je handen klapt. De klappende handen veroorzaken een trilling van de lucht en de energie van deze trilling wordt aan de omgeving afgestaan. De hoeveelheid energie verandert hierbij niet (er is geen wrijving). Tijdens de verplaatsing van de golf wordt de oppervlakte van de bol groter, waardoor de energie over een steeds groter oppervlak wordt verdeeld. Hierdoor neemt de amplitude af. Zie figuur 15. De afname van de amplitude wordt dus NIET veroorzaakt door demping maar door het verspreiden van de golf. Voor de oppervlakte van een bol geldt: $A = 4\pi \cdot r^2$. Hierdoor neemt de intensiteit af met het kwadraat van de afstand.

Een kwadratische afname met de afstand komt in de natuurkunde veel voor en wordt de **(omgekeerde) kwadratenwet** genoemd. De wiskunde vorm hiervan is: $y = a/r^2$.



Figuur 15 Bij een sferische golf wordt de energie over een steeds groter oppervlakte verdeeld. De intensiteit neemt af met het kwadraat van de afstand.

Voor de intensiteit van een sferische golf vinden we:

$$I = \frac{P_{\text{bron}}}{4\pi \cdot r^2}$$

- I is de intensiteit in watt per vierkante meter (W / m^2)
- P_{bron} is het vermogen van de trillingsbron in watt (W)
- r is de afstand tot de trillingsbron in meter (m)

VOORBEELD popconcert

Bij een popconcert is de geluidsintensiteit op 0,50 m van de speaker $1,0 \text{ W/m}^2$. Om geen gehoorbeschadiging op te lopen mag de geluidsintensiteit niet groter zijn dan $2,5 \text{ mW/m}^2$. Ga uit van sferische golven.

Op welke afstand van de speaker moet je minstens gaan staan.

- $I = \frac{P_{\text{bron}}}{4\pi \cdot r^2}$
- $1,0 = \frac{P_{\text{bron}}}{4\pi \cdot 0,5^2} \rightarrow P_{\text{bron}} = 3,14159 \text{ W}$
- $2,5 \cdot 10^{-3} = \frac{3,14159}{4\pi \cdot r^2} \rightarrow r = 10 \text{ m}$ P_{bron} is hetzelfde

Voor de zekerheid ga je op 12,5 meter van de speakers staan.

Bereken de geluidsintensiteit op deze afstand.

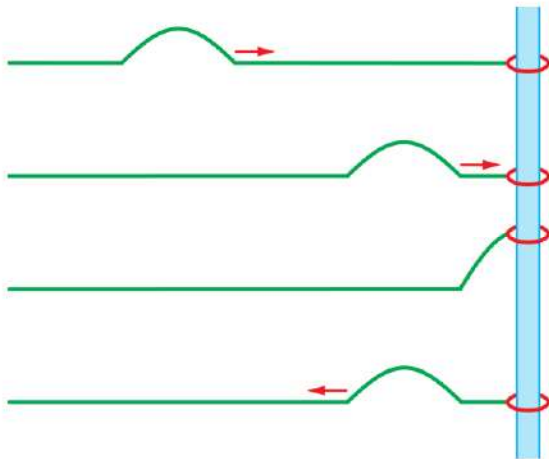
- $P_{\text{bron}} = 3,14159 \text{ W} \mid r = 12,5 \text{ m} \mid I = \dots \text{ W/m}^2$
- $I = \frac{3,14159}{4\pi \cdot 12,5^2} \rightarrow I = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$



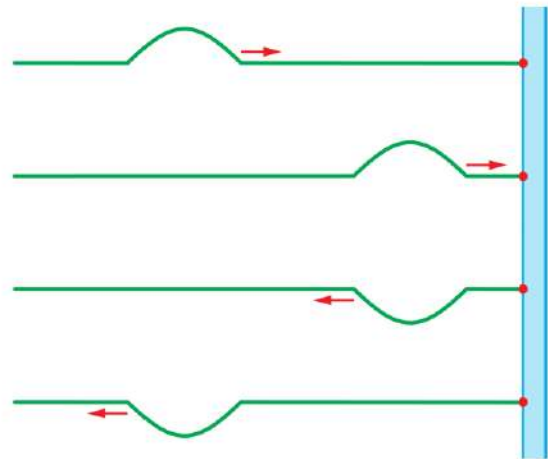
Terugkaatsing (reflectie) van golven

Vaak is het flexibele medium waarin een golf beweegt begrensd. Zo kan een golf in een gespannen snaar de vastgemaakte uiteinden niet passeren. Een golf die bij het einde van het medium komt wordt teruggekaatst. Dit kan op twee verschillende manieren gebeuren, afhankelijk van of het uiteinde wel of niet kan trillen. In de figuren 16 en 17 zie je een golf in een koord. In figuur 16 is het koord bij het uiteinde los, zodat het koord daar makkelijk kan trillen. In figuur 17 is het koord bij het uiteinde vastgemaakt en kan daar dus niet trillen.

Bij een **los uiteinde** schiet de beweging door. Het uiteinde maakt een grote zwieper en creëert daarmee een nieuwe golf die de andere kant uitgaat. Zoals je in figuur 16 ziet, beweegt de golfberg terug, zonder om te klappen. Bij een **vast uiteinde** geeft het medium een actiekracht naar boven op het eindpunt. Volgens de derde wet van Newton oefent het eindpunt een reactiekracht naar beneden uit op het koord. Deze reactiekracht creëert een nieuwe golf die de andere kant uitgaat. Zoals je in figuur 17 ziet, verandert de golfberg in een golfdal en beweegt daarna terug. Bij een vast uiteinde is er een **fasesprong** van $\frac{1}{2}$. Bij een los uiteinde is er geen fasesprong.



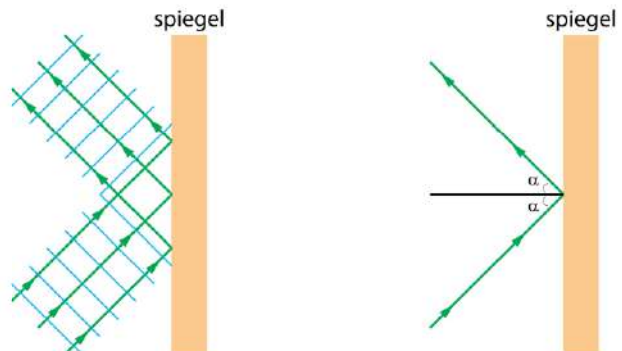
Figuur 16 Golf met los uiteinde kaatst terug en klapt daarbij niet om.



Figuur 17 Golf met vast uiteinde kaatst terug en klapt daarbij om.

De terugkaatsingswet

Wordt een golf teruggekaatst, dan is de hoek van terugkaatsing gelijk aan de hoek van inval. Deze wet geldt niet alleen voor vlakke en gekromde spiegels maar altijd, dus ook voor ruwe oppervlakken. In figuur 18 zie je hoe een invallende golf wordt teruggekaatst.



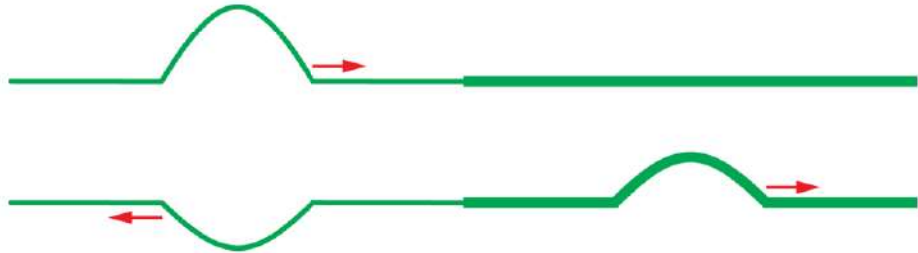
Figuur 18 De terugkaatsingswet.

De hoek van terugkaatsing is gelijk aan de hoek van inval.

Gedeeltelijke terugkaatsing

Een golf die aankomt bij een grens waar het medium verandert zal zowel terugkaatsen als verdergaan. In figuur 19 zie je een dun koord dat is bevestigd aan een dikker koord. Bij de grens splitst de golf zich in twee delen. Een deel wordt teruggekaatst en een deel gaat verder. Dit zie je bijvoorbeeld bij een raam. Licht dat op een raam valt wordt voor ongeveer 90% doorgelaten (transmissie), de overige 10% wordt teruggekaatst (reflectie). Bij de teruggaande golf is er een fasesprong van $\frac{1}{2}$. De doorgaande golf heeft geen fasesprong.

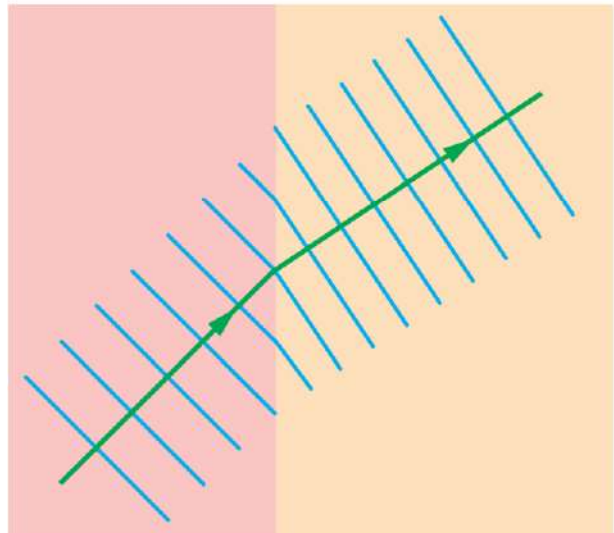
Figuur 19
Transmissie en
reflectie van een
golf aan een
grensvlak.



Breking (refractie)

Een golf die onder een hoek aankomt bij het grensvlak tussen twee mediums met verschillende golfsnelheden wordt gebroken. De golf gaat verder in een andere richting. Dit heet **refractie** en gebeurt bijvoorbeeld als licht schuin invalt op glas. Zie figuur 20.

Figuur 20 Een golf komt onder een hoek bij een grens waarbij de golfsnelheid verandert. Hierdoor verandert de golf van richting.

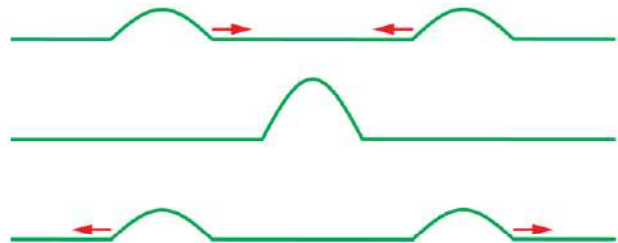


10.3 Interferentie

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot de aanwezigheid van één trillingsbron in een elastisch medium. Maar er kunnen natuurlijk ook twee of meer trillingsbronnen aanwezig zijn die allemaal golven veroorzaken. In deze paragraaf bekijken we de situatie met twee trillingsbronnen. Trillen deze bronnen met verschillende frequenties dan ontstaat er een chaotisch patroon. Maar zijn de frequenties van de trillingsbronnen gelijk, dan treedt er **interferentie** op in het gebied waar de golven elkaar overlappen. Interferentie kan ervoor zorgen dat twee golven elkaar versterken of verzwakken.

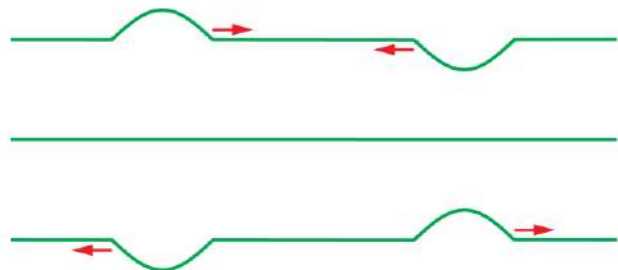
Interferentie ontstaat als op dezelfde plaats twee of meer golven aanwezig zijn veroorzaakt door trillingsbronnen met dezelfde frequentie.

In figuur 21 bewegen twee golfbergen naar elkaar toe. Beide golven hebben een positieve uitwijking. In de middelste situatie zijn ze op dezelfde plaats. Op dat moment versterken de golven elkaar en treedt er **constructieve interferentie** op. Daarna gaan de golven verder.



Figuur 21 Constructieve interferentie.

In figuur 22 bewegen een golfberg en een golfdal naar elkaar toe. De golfberg heeft een positieve uitwijking en het golfdal een negatieve uitwijking. In de middelste situatie zijn ze op dezelfde plaats. Op dat moment doven de golven elkaar uit en treedt er **destructieve interferentie** op. Daarna gaan de golven verder.



Figuur 22 Destructieve interferentie.

Constructieve interferentie → **twee golven versterken elkaar.**

Op plaats P is er constructieve interferentie als de uitwijkingen door golf 1 en golf 2 dezelfde richting hebben waardoor de resulterende uitwijking extra groot is.

Destructieve interferentie → **twee golven verzwakken elkaar**

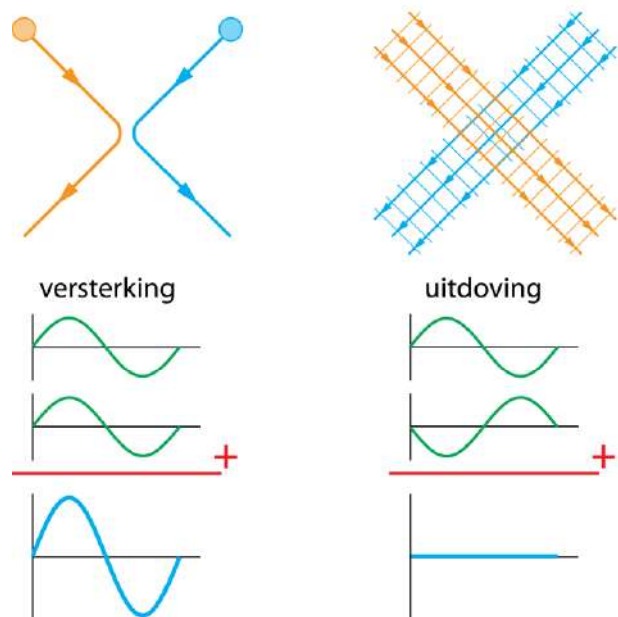
Op plaats P is er destructieve interferentie als de uitwijkingen door golf 1 en golf 2 tegenovergestelde richtingen hebben, waardoor de resulterende uitwijking kleiner is dan die van golf 1 of 2 afzonderlijk.

Totale uitdoving treedt op als de uitwijkingen van beide golven even groot zijn en een tegengestelde richting hebben.

Het is een kenmerkende eigenschap van golven dat ze elkaar kunnen versterken of verzwakken (of uitdoven). Bij voorwerpen is dit niet mogelijk. Want als twee voorwerpen elkaar tegenkomen botsen ze omdat op één plaats in de ruimte op hetzelfde moment niet twee voorwerpen kunnen zijn. Een voorwerp neemt ruimte in. Maar bij golven is dat niet zo. Op één plaats in de ruimte kunnen tegelijkertijd twee of meer golven zijn. Golven trekken zich niets van elkaar aan, ze gaan dwars door elkaar heen en daarna gewoon verder. Zie figuren 23 en 24. Tijdens het interfereren is de uitwijking de som van de uitwijkingen van de afzonderlijke golven.

Bij interferentie van golven is de resulterende uitwijking de som van de uitwijkingen van de afzonderlijke golven.

Figuur 23 Twee voorwerpen kunnen niet tegelijkertijd op dezelfde plaats zijn maar twee golven kunnen dat wel.

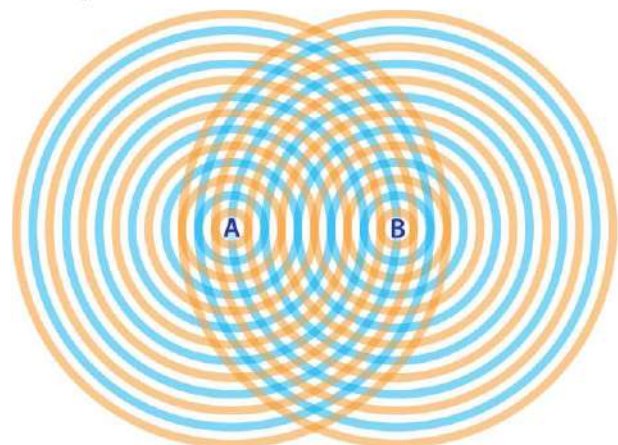


Figuur 24 Twee golven op dezelfde plaats kunnen elkaar versterken of verzwakken.

Buiken en knopen

Stel er zijn twee trillingsbronnen A en B met dezelfde frequentie en amplitude. Op $t=0$ gaan ze in dezelfde richting door de evenwichtsstand en beginnen ze aan een nieuwe trilling. In dat geval spreek je van **coherente trillingsbronnen**.

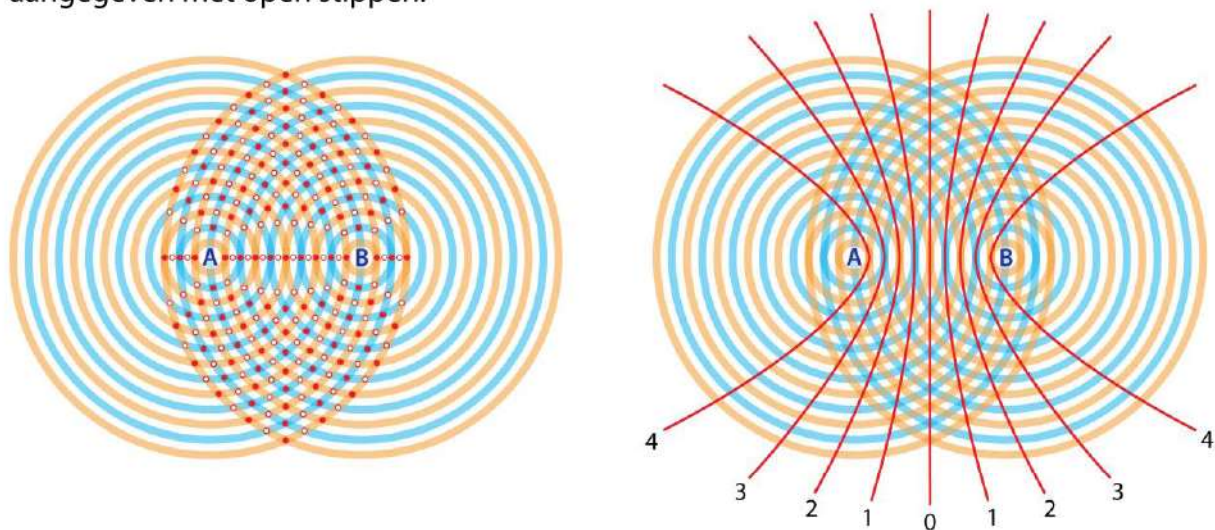
In figuur 25 zie je golfbergen (oranje) en golfdalen (blauw) veroorzaakt door coherente trillingsbronnen A en B. De golven verspreiden zich en overlappen elkaar in een gebied tussen A en B. De afstand tussen twee oranje cirkels en tussen twee blauwe cirkels is de golflengte λ . De afstand tussen een oranje en een blauwe cirkel is $\frac{1}{2} \lambda$.



Figuur 25 Interfererende golven.

Op plaatsen waar twee oranje cirkels elkaar snijden komen twee golfbergen samen en ontstaat er een extra hoge golfberg. Op plaatsen twee blauwe cirkels elkaar snijden komen twee golfdalen samen en ontstaat er een extra diep golfdal. Plaatsen met een extra hoge golfberg of een extra diep golfdal worden **buiken** genoemd. Hier is de amplitude twee keer zo groot als bij een enkele trillingsbron. In figuur 26 zijn buiken aangegeven met dichte stippen.

Op plaatsen waar een oranje cirkel en een blauwe cirkel elkaar snijden komt een golfberg samen met een golfdal. Hier doven de golven elkaar uit en is de amplitude nul. Plaatsen waar de golven elkaar uitdoven worden **knopen** genoemd. In figuur 26 zijn de knopen aangegeven met open stippen.



Figuur 26 A en B zijn coherente trillingsbronnen. In het gebied waar de golven overlappen ontstaat er interferentie. Links zijn de buikpunten aangegeven met dichte stippen en knooppunten met open stippen. Rechts zijn de buikpunten met elkaar te verbinden en zie je de buiklijnen. Iedere buiklijn heeft een nummer.

**Buiken zijn plaatsen waar golven elkaar versterken.
Knopen zijn plaatsen waar golven elkaar uitdoven.**

Doordat de golven naar buiten bewegen verplaatsen de buiken en knopen zich en ontstaan er lijnen waar de golven elkaar versterken of uitdoven. Lijnen waarop de golven elkaar versterken zijn **buiklijnen** en lijnen waarop ze elkaar uitdoven zijn **knooplijnen**. Buiklijnen vind je door de buikpunten met elkaar te verbinden en knooplijnen door de knooppunten met elkaar te verbinden. Zie figuur 26.

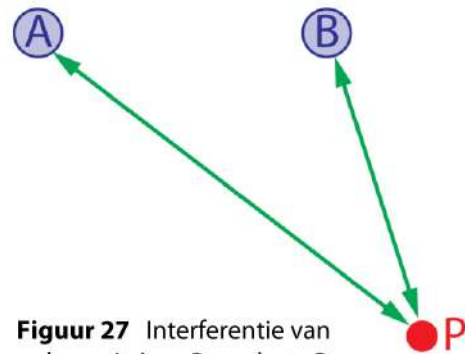
Superpositie

Als op een plaats twee golven tegelijkertijd aanwezig zijn is de resulterende uitwijking de som van de uitwijkingen van de afzonderlijke golven. Dit optellen van de uitwijkingen heet **superpositie**.

Superpositie is het optellen van de uitwijkingen van verschillende golven.

$$u_{\text{tot}} = u_1 + u_2$$

Om te bepalen of golven uit coherente trillingsbronnen A en B op plaats P constructief of destructief interfereren moet de fase weten van de golf uit A en de fase van de golf uit B. Verschillen deze fasen een heel getal $0, 1, 2, 3, \dots$, dan is er constructieve interferentie. Verschillen ze $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \dots$, dan is er destructieve interferentie. Zie figuur 27.



Figuur 27 Interferentie van golven uit A en B op plaats P.

Het faseverschil van de golf bij P en bron A is $\Delta\phi_{AP} = x_{AP} / \lambda$ en die met bron B is $\Delta\phi_{BP} = x_{BP} / \lambda$, waarbij x_{AP} is de afstand is tussen A en P en x_{BP} de afstand tussen B en P. Het verschil hiertussen vind je uit het verschil in de afstanden x_{AP} en x_{BP} . Is dit verschil nul of een heel aantal keer de golflengte $0, 1, 2, 3, \dots$, dan is er versterking. Is het verschil in afstand $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \dots$ keer de golflengte, dan is er uitdoving.

Je moet dus als volgt te werk gaan:

- 1) meet de afstanden tussen A en P en tussen B en P
- 2) bereken het verschil van deze afstanden
- 3) deel het afstandsverschil door de golflengte
- 4) komt er $0, 1, 2, 3, \dots$ uit dan is er constructieve interferentie
- 5) komt er $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \dots$ uit dan is er destructieve interferentie

Constructief: $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = n$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Destructief: $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = (n + \frac{1}{2})$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Getal n geeft het faseverschil van A en B aan op de verschillende buiklijnen of knooppunten. Dit wordt de **orde** van de interferentie genoemd. Bij de derde orde geldt $n = 3$, het faseverschil tussen de golven afkomstig uit A en uit B is daar 3. De nummers onder de buiklijnen in figuur 27 zijn dus de faseverschillen van de golven uit A en die uit B.

VOORBEELD interferentie

A en B zijn coherente trillingsbronnen en veroorzaken golven met een golflengte van 0,80 m. Punt P ligt op een afstand van 4,4 m van A en op 2,8 m van B. Punt Q ligt op een afstand van 3,0 m van A en op 1,8 m van B.

Bepaal voor P en Q of constructieve of destructieve interferentie optreedt.

- voor de fasen van de golven uit A en B geldt: $\phi_A = \frac{x_A}{\lambda}$ en $\phi_B = \frac{x_B}{\lambda}$
- $\phi_{A \rightarrow P} = \frac{x_A}{\lambda} = \frac{4,4}{0,8} = 5,5$ en $\phi_{B \rightarrow P} = \frac{x_B}{\lambda} = \frac{2,8}{0,8} = 3,5$
- $\phi_B - \phi_A = 5,5 - 3,5 = 2 \rightarrow$ constructieve interferentie
- $\phi_{A \rightarrow Q} = \frac{x_A}{\lambda} = \frac{3,0}{0,8} = 3,75$ en $\phi_{B \rightarrow Q} = \frac{x_B}{\lambda} = \frac{1,8}{0,8} = 2,25$
- $\phi_B - \phi_A = 3,75 - 2,25 = 1,5 \rightarrow$ destructieve interferentie

10.4 Watergolven, geluid en licht

Oppervlaktegolven van water

Als een wateroppervlak in trilling wordt gebracht ontstaan er oppervlaktegolven, waarbij het wateroppervlak verticaal op en neer gaat. De golven verplaatsen zich over het wateroppervlak met gelijke snelheid in alle richtingen. Hierdoor ontstaan cilindervormige golven. Zie figuur 28.



Figuur 28



Figuur 29

Oppervlaktegolven van water hebben als bijzondere eigenschap dat de golfsnelheid afhankelijk is van de frequentie. Dit verschijnsel heet **dispersie**. Hoe groter de frequentie is hoe kleiner de golfsnelheid. De golfsnelheid is **omgekeerd evenredig** met de frequentie. Ook lichtgolven in een transparant medium vertonen dispersie.

Bovendien is in ondiep water de golfsnelheid afhankelijk van de diepte. Is de diepte meer dan 0,5 keer de golflengte dan is er geen afhankelijkheid, maar bij een diepte minder dan 0,05 keer de golflengte geldt voor de golfsnelheid:

$$v_{\text{golf}} = \sqrt{g \cdot h}$$

- v_{golf} is de golfsnelheid in meter per seconde (m/s)
- g is de valversnelling: $9,81 \text{ m/s}^2$
- h is de waterdiepte in meter (m)

Deze bijzondere eigenschappen verklaren het typische gedrag van watergolven, zoals de **branding** bij het strand. Nadert een watergolf het strand dan neemt de golfsnelheid af waardoor het water omhoog wordt opgestuwd. Zie figuur 29. Het water beweegt dan niet alleen in verticale richting, maar ook in de richting van het strand en wordt een combinatie van transversale en een longitudinale golven. Ook de enorm hoge golven die ontstaan bij een **tsunami** kun je hiermee verklaren.

Geluid

Als een elastisch medium wordt samengeperst (verdicht) of uitgerekt (verdund) ontstaat er een **longitudinale golf**. Zo'n longitudinale golf noemen we **geluid**. Het elastisch medium kan zowel een gas (lucht) een vloeistof (water) of een vaste stof (staal, beton) zijn.

Zijn er één of enkele vaste frequenties aanwezig dan is er sprake van **muziek**. Bij een lage frequentie is de toon laag en bij een hoge frequentie is de toon hoog. Een **zuivere toon** ontstaat als de beweging van het voorwerp één harmonische trilling is waarbij een **sinus-vormig (u,t)-diagram** hoort.

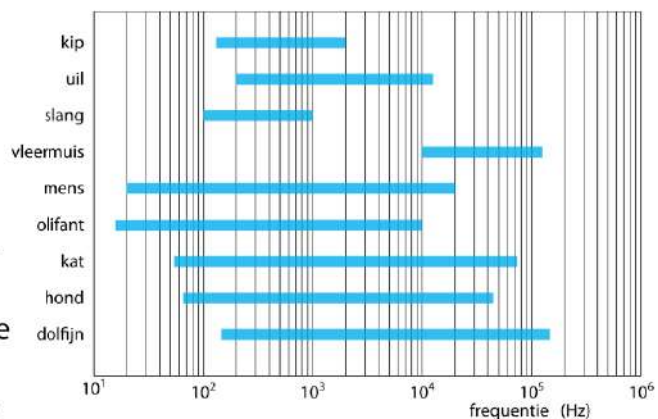
De toonhoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie.

Hoe groter de frequentie hoe hoger de toon.

De sterkte van geluid wordt bepaald door de amplitude.

Hoe groter de amplitude hoe harder het geluid.

Het menselijk gehoor is gevoelig voor frequenties tussen 20 en 20.000 Hz. De laagste frequentie van 20 Hz is de **onderste gehoor grens**, de hoogste frequentie van 20.000 Hz is de **bovenste gehoor grens**. Geluid met een frequentie lager dan 20 Hz heet **infrasoon** en met een frequentie groter dan 20.000 Hz **ultrasoon**. Sommige dieren (olifanten) kunnen lagere frequenties horen dan wij. Andere dieren (honden, vleermuizen) horen juist hogere frequenties dan mensen. Zie figuur 30.



Figuur 30 Gehoor grenzen.

Voortplantingssnelheid van geluid

Geluid verspreidt zich in alle richtingen. De snelheid waarmee geluid door het medium beweegt is de **geluidssnelheid** en wordt ook de **voortplantingssnelheid van geluid** genoemd. De geluidssnelheid hangt af van het medium en hangt af van de temperatuur. Een moeilijk vervormbaar medium heeft een grote geluidssnelheid. Vandaar dat de geluidssnelheid van gassen lager is dan die van vloeistoffen en van vaste stoffen.

Een moeilijk vervormbaar medium heeft een hoge geluidssnelheid.

De geluidssnelheid is niet afhankelijk van de frequentie of de amplitude.

Antigeluid

Met antigeluid kunnen storende geluidsgolven worden verzwakt. Dit gebeurt met behulp van destructieve interferentie. Om storend geluid te onderdrukken heb je een microfoon, een luidspreker en snelle elektronica nodig. De microfoon neemt het geluid op en met snelle elektronica wordt een nieuw signaal met tegenovergestelde uitwijking gemaakt en naar de luidspreker gestuurd.

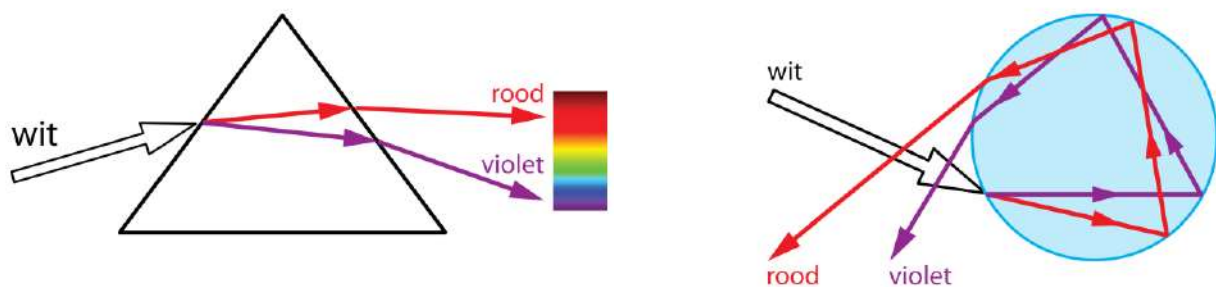


Figuur 31 Actieve ruisonderdrukking.

Meet de microfoon een verdichting dan produceert de luidspreker een verdunning en omgekeerd. In het ideale geval treedt volledige uitdoving op, zodat je geen geluid meer hoort. Zie figuur 31.

Licht

De lichtsnelheid is een natuurconstante en speelt een belangrijke rol in Einsteins relativiteitstheorie. In vacuüm heeft licht een snelheid van $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s. In een doorzichtige stof is de snelheid kleiner dan c en afhankelijk van de frequentie. Net als oppervlaktegolven van water vertoont licht **dispersie**, waardoor verschillende kleuren licht onder een andere hoek worden gebroken. Met een prisma kan wit licht worden gesplitst in de kleuren waaruit het is samengesteld. Zie figuur 32. Dit verklaart de regenboog die ontstaat als de zon schijnt tijdens een regenbui. Zie figuur 33. ·



Figuur 32 Dispersie van licht in een prisma (links) en in een waterdruppel (rechts).



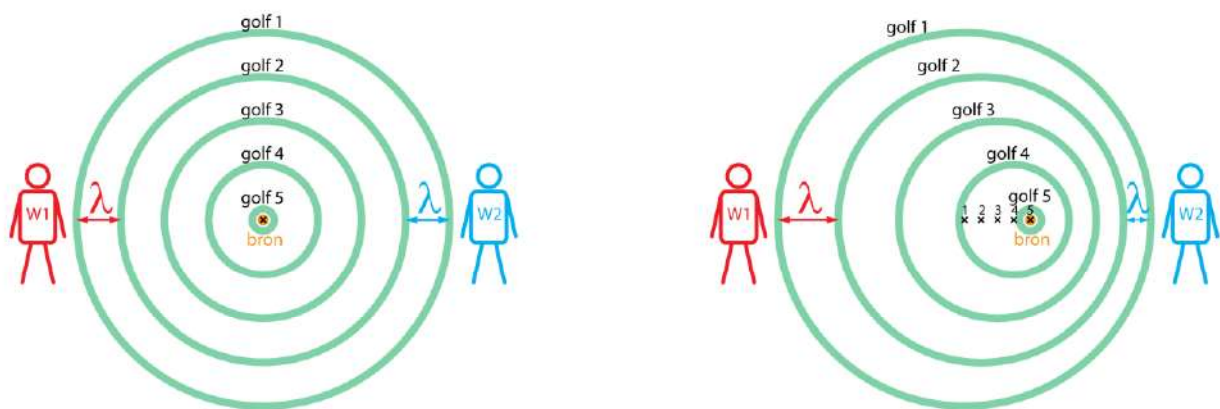
Figuur 33 Dispersie van lichtgolven in waterdruppels veroorzaken een dubbele regenboog.

10.5 Het dopplereffect

Het dopplereffect is genoemd naar **Christian Doppler** (1803–1853) en gaat over hoe de waargenomen frequentie van een golf afhankelijk is van de snelheden van de trillingsbron en van de waarnemer ten opzichte van het medium. We gaan er steeds van uit dat het medium stilstaat.

Bewegende trillingsbron

In figuur 34 zie je links een stilstaande bron en rechts een bron die beweegt. Staat de bron stil, dan nemen de waarnemers W1 en W2 dezelfde golflengte waar. Maar als de bron van W1 naar W2 beweegt worden de golven in de richting van W1 uitgerekt en in de richting van W2 ingedrukt. Voor W1 is de golflengte groter geworden en voor W2 kleiner. Omdat de golfsnelheid gelijk blijft zal de frequentie voor W1 afnemen en voor W2 toenemen.



Figuur 34 Het dopplereffect. Links staat de bron stil. Rechts beweegt de bron van waarnemer W1 vandaan en naar waarnemer W2 toe. Waarnemer W1 ziet een grotere golflengte en W2 een kleinere golflengte.

De trillingsbron zendt frequentie f_{bron} uit en de waarnemer meet frequentie f_w . Om f_w uit te rekenen moet je rekening houden met de richting van de snelheid. Beweegt de bron van je vandaan dan is de snelheid positief. Beweegt de bron naar je toe dan is de snelheid negatief. Voor de waargenomen frequentie bij een bewegende bron geldt:

$$f_w = \frac{v_{\text{golf}}}{v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}}} \cdot f_{\text{bron}}$$

afstand tot de bron wordt groter → v_{bron} is positief → $f_w < f_{\text{bron}}$
afstand tot de bron wordt kleiner → v_{bron} is negatief → $f_w > f_{\text{bron}}$

- f_w is de frequentie die wordt waargenomen in hertz (Hz)
- f_{bron} is de frequentie die door de trillingsbron wordt uitgezonden in hertz (Hz)
- v_{golf} is de golfsnelheid in meter per seconde (m/s)
- v_{bron} is de snelheid van de bron in meter per seconde (m/s)

BEWIJS

- stilstaande bron: $v_{\text{golf}} = f_{\text{bron}} \cdot \lambda_{\text{bron}} \rightarrow \lambda_{\text{bron}} = v_{\text{golf}} \cdot T_{\text{bron}}$
- de bron beweegt van je vandaan: $\lambda_w = v_{\text{golf}} \cdot T_{\text{bron}} + v_{\text{bron}} \cdot T_{\text{bron}} = (v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}}) \cdot T_{\text{bron}}$
- $v_{\text{golf}} = f_w \cdot \lambda_w \rightarrow \lambda_w = \frac{v_{\text{golf}}}{f_w}$
- $\frac{v_{\text{golf}}}{f_w} = (v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}}) \cdot T_{\text{bron}} \rightarrow \frac{v_{\text{golf}}}{f_w} = (v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}}) \cdot \frac{1}{f_{\text{bron}}} \rightarrow \frac{1}{f_w} = \frac{(v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}})}{v_{\text{golf}}} \cdot \frac{1}{f_{\text{bron}}}$
- breuken omkeren geeft: $f_w = \frac{v_{\text{golf}}}{v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}}} \cdot f_{\text{bron}}$

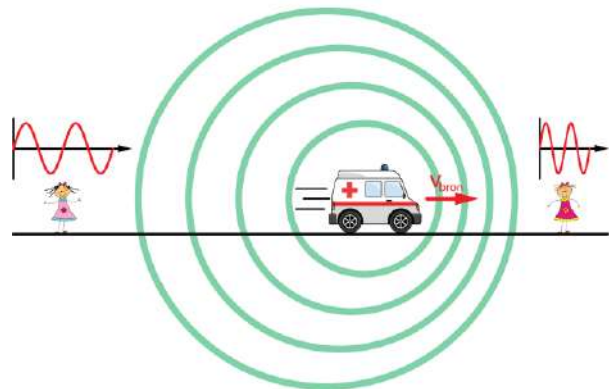
Het dopplereffect kan ook worden beschreven als verandering van de waargenomen golflengte. Als de bron stilstaat meet je golflengte λ_0 en als de bron beweegt meet je λ_w . Door bovenstaande formule om te schrijven vind je:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_{\text{bron}}}{v_{\text{golf}}}$$

afstand tot de bron wordt groter $\rightarrow v_{\text{bron}}$ is positief $\rightarrow \lambda_w > \lambda_0$
afstand tot de bron wordt kleiner $\rightarrow v_{\text{bron}}$ is negatief $\rightarrow \lambda_w < \lambda_0$

- $\Delta\lambda$ is de verandering van de golflengte in meter (m) ($\Delta\lambda = \lambda_w - \lambda_0$)
- λ_0 is de golflengte bij een stilstaande bron in meter (m)

Het dopplereffect van geluid kun je horen als een ziekenauto met grote snelheid voorbij rijdt. Rijdt de ziekenauto naar je toe, dan hoor je een sirene met een hoge frequentie. Rijdt de ziekenauto van je vandaan, dan hoor je een sirene met lage frequentie. Tijdens het passeren hoor je dat de toon plotseling van hoog naar laag gaat. Zie figuur 35.



Figuur 35 Dopplereffect bij een voorbijrijdende ziekenauto.

VOORBEELD dopplereffect bij bewegende geluidsbron

Een ziekenauto met sirene rijdt met grote snelheid voorbij. Als de ziekenauto naar je toe komt meet je 750 Hz. De sirene van een stilstaande ziekenauto heeft een frequentie van 700 Hz. De temperatuur is 20 °C.

Bereken de snelheid van de ziekenauto.

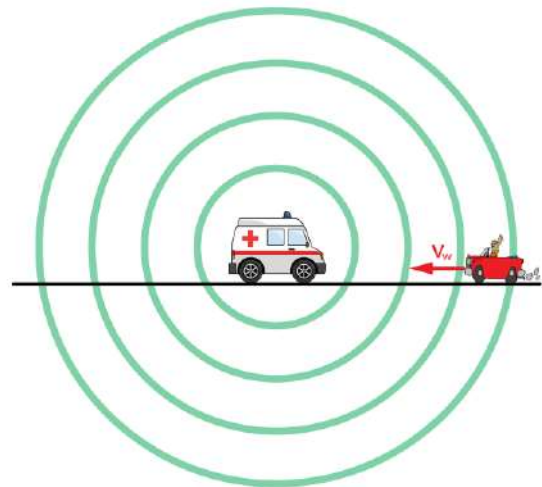
- $f_w = 750 \text{ Hz}$ | $f_{\text{bron}} = 700 \text{ Hz}$ | $v_{\text{golf}} = 343 \text{ m/s}$ | $v_{\text{bron}} = \dots \text{ m/s}$
- $f_w = \frac{v_{\text{golf}}}{v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}}} \cdot f_{\text{bron}}$
- $750 = \frac{343}{343 + v_{\text{bron}}} \cdot 700 \rightarrow 750 \cdot (343 + v_{\text{bron}}) = 700 \cdot 343$
- $2,5725 \cdot 10^5 + 750 \cdot v_{\text{bron}} = 2,401 \cdot 10^5 \rightarrow v_{\text{bron}} = \frac{2,401 \cdot 10^5 - 2,5725 \cdot 10^5}{750}$
- $v_{\text{bron}} = -22,86667 = -22,9 \text{ m/s}$ minteken want komt naar je toe

Bereken de frequentie die je meet als de ziekenauto voorbij is gereden.

- $f_{\text{bron}} = 700 \text{ Hz}$ | $v_{\text{golf}} = 343 \text{ m/s}$ | $v_{\text{bron}} = 22,86667 \text{ m/s}$ | $f_w = \dots \text{ Hz}$
- $f_w = \frac{v_{\text{golf}}}{v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}}} \cdot f_{\text{bron}}$
- $f_w = \frac{343}{343 + 22,86667} \cdot 700 \rightarrow f_w = 656,25 = 656 \text{ Hz}$

Bewegende waarnemer

Ook als de waarnemer beweegt ten opzichte van het medium en de bron stilstaat is er een dopplereffect. In figuur 36 zie je een stilstaande bron en een waarnemer die naar de bron beweegt.



Figuur 36 Dopplereffect bij een stilstaande ziekenauto en een bewegende waarnemer.

Voor deze situatie geldt:

$$f_w = \frac{v_{\text{golf}} - v_w}{v_{\text{golf}}} \cdot f_{\text{bron}}$$

afstand tot de bron wordt groter $\rightarrow v_w$ is positief $\rightarrow f_w < f_0$
afstand tot de bron wordt kleiner $\rightarrow v_w$ is negatief $\rightarrow f_w > f_0$

- f_w is de frequentie die wordt waargenomen in hertz (Hz)
- f_{bron} is de frequentie die door de trillingsbron wordt uitgezonden in hertz (Hz)
- v_{golf} is de golfsnelheid in meter per seconde (m/s)
- v_w is de snelheid van de waarnemer in meter per seconde (m/s)

BEWIJS

- stilstaande waarnemer: in één seconde komen er f_{bron} golven voorbij
- waarnemer beweegt met snelheid $-v_w$ naar de bron toe **let op het minteken**
- in één seconde legt de waarnemer v_w meter af waarop $\frac{v_w}{\lambda}$ golven passen
- de frequentie neemt toe met $\frac{-v_w}{\lambda} \rightarrow f_w = f_{\text{bron}} - \frac{v_w}{\lambda}$
- stilstaande bron: $v_{\text{golf}} = f_{\text{bron}} \cdot \lambda \rightarrow \lambda = \frac{v_{\text{golf}}}{f_{\text{bron}}}$ **invullen**
- $f_w = f_{\text{bron}} - v_w \cdot \frac{f_{\text{bron}}}{v_{\text{golf}}} \rightarrow f_w = f_{\text{bron}} - \frac{v_w}{v_{\text{golf}}} \cdot f_{\text{bron}} \rightarrow f_w = \frac{v_{\text{golf}} - v_w}{v_{\text{golf}}} \cdot f_{\text{bron}}$

MERK OP De oorzaak van het dopplereffect van een bewegende bron is anders dan van een bewegende waarnemer. Als de bron beweegt worden de golven in de richting van de waarnemer ingedrukt, waardoor de golflengte kleiner wordt: $\lambda_w < \lambda_0$. Zie figuren 34 en 35. Als de waarnemer naar de bron beweegt verandert de golflengte niet en blijft λ_0 . Maar in dit geval komt de waarnemer per seconde meer golven tegen, waardoor de waargenomen frequentie groter wordt: $f_w > f_{\text{bron}}$. Zie figuur 36.

VOORBEELD dopplereffect bij bewegende waarnemer

Een ziekenauto met sirene staat stil. Als je naar de ziekenauto toe rijdt meet je 750 Hz. De sirene van de stilstaande ziekenauto heeft een frequentie van 700 Hz. De temperatuur is 20 °C.

Bereken de snelheid waarmee je naar de ziekenauto rijdt.

- $f_w = 750 \text{ Hz} \mid f_{\text{bron}} = 700 \text{ Hz} \mid v_{\text{golf}} = 343 \text{ m/s} \mid v_w = \dots \text{ m/s}$
- $f_w = \frac{v_{\text{golf}} - v_w}{v_{\text{golf}}} \cdot f_{\text{bron}} \rightarrow 750 = \frac{343 - v_w}{343} \cdot 700 \rightarrow 750 \cdot 343 = (343 - v_w) \cdot 700$
- $2,5725 \cdot 10^5 = 2,401 \cdot 10^5 - 700 \cdot v_w \rightarrow v_w = -24,5 \text{ m/s}$

Bereken de frequentie die je meet als je de ziekenauto voorbij bent gereden.

- $f_{\text{bron}} = 700 \text{ Hz} \mid v_{\text{golf}} = 343 \text{ m/s} \mid v_w = 24,5 \text{ m/s} \mid f_w = \dots \text{ Hz}$
- $f_w = \frac{v_{\text{golf}} - v_w}{v_{\text{golf}}} \cdot f_{\text{bron}} \rightarrow f_w = \frac{343 - 24,5}{343} \cdot 700 \rightarrow f_w = 650 \text{ Hz}$

MERK OP De sirene van de stilstaande ziekenauto heeft een frequentie van 700 Hz. Als de ziekenauto met 22,9 m/s naar je toe rijdt hoor je 750 Hz, maar als je zelf naar een stilstaande ziekenauto rijdt hoor je 750 Hz pas bij een snelheid van 24,5 m/s. En ook als de ziekenauto voorbij is gereden hoor je een andere frequentie (656 Hz) dan als je zelf de ziekenauto voorbijrijdt (650 Hz). De verschillen zijn klein, maar een bewegende waarnemer geeft een ander resultaat dan een bewegende bron.

Bewegende bron én bewegende waarnemer

Als zowel de bron als de waarnemer bewegen ten opzichte van het medium moeten de twee formules met elkaar worden gecombineerd. Je vindt dan:

$$f_w = \frac{v_{\text{golf}} - v_w}{v_{\text{golf}} + v_{\text{bron}}} \cdot f_{\text{bron}}$$

afstand tot de bron wordt groter → **v_w is positief** → **$f_w < f_0$**
afstand tot de bron wordt kleiner → **v_w is negatief** → **$f_w > f_0$**

Het bewijs van deze formule laat ik achterwege. Wel kun je eenvoudig controleren dat deze formule geldt voor de situaties waarin de waarnemer stilstaat en waarin de bron stilstaat. Vul je $v_w = 0$ in dan krijg je de formule voor een bewegende bron en vul je $v_{\text{bron}} = 0$ in dan krijg je de formule voor een bewegende waarnemer.

MERK OP In Binas tabel 35 B (overige) staat deze formule met een minteken in de noemer. In die formule moet je een positieve snelheid invullen als de bron naar de waarnemer toe beweegt.

Dopplereffect bij licht

Ook bij lichtgolven is er een dopplereffect. Maar voor lichtgolven in vacuüm is er geen medium en je kunt dus geen onderscheid maken tussen een bewegende bron en een bewegende waarnemer. Vandaar dat de bovenstaande formules niet gebruikt kunnen worden voor licht in vacuüm. Je moet rekening houden met de bijzondere eigenschappen van licht, zoals in Einsteins relativiteitstheorie gebeurt. Met deze theorie vind je voor het **relativistische dopplereffect** de volgende formule:

$$f_w = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot f_{\text{bron}} \quad | \quad \lambda_w = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot \lambda_0$$

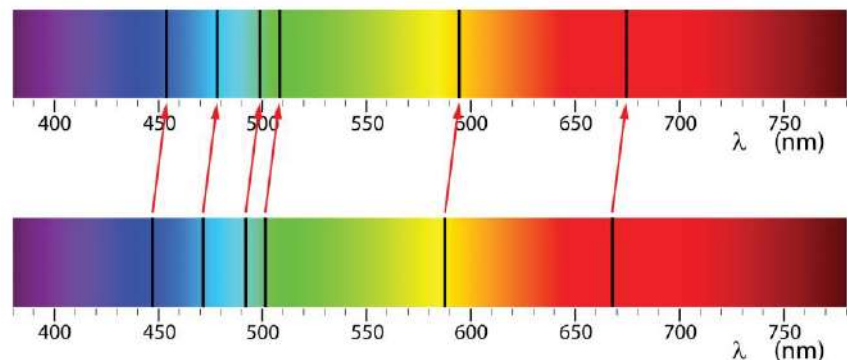
afstand tot de bron wordt groter → **v is positief** → **$f_w < f_{\text{bron}}$**
afstand tot de bron wordt kleiner → **v is negatief** → **$f_w > f_{\text{bron}}$**

- f_w is de waargenomen frequentie in hertz (Hz)
- f_{bron} is de frequentie die door de trillingsbron wordt uitgezonden in hertz (Hz)
- λ_w is de waargenomen golflengte in meter (m)
- λ_0 is de golflengte die je waarneemt bij een stilstaande bron in meter (m)
- c is de lichtsnelheid in meter per seconde (m/s)
- v is de relatieve snelheid tussen de waarnemer en de bron (m/s)

In de sterrenkunde wordt het dopplereffect gebruikt om de snelheid van sterren en sterrenstelsels te bepalen. Ieder element van het periodieke systeem absorbeert een unieke set golflengtes en door deze golflengtes te meten kan het element worden herkend. Maar als de lichtbron beweegt zorgt het dopplereffect ervoor dat de golflengtes een beetje verschuiven ten opzichte van de golflengtes van stilstaande atomen.

In figuur 37 zie je het absorptiespectrum van helium. Het onderste spectrum is op aarde gemeten bij stilstaande He-atomen. Het bovenste spectrum is gemeten bij een sterrenstelsel. De absorptielijnen van helium (de zwarte lijnen) zijn allemaal evenveel naar het rood verschoven. Hieruit volgt dat de ster van je vandaan beweegt en met de formule voor het relativistische dopplereffect kun je de snelheid van de ster berekenen.

Figuur 37 Van een ster wordt het He-spectrum waargenomen. De lijnen zijn verschoven omdat de ster met grote snelheid van de aarde af beweegt.



VOORBEELD dopplereffect bij licht

Van een ster wordt het heliumspectrum gemeten. De waargenomen absorptielijnen hebben een grotere golflengte dan die van een stilstaand He-atoom. De 501,6 nm lijn van een stilstaand He-atoom wordt bij 509,1 nm waargenomen.

Bereken de snelheid waarmee de ster beweegt ten opzichte van de aarde.

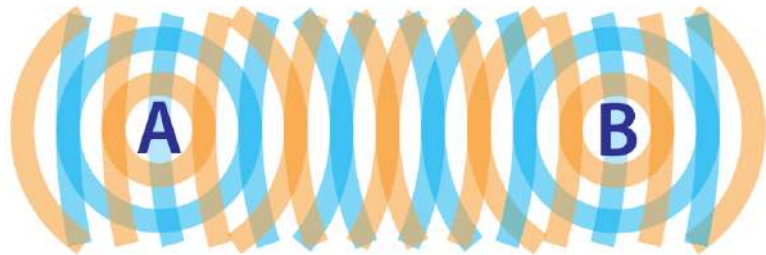
- $\lambda_{\text{bron}} = 501,6 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad | \quad \lambda_{\text{w}} = 509,1 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad | \quad v = \dots \text{ m/s}$
- $\lambda_{\text{w}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot \lambda_{\text{bron}}$
- $\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \frac{\lambda_{\text{w}}}{\lambda_{\text{bron}}} \rightarrow \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \frac{509,1 \cdot 10^{-9}}{501,6 \cdot 10^{-9}} = 1,01495$ links en rechts kwadrateren
- $\frac{c+v}{c-v} = 1,03013 \rightarrow c+v = 1,03013 \cdot c - 1,03013 \cdot v$
- $2,03013 \cdot v = 0,03013 \cdot c \rightarrow v = \frac{0,03013}{2,03013} \cdot c \rightarrow v = 0,01484 \cdot c$

MERK OP In bovenstaand voorbeeld is de berekende snelheid veel kleiner dan de lichtsnelheid. In dat geval is de formule voor een bewegende bron een goede benadering. Als je de formule voor een bewegende bron gebruikt vind je $v = 0,01495 \cdot c$.

10.6 Staande golven

Staande golven

Figuur 38 is een vergroting van het middelste deel van figuur 25. Tussen de trillingsbronnen A en B zie je plaatsen waar twee golfbergen (oranje lijnen) en twee golfdalen (blauwe lijnen) samenkomen en waar zich dus buiken bevinden. Tussen deze buiken ontmoet een berg van bron A een dal van bron B, waardoor een knoop ontstaat. De buiken en knopen liggen op vaste plaatsen en bewegen niet. Vandaar dat we spreken van een **staande golf**. Een staande golf ontstaat als twee golven met dezelfde frequentie en dezelfde amplitude tegen elkaar in bewegen.



Figuur 38 Een staande golf is aanwezig tussen de trillingsbronnen A en B.

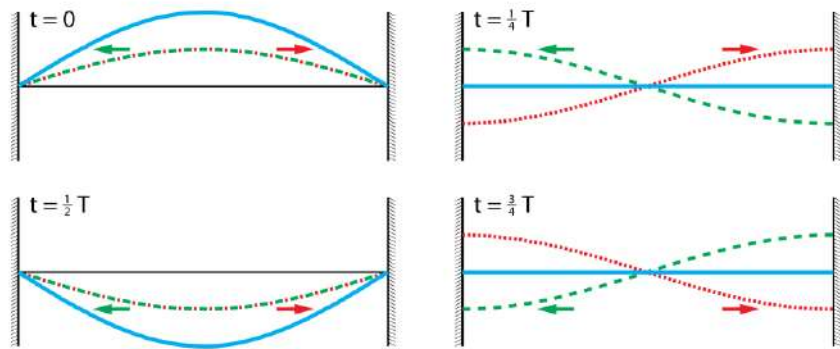
Een staande golf ontstaat als twee golven met dezelfde frequentie en dezelfde amplitude tegen elkaar in bewegen.

Een staande golf heeft stilstandende plaatsen met constructieve interferentie (buiken) en destructieve interferentie (knoep).

Staande transversale golven bij vaste uiteinden

Een snaarinstrument heeft snaren die aan beide uiteinden zijn vastgemaakt en onder spanning zijn gebracht. Breng je zo'n snaar in beweging, dan gaat deze op regelmatige manier trillen met enkele vaste frequenties. De frequenties van de snaar bepalen de toonhoogte en de "klankkleur" van de muzieknoot. In de snaar bevinden zich staande golven die ontstaan omdat de lopende golven steeds worden teruggekaatst bij de uiteinden. Zie figuur 39. De heengaande en teruggekaatste golven komen elkaar tegen en interfereren. Bij de uiteinden is de amplitude nul, want daar is de snaar vastgemaakt. Als de snaar met de laagst mogelijke frequentie trilt is er in het midden constructieve interferentie, waardoor er één buik ontstaat. De staande golf met de grootst mogelijke golflengte en dus de laagst mogelijke frequentie is de grondtoon. In figuur 40 zie je hoe de snaar in de grondtoon trilt.

De staande golf met de grootst mogelijke golflengte en dus de laagst mogelijke frequentie is de grondtoon. De grondtoon is daarom de laagste toon die een muziekinstrument kan maken.

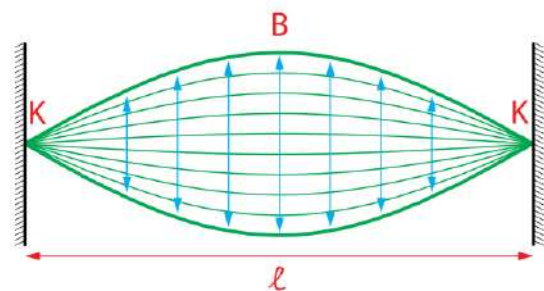


Figuur 39 Lopende golven in een aan beide uiteinden vastgemaakte snaar kaatsen heen en weer en veroorzaken een staande golf.

In figuur 39 zie je een snaar met twee golven lopen. De rode golf beweegt naar rechts en de groene golf naar links. De blauwe staande golf is de superpositie (optelling) van de lopende rode en groene golven. De lengte van de snaar is een halve golflengte.

- Op $t = 0$ hebben de rode en de groene golf een berg in het midden van het koord. Ze versterken elkaar → **constructieve interferentie**.
- Op $t = \frac{1}{4}T$ is de rode golf $\frac{1}{4}\lambda$ naar rechts verschoven en de groene golf $\frac{1}{4}\lambda$ naar links. Nu doven ze elkaar uit → **destructieve interferentie**.
- Op $t = \frac{1}{2}T$ is de rode golf $\frac{1}{2}\lambda$ naar rechts verschoven en de groene golf $\frac{1}{2}\lambda$ naar links. Nu versterken ze elkaar → **constructieve interferentie**.
- Op $t = \frac{3}{4}T$ is de rode golf $\frac{3}{4}\lambda$ naar rechts verschoven en de groene golf $\frac{3}{4}\lambda$ naar links. Nu doven ze elkaar uit → **destructieve interferentie**.
- Op $t = T$ begint een nieuwe cyclus.

Je ziet dat de snaar beweegt zoals in figuur 40 is getekend. De punten van de snaar trillen verticaal heen en weer met gelijke fase. Ze gaan allemaal tegelijk door de evenwichtstand en ze zijn allemaal tegelijk in de uiterste standen boven en onder. De snaar trilt hier in de grondtoon.

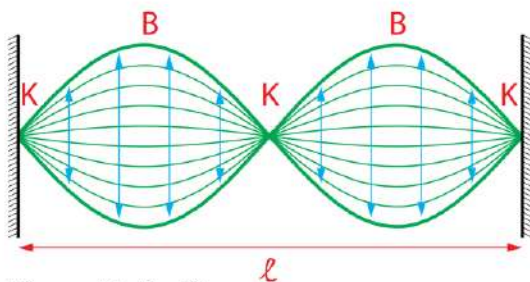


Figuur 40 Staande golf in een aan twee kanten vastgemaakte snaar in de grondtoon.

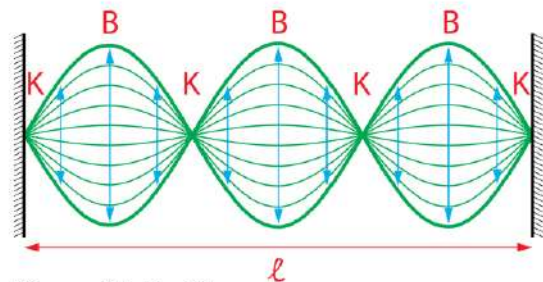
Boventonen

De staande golf van figuur 40 is niet de enige mogelijkheid waarmee de snaar kan trillen. Als de lengte van de snaar precies een hele golflengte is dient zich een nieuwe mogelijkheid aan. De heen- en teruggaande golven interfereren nu zodanig dat niet alleen bij de uiteinden maar ook in het midden altijd destructieve interferentie plaatsvindt. Er ontstaan nu twee buiken, zie figuur 41. Dit is de **eerste boventoon**.

Bij volgende mogelijkheid is de lengte van de snaar anderhalf keer de golflengte. Het patroon dat ontstaat heeft drie buiken. Zie figuur 42. Dit is de **tweede boventoon**.



Figuur 41 De 1^e boventoon.



Figuur 42 De 2^e boventoon.

In een snaarinstrument ontstaan niet alleen de grondtoon, maar ook de 1^e, 2^e, 3^e, etc. boventonen. Ieder instrument heeft een uniek mengsel van boventonen. Dit maakt dat je verschil kunt horen tussen bijvoorbeeld een gitaar, een viool en een piano. Kijk je naar de figuren 40, 41 en 42 dan valt het volgende op.

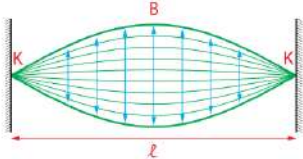
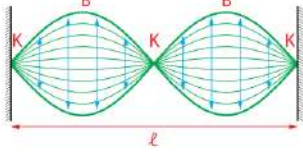
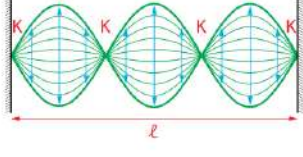
Bij iedere volgende boventoon komt er één knoop en één buik bij.

De afstand tussen twee buiken B – B en de afstand tussen twee knopen K – K is steeds $\frac{1}{2}\lambda$ en dat de afstand tussen een buik en een knoop B – K is steeds $\frac{1}{4}\lambda$.

$$B - B = \frac{1}{2}\lambda \quad K - K = \frac{1}{2}\lambda \quad B - K = \frac{1}{4}\lambda$$

Als l de lengte van de snaar is geldt:

- staande golf met 1 buik $\rightarrow l = 1 \cdot \frac{1}{2}\lambda$ (grondtoon)
- staande golf met 2 buiken $\rightarrow l = 2 \cdot \frac{1}{2}\lambda$ (1^e boventoon)
- staande golf met 3 buiken $\rightarrow l = 3 \cdot \frac{1}{2}\lambda$ (2^e boventoon)

staande golf vast – vast	toon	lengte van de snaar	golflente	frequentie
	grondtoon	$l = 1 \cdot \frac{1}{2}\lambda_0$	λ_0	f_0
	1 ^e boventoon	$l = 2 \cdot \frac{1}{2}\lambda_1$	$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{2}$	$f_1 = 2 \cdot f_0$
	2 ^e boventoon	$l = 3 \cdot \frac{1}{2}\lambda_2$	$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{3}$	$f_2 = 3 \cdot f_0$

Voor een aan beide kanten vastgemaakte snaar geldt:

$$\ell = n \cdot \frac{1}{2} \lambda$$

- ℓ is de lengte van de snaar in meter (m)
- n is het aantal buiken in de snaar $n = 1, 2, 3, \dots$
- λ is de golflengte in meter (m)

VOORBEELD harp

Een harp heeft een snaar waarmee muzikant a_0 wordt gespeeld. Deze noot heeft een frequentie van $f_{a_0} = 220$ Hz. De golfsnelheid in de snaar is 800 m/s.

Bereken de lengte van de snaar.

- $f_{a_0} = 220$ Hz | $v_{\text{golf}} = 800$ m/s | $\lambda = \dots$ m
- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow 800 = 220 \cdot \lambda \rightarrow \lambda = 3,63636$ m
- twee vaste uiteinden $\rightarrow$ grondtoon K – B – K
- $\ell = 2 \cdot \frac{1}{4} \lambda = \frac{1}{2} \lambda \rightarrow \ell = \frac{1}{2} \cdot 3,63636 = 1,81818 = 1,82$ m

Bereken de frequentie van de 2^e boventoon.

- patroon 1^e boventoon K – B – K – B – K
- patroon 2^e boventoon K – B – K – B – K – B – K
- 2^e boventoon: $\ell = 6 \cdot \frac{1}{4} \lambda = \frac{3}{2} \lambda \rightarrow 1,81818 = \frac{3}{2} \lambda \rightarrow \lambda = 1,21212$ m
- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow 800 = f \cdot 1,21212 \rightarrow f = 660$ Hz ($f_2 = 3 \cdot f_0$)



Spankracht en toonhoogte

Sommige snaarinstrumenten, zoals viool en gitaar, hebben snaren met een vaste lengte. Toch heeft iedere snaar een andere grondtoon. Dit komt omdat:

- snaren met hoge tonen een grotere spankracht hebben
- snaren van lage tonen dikker zijn
- snaren van verschillende materialen zijn gemaakt



Om een snaarinstrument te stemmen pas je de spankracht aan. Daarvoor zijn draaiknoppen aangebracht waarmee je de snaar kunt spannen. Door een snaar strakker te spannen neemt de golfsnelheid toe. En omdat de golflengte gelijk blijft neemt hierdoor de frequentie toe. Om een lage toon te maken moet je de spankracht verminderen. Je kunt ook dikkeren snaren kiezen, want hoe dikker de snaar hoe lager de toon.

snaar strakker	$\rightarrow$	frequentie van de grondtoon wordt hoger
snaar dikker	$\rightarrow$	frequentie van de grondtoon wordt lager

Voor een snaar geldt:

$$v_{\text{golf}} = \sqrt{\frac{F_s \cdot \ell}{m}}$$

- v_{golf} is de golfsnelheid in de snaar in meter per seconde (m/s)
- F_s is de spankracht van de snaar in newton (N)
- ℓ is de lengte van de snaar in meter (m)
- m is de massa van de snaar in kilogram (kg)

VOORBEELD spaken in een fietswiel

Om te controleren of de spaken in een fietswiel de juiste spankracht hebben tikt de fietsenmaker met een hamertje tegen de spaak. Bij een toon van 300 Hz is de spankracht goed. De spaken in een fietswiel hebben een lengte van 30 cm en een massa van 6,0 gram.



Bereken de spankracht van de spaak.

- grondtoon: $\ell = \frac{1}{2}\lambda \rightarrow 0,3 = \frac{1}{2}\lambda \rightarrow \lambda = 0,60 \text{ m}$
- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow v_{\text{golf}} = 300 \cdot 0,6 = 180 \text{ m/s}$
- $v_{\text{golf}} = \sqrt{\frac{F_s \cdot \ell}{m}} \rightarrow 180 = \sqrt{\frac{F_s \cdot 0,30}{6,0 \cdot 10^{-3}}} \rightarrow F_s = 648 = 6,5 \cdot 10^2 \text{ N}$

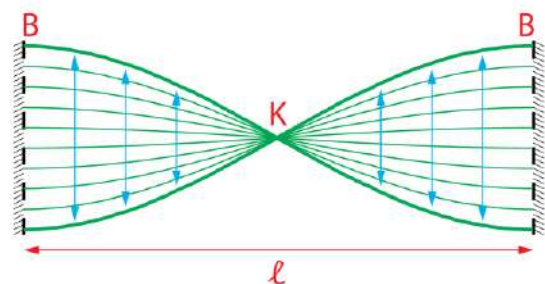
Leg uit of de frequentie van een te losse spaak hoger of lager is.

- F_s kleiner, ℓ en m blijven gelijk $\rightarrow v_{\text{golf}}$ kleiner
- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow v_{\text{golf}}$ is kleiner, λ blijft gelijk $\rightarrow f$ is lager

Staande transversale golven bij losse uiteinden

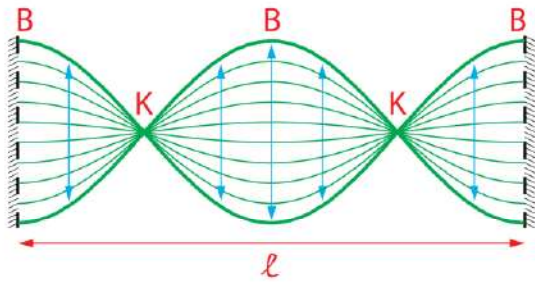
Bij snaarinstrumenten zijn de snaren aan beide uiteinden vastgemaakt en kunnen daar niet trillen. Maar er zijn ook instrumenten, zoals een xylofoon, waarbij staven bij de uiteinden wel kunnen trillen. Deze uiteinden zijn "los" en bij een los uiteinde ontstaat altijd een buik.

Als een staaf met de laagst mogelijke frequentie trilt is er in het midden destructieve interferentie, waardoor er één knoop ontstaat. De staande golf met de grootst mogelijke golflengte en dus de laagst mogelijke frequentie is de grondtoon. In figuur 43 zie je hoe de staaf in zijn grondtoon trilt.

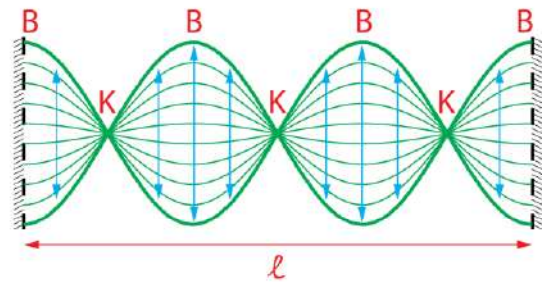


Figuur 43 Staande golf in een staaf die aan de uiteinden vrij kan trillen in de grondtoon.

Ook in dit geval ontstaan er boventonen. Als de lengte van de staaf precies een hele golflengte is dient zich een nieuwe mogelijkheid aan. Het patroon dat ontstaat is de **eerste boventoon** en zie je in figuur 44. In figuur 45 zie je de **tweede boventoon**.



Figuur 44 De 1^e boventoon.



Figuur 45 De 2^e boventoon.

Staande longitudinale golven (blaasinstrumenten)

Behalve staande transversale golven zijn er ook staande longitudinale golven. Dit soort golven vind je in blaasinstrumenten. Een blaasinstrument bestaat uit een buis gevuld met lucht. Door in een mondstuk te blazen wordt de lucht in de luchtkolom in trilling gebracht met een groot aantal frequenties. Alleen frequenties waarbij in de luchtkolom een staande golf ontstaat worden versterkt. De lengte van de buis bepaalt de mogelijke golflengtes. Als het uiteinde van de buis open is kan de lucht daar makkelijk trillen, zodat daar een buik ligt. Bij een dicht uiteinde kan de lucht niet trillen, zodat daar altijd knoop ligt. Als een buis twee open uiteinden heeft ligt bij ieder uiteinde een buik. Als een buis één open en één gesloten uiteinde heeft ligt er een buik bij het open en een knoop bij het gesloten uiteinde.

Een staande longitudinale golf in een buis met lucht heeft altijd een buik bij een open uiteinde en een knoop bij een gesloten uiteinde.

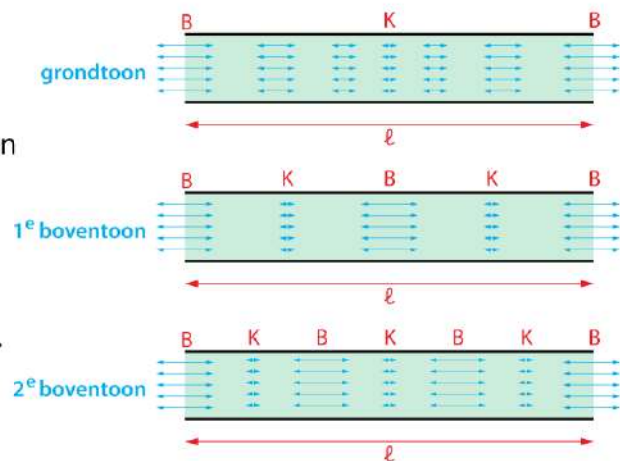
Staande longitudinale golven bij losse uiteinden

Er zijn blaasinstrumenten met twee open uiteinden en instrumenten waarbij één kant open is en één kant dicht. We gaan eerst kijken naar blaasinstrumenten met twee open uiteinden, de anderen komen later aan bod. Twee open uiteinden vind je onder andere in: orgelpijp, dwarsfluit, blokfluit, didgeridoo. Bij het open uiteinde van een buis ligt altijd een buik. Meestal ligt de buik niet precies bij de opening maar een paar centimeter erbuiten. Tussen twee buiken bevindt zich altijd één knoop. De afstand tussen twee buiken is de helft van de golflengte. De afstand tussen een buik en een knoop is een kwart golflengte. De situatie is gelijk met de eerder behandelde trillende staaf met losse uiteinden.

Figuur 46
Blaasinstrumenten
met twee open
uiteinden.



In blaasinstrumenten bevinden de golven zich in een luchtkolom, zodat de golfsnelheid gelijk is aan de geluidssnelheid van lucht: 343 m/s bij 20 °C. Bij blaasinstrumenten ligt de golfsnelheid daarom vast. Om een blaasinstrument te stemmen moet je de lengte veranderen. Maak je hem langer dan wordt de golflengte groter en neemt de frequentie af, waardoor de toon lager wordt. Maak je hem korter, dan wordt frequentie hoger.



Figuur 47 Buis met twee open uiteinden.

**De golfsnelheid in een blaasinstrument is de geluidssnelheid in lucht.
Een blaasinstrument stem je door hem langer of korter te maken.**

De geluidssnelheid van lucht neemt toe als de temperatuur hoger wordt. Als tijdens een concert een blaasinstrument warmer wordt dan raakt het zijn juiste stemming kwijt. De musicus kan dit verhelpen door zijn instrument langer te maken.



Figuur 48 Bij een hoorn kun je de lengte van de buis aanpassen.

staande golf los – los in klankstaaf	staande golf los – los in luchtkolom	toon	lengte van de snaar	golflengte	frequentie
		grondtoon	$\ell = 1 \cdot \frac{1}{2} \lambda_0$	λ_0	f_0
		1 ^e boventoon	$\ell = 2 \cdot \frac{1}{2} \lambda_1$	$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{2}$	$f_1 = 2 \cdot f_0$
		2 ^e boventoon	$\ell = 3 \cdot \frac{1}{2} \lambda_2$	$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{3}$	$f_2 = 3 \cdot f_0$

Als de klankstaaf of de luchtkolom aan beide uiteinden gemakkelijk kan trillen geldt:

$$\ell = n \cdot \frac{1}{2} \lambda$$

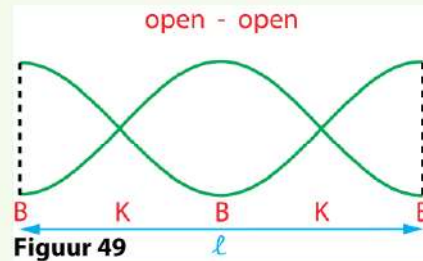
– n is het aantal knopen in de klankstaaf / luchtkolom $n = 1, 2, 3, \dots$

VOORBEELD didgeridoo

Een didgeridoo is een buis met twee open uiteinden. De frequentie van de eerste boventoon $f_1 = 286 \text{ Hz}$ bij $T = 20,0 \text{ °C}$.

Bereken de lengte van het instrument.

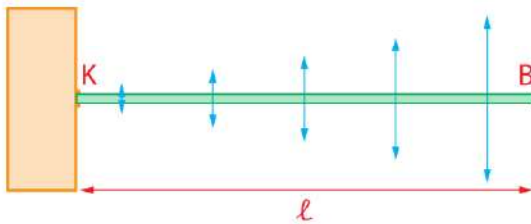
- patroon 1^e boventoon: B – K – B – K – B
- $\ell = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \lambda = \lambda$
- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow v_{\text{golf}} = f \cdot \ell$
- $\ell = \frac{v_{\text{golf}}}{f} \rightarrow \ell = \frac{343}{286} = 1,20 \text{ m}$



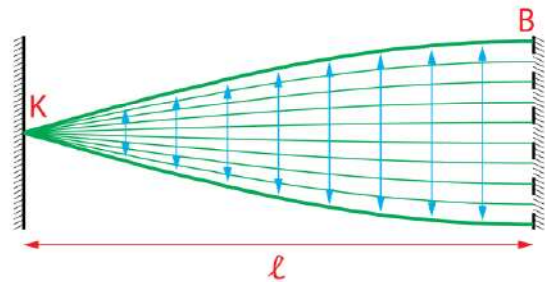
Figuur 49

Staande golven bij één vast en één los uiteinde

Als laatste bekijken we situaties waarbij één uiteinde vast is en het andere uiteinde los. Zie figuur 50. Bij het vaste uiteinde kan de staaf niet trillen, zodat daar een knoop ligt. Bij het losse uiteinde kan de staaf gemakkelijk trillen, zodat daar een buik ligt. In figuur 51 zie je hoe de staaf in zijn grondtoon trilt.

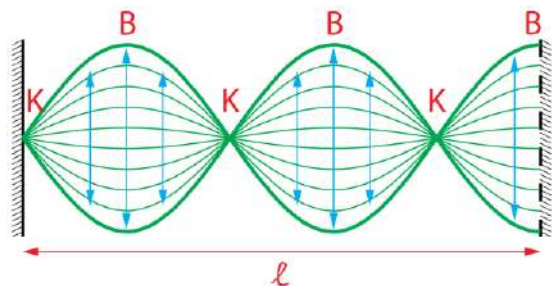
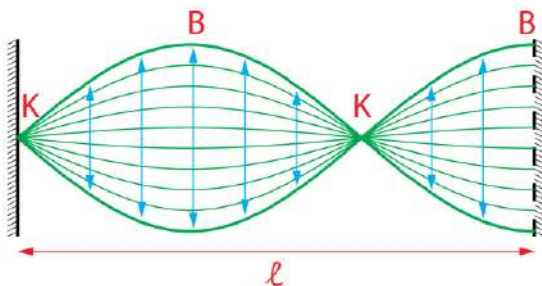


Figuur 50 Staaf die aan één kant vast zit en aan de andere kant vrij kan trillen.



Figuur 51 Staande golf vast – los grondtoon.

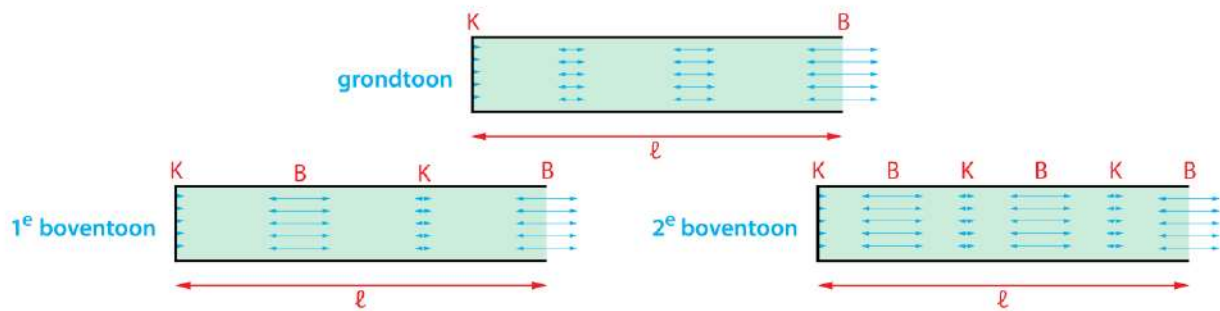
Ook nu kunnen er boventonen ontstaan, zoals te zien in de figuur 52.



Figuur 52 Links: vast – los 1^e boventoon, rechts vast – los 2^e boventoon.

Blaasinstrumenten met één dicht en één open uiteinde

Sommige blaasinstrumenten hebben een dicht uiteinde bij het mondstuk en een open uiteinde aan de andere kant. Voorbeelden zijn: klarinet, saxofoon, hobo, fagot, panfluit. Bij het dichte uiteinde ligt een knoop en bij het open uiteinde ligt een buik. Zie figuur 53.



Figuur 53 Luchtkolom met een open en een gesloten uiteinde.

staande golf vast – los in klankstaaf	staande golf vast – los in luchtkolom	toon	lengte van de snaar	golflengte	frequentie
		grondtoon	$\ell = 1 \cdot \frac{1}{4} \lambda_0$	λ_0	f_0
		1 ^e boventoon	$\ell = 3 \cdot \frac{1}{4} \lambda_1$	$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{3}$	$f_1 = 3 \cdot f_0$
		2 ^e boventoon	$\ell = 5 \cdot \frac{1}{4} \lambda_2$	$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{5}$	$f_2 = 5 \cdot f_0$

Voor een staaf met lengte ℓ met een vast en een los uiteinde geldt:

$$\ell = (2n-1) \cdot \frac{1}{4} \lambda \quad n=1, 2, 3, \dots$$

- ℓ is de lengte van de klankstaaf of luchtkolom in meter (m)
- n is het aantal knopen of buiken: $n = 1, 2, 3, \dots$
- λ is de golflengte in meter (m)

VOORBEELD orgelpijp

Een orgelpijp is aan de onderkant open en kan aan de bovenkant dicht of open zijn. De frequentie van de 2^e boventoon is 550 Hz. De geluidssnelheid is 343 m/s.

Bereken de lengte van de orgelpijp als de bovenkant dicht is.

- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow 343 = 550 \cdot \lambda_2 \rightarrow \lambda_2 = 0,6236 \text{ m}$
- patroon 2^e boventoon: B – K – B – K – B – K
- $\ell = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \lambda \rightarrow \ell = \frac{5}{4} \cdot 0,6236 = 0,7795 = 0,78 \text{ m}$



Bereken de frequentie van de 2^e boventoon als de bovenkant open is.

- patroon 2^e boventoon: B – K – B – K – B – K – B
- $\ell = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda \rightarrow 0,7795 = \frac{3}{2} \cdot \lambda \rightarrow \lambda = 0,5197 \text{ m}$
- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow 343 = f \cdot 0,5197 \rightarrow f = 660 \text{ Hz}$

VOORBEELD panfluit

Een panfluit heeft een buis met lengte 19,5 cm.
Aan de onderkant is de buis gesloten. $T = 20^\circ \text{C}$.

Bereken welke toon deze buis voortbrengt.

- patroon grondtoon: B – K
- $\ell = \frac{1}{4} \cdot \lambda \rightarrow \lambda = 4 \cdot \ell \rightarrow \lambda = 4 \cdot 0,195 = 0,78 \text{ m}$
- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow 343 = 0,78 \cdot f \rightarrow f = 439,74 = 440 \text{ Hz}$
- opzoeken Binas Tabel 15C $\rightarrow$ muzieknoot A1



Bereken de frequentie van de 1^e boventoon van deze buis.

- patroon 1^e boventoon: B – K – B – K
- $\ell = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \lambda \rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \cdot \ell \rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \cdot 0,195 \rightarrow \lambda = 0,26 \text{ m}$
- $v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda \rightarrow 343 = f \cdot 0,26 \rightarrow f_1 = 1319,2 = 1,32 \cdot 10^3 \text{ Hz}$
- controle: $f_1 = 3 \cdot f_0 \rightarrow 1320 = 3 \cdot 440 \rightarrow$ klopt

Het spelen van een toon

Een blaasinstrument geeft geluid door staande longitudinale golven in een buis met lucht. De staande golf met $n = 1$ heeft de laagste frequentie en is de **grondtoon**, aangegeven als f_0 . Deze toon is het duidelijkst hoorbaar en bepaalt de toonhoogte. De staande golven met $n = 2, 3, 4, \dots$ hebben een kleinere amplitude en zijn daarom minder goed te horen. Dit zijn de **boventonen** met frequenties f_1, f_2, f_3 , etc. die de klankkleur bepalen.

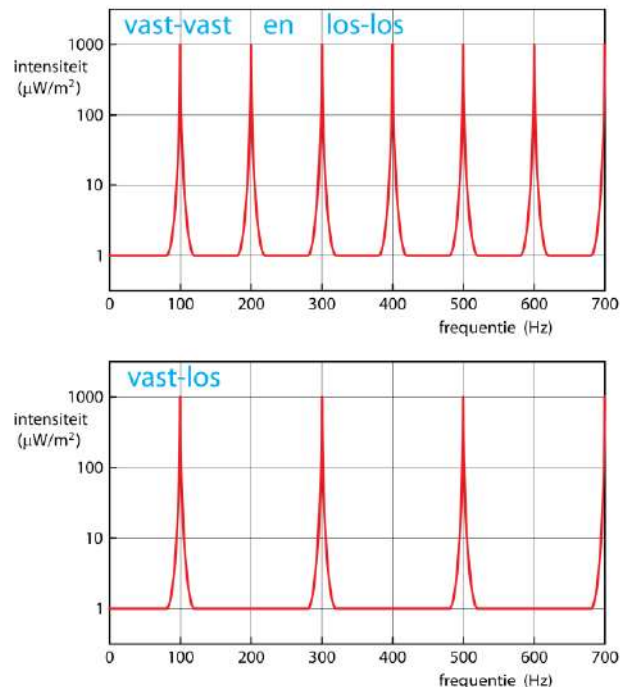
Een panfluit en een kerkorgel hebben voor iedere toon een aparte pijp. Korte pijpen geven hoge tonen en lange pijpen lage tonen. De meeste andere blaasinstrumenten hebben één buis waarvan je de effectieve lengte kan veranderen. Dit kan op verschillende manieren. In een blokfluit, dwarsfluit, saxofoon, klarinet, hobo, fagot, ... zitten gaten in de buis die je kan afsluiten of openen. Als alle gaten dicht zijn klinkt de laagste toon. Als je een gat opent kan de lucht daar ontsnappen en maak je de effectieve lengte van de buis korter. Op de plaats van het gat ontstaat een buik. Een trompet, hoorn, tuba, ... heeft ventielen waarmee je een omleiding open of dicht kan zetten. Bij een trombone verander je de lengte van de buis door twee buizen in elkaar te schuiven.

Bij een blaasinstrument ligt de plaats van de buik niet exact bij het open uiteinde. Meestal is er een paar centimeter verschil. De vorm van het instrument speelt daarbij een rol. Het

maken van een muziekinstrument is daarom niet alleen een kwestie van natuurkundige berekeningen. Het menselijk gehoor bepaalt uiteindelijk wat "mooi" is en wat niet.

Muziekinstrumenten in de praktijk

Om onderscheid te maken tussen de verschillende soorten instrumenten kan je het **frequentiespectrum** meten. Dit is een diagram met op de verticale as de geluidsintensiteit en op de horizontale as de frequentie. In figuur 54 zie je het theoretische frequentiespectrum van ideaal vast-vast, los-los en vast-los instrumenten. In alle gevallen heeft de grondtoon een frequentie van 100 Hz.



Figuur 54 Frequentiespectrum van ideale muziekinstrumenten.

In de praktijk produceren muziekinstrumenten frequenties die niet exact voldoen aan de formules voor vast-vast, los-los of vast-los. Vaak ligt de buik niet precies bij het open uiteinde maar een eindje ernaast. Ook hebben niet alle boventonen dezelfde intensiteit. Soms ontbreekt een boventoon. Muziekinstrumenten kunnen op een synthesizer worden nagebootst. Daarvoor is het frequentiespectrum van alle bekende muziekinstrumenten in het geheugen van de synthesizer opgeslagen. Toch zal een geoefende luisteraar het verschil horen tussen bijvoorbeeld een echte viool en een nagebootste viool.

De menselijke stem

Bij het zingen en praten stroomt er lucht uit je longen door de aangespannen stembanden. Ze gaan hierdoor trillen met de grondtoon en een aantal boventonen. Stembanden zijn snaren waarvan je de spankracht met spieren kan aanpassen. Hierdoor kun je de frequenties van de grondtoon en de boventonen veranderen. Zie figuur 55. Bij lage tonen is de spankracht klein en bij hoge tonen groot. Ook de lengte van de stembanden is van belang. Bij jongens worden de stembanden langer in de pubertijd, waardoor hun stem lager wordt.



Figuur 55 Strottenhoofd met stembanden (geel).

10.7 Samenvatting

Grootheden en eenheden

- T is de trillingstijd in seconde (s)
- f is de frequentie in Hertz (Hz)
- λ is de golflengte in meter (m)
- v_{golf} is de golfsnelheid in meter per seconde (m/s)
- φ is de fase (geen eenheid)
- φ_r is de gereduceerde fase (geen eenheid)
- P_{bron} is het vermogen van de geluidsbron in watt (W)
- I is de geluidsintensiteit in watt per vierkante meter (W/m^2)
- r is de afstand tot de geluidsbron in meter (m)

Weten

- Een golf is het doorgeven van een trilling aan de omgeving.
Een elastisch medium is nodig.
Het kost tijd om de trilling in een medium te verplaatsen.
- Transversale golf → de golf beweegt loodrecht op de richting van de trilling.
Longitudinale golf → de golf beweegt in dezelfde richting als de trilling.
- De golflengte λ is de afstand waarbij het golfpatroon zich herhaalt.
- De golfsnelheid is niet afhankelijk van de frequentie of de amplitude van de trillingsbron, maar is een eigenschap van het medium.
- De fase φ geeft aan hoeveel golven er zijn gemaakt vanaf $t=0$.
- De gereduceerde fase φ_r is gelijk aan de fase min het aantal volledig uitgevoerde golven.
- Interferentie → twee golven komen elkaar tegen, in het gebied waar ze overlappen versterken of verzwakken ze elkaar.
- Versterken → constructieve interferentie.
Verzwakken → destructieve interferentie.
- Constructief → als het verschil in afstand tot de twee bronnen $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ keer de golflengte is
- Destructief → als het verschil in afstand tot de twee bronnen $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \dots$ keer de golflengte is
- Buiken zijn plaatsen waar golven elkaar maximaal versterken.
Knopen zijn plaatsen waar golven elkaar uitdoven.

- De toonhoogte van muziek wordt bepaald door de frequentie.
De sterkte van het geluid wordt bepaald door de amplitude.
- Een gemakkelijk vervormbaar medium heeft een lage geluidssnelheid.
De geluidssnelheid is niet afhankelijk van de frequentie of de amplitude.
- De geluidsintensiteit neemt kwadratisch af met de afstand tot de bron.
- Een staande golf ontstaat als golven heen en weer worden gekaatsd.
Er ontstaan plaatsen met constructieve interferentie (buiken) en plaatsen met destructieve interferentie (knope).
- De afstand tussen een buik en een knoop is $\frac{1}{4}$ golflengte.
- De grondtoon is de golf met de grootst mogelijke golflengte en de laagst mogelijke frequentie.
- Behalve de grondtoon ontstaan er ook boventonen met een kleinere golflengte en een hogere frequentie.
- Bij iedere volgende boventoon komt er één knoop en één buik bij.
- Snaar strakker $\rightarrow$ frequenties van de grondtoon en de boventonen worden hoger.
Snaar dikker $\rightarrow$ frequenties van de grondtoon en de boventonen worden lager.
- De golfsnelheid in een blaasinstrument is de geluidssnelheid in lucht.
Een blaasinstrument stem je door hem langer of korter te maken.

Formules

$$f = \frac{1}{T} \quad \leftrightarrow \quad T = \frac{1}{f}$$

$$s = v_{\text{gem}} \cdot t \quad \leftrightarrow \quad \lambda = v_{\text{golf}} \cdot T \quad \leftrightarrow \quad v_{\text{golf}} = f \cdot \lambda$$

$$\varphi = \frac{x}{\lambda} \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda} \quad \text{fase en faseverschil hebben geen eenheid}$$

$$I = \frac{P_{\text{bron}}}{4\pi \cdot r^2} \quad \text{de geluidsintensiteit neemt kwadratisch af met de afstand}$$

$$B-B = \frac{1}{2}\lambda \quad K-K = \frac{1}{2}\lambda \quad B-K = \frac{1}{4}\lambda \quad \text{afstand tussen buiken en knopen}$$

$$v_{\text{golf}} = \sqrt{\frac{F_s \cdot \ell}{m}} \quad \text{spankracht en golfsnelheid in een snaar}$$

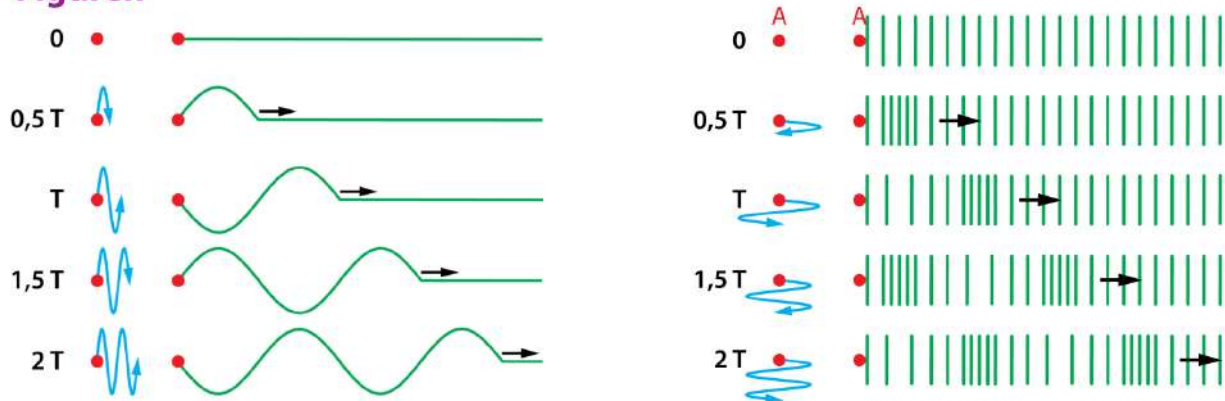
$$\ell = n \cdot \frac{1}{2} \lambda \quad \text{met } n=1, 2, 3, \dots$$

bij VAST–VAST en LOS–LOS

$$\ell = (2n-1) \cdot \frac{1}{4} \lambda \quad \text{met } n=1, 2, 3, \dots$$

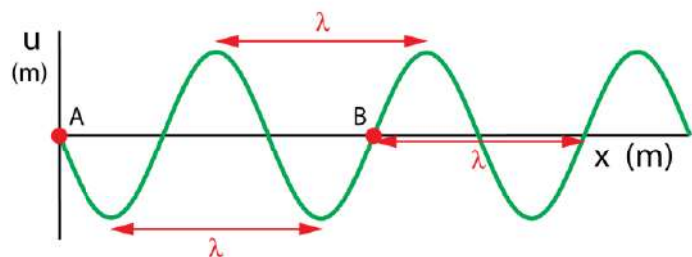
bij VAST–LOS

Figuren



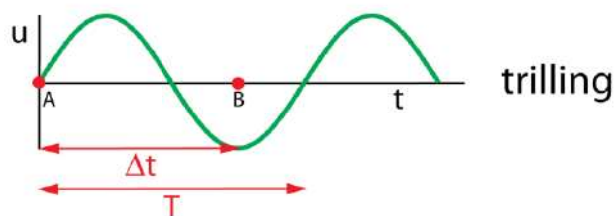
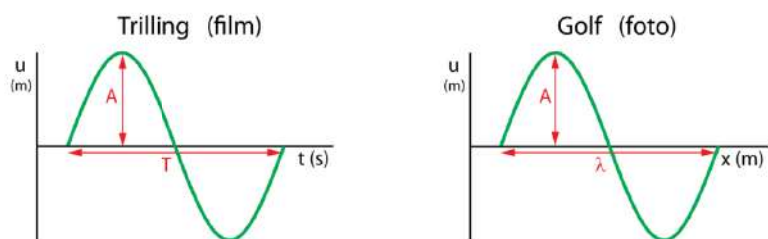
Transversale golf → de golf beweegt loodrecht op de richting van de trilling.

Longitudinale golf → de golf beweegt in dezelfde richting als de trilling.

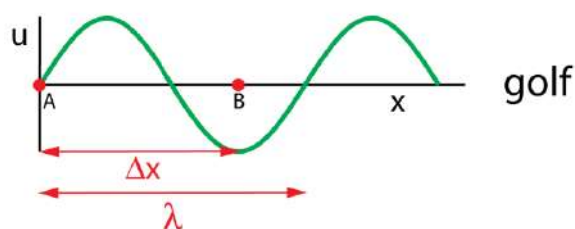


De golflengte λ is de afstand waarbij het golfpatroon zich herhaalt.

Het (u, t) -diagram van een trilling en het (u, x) -diagram van een golf.



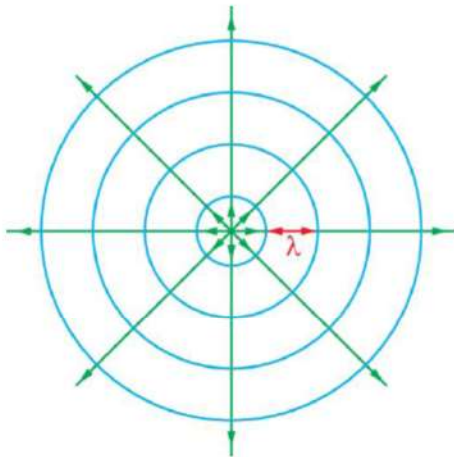
trilling



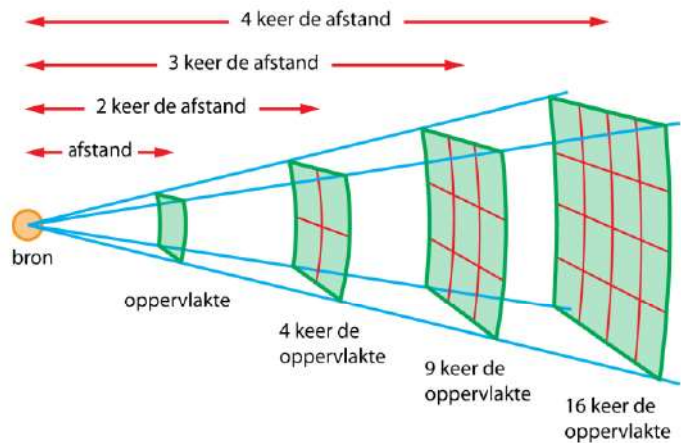
golf

Trilling: $\Delta\phi = \Delta t/T$ uit (u, t) -diagram.

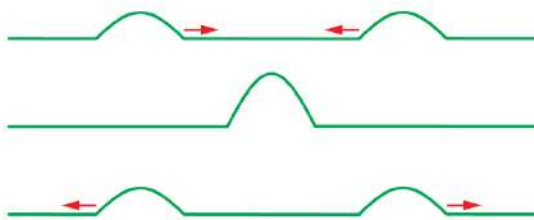
Golf: $\Delta\phi = \Delta x/\lambda$ uit (u, x) -diagram.



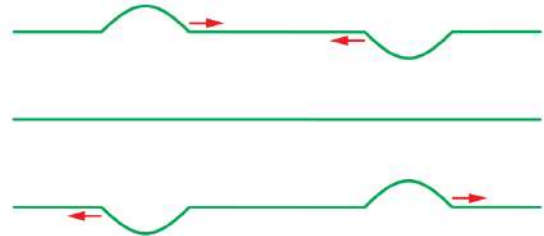
Cilindervormige golf → de intensiteit neemt af met $1/r$.



Bolvormige golf → de intensiteit neemt af met $1/r^2$ (omgekeerde kwadratenwet)

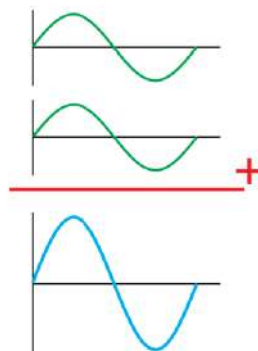


Constructieve interferentie → versterking.

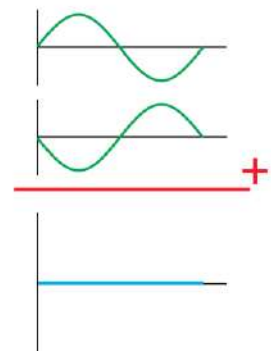


Destructieve interferentie → uitdoving.

Versterking

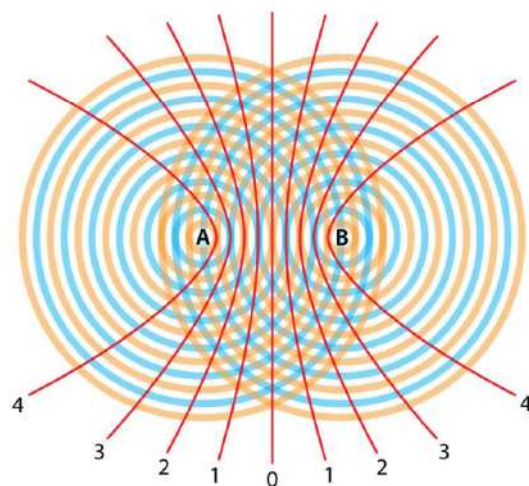


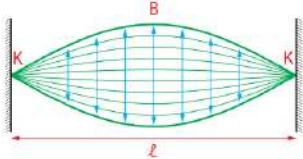
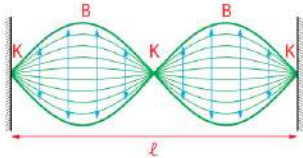
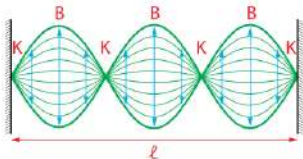
Uitdoving

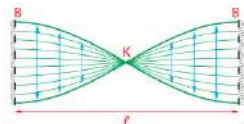
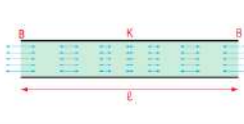
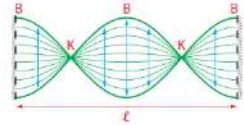
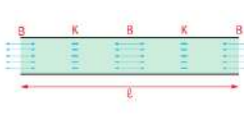
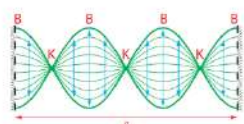
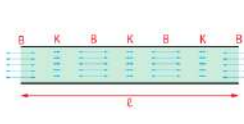


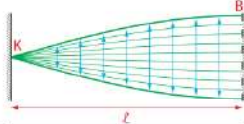
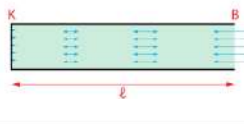
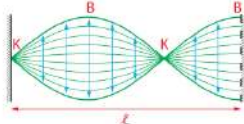
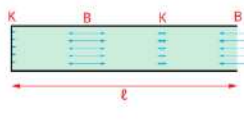
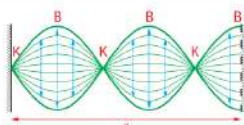
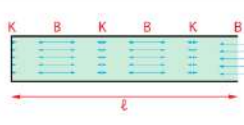
Interferentie is het optellen van twee golven.

Interfererende golven afkomstig de coherente trillingsbronnen A en B. De rode lijnen zijn de buiklijnen. Op deze lijnen liggen de buiken en is de amplitude twee keer zo groot.



staande golf vast – vast	toon	lengte van de snaar	golflente	frequentie
	grondtoon	$\ell = 1 \cdot \frac{1}{2} \lambda_0$	λ_0	f_0
	1 ^e boventoon	$\ell = 2 \cdot \frac{1}{2} \lambda_1$	$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{2}$	$f_1 = 2 \cdot f_0$
	2 ^e boventoon	$\ell = 3 \cdot \frac{1}{2} \lambda_2$	$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{3}$	$f_2 = 3 \cdot f_0$

staande golf los – los in klankstaaft	staande golf los – los in luchtkolom	toon	lengte van de snaar	golflengte	frequentie
		grondtoon	$\ell = 1 \cdot \frac{1}{2} \lambda_0$	λ_0	f_0
		1 ^e boventoon	$\ell = 2 \cdot \frac{1}{2} \lambda_1$	$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{2}$	$f_1 = 2 \cdot f_0$
		2 ^e boventoon	$\ell = 3 \cdot \frac{1}{2} \lambda_2$	$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{3}$	$f_2 = 3 \cdot f_0$

staande golf vast – los in klankstaaft	staande golf vast – los in luchtkolom	toon	lengte van de snaar	golflengte	frequentie
		grondtoon	$\ell = 1 \cdot \frac{1}{4} \lambda_0$	λ_0	f_0
		1 ^e boventoon	$\ell = 3 \cdot \frac{1}{4} \lambda_1$	$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{3}$	$f_1 = 3 \cdot f_0$
		2 ^e boventoon	$\ell = 5 \cdot \frac{1}{4} \lambda_2$	$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{5}$	$f_2 = 5 \cdot f_0$