17 Kwantummechanica vwo

17.2 Het foto-elektrisch effect

1* Maak de volgende berekeningen voor fotonen:

$5{,}00\cdot10^{-19}$ J = ………………… eV

$5{,}00\cdot10^{-19}$ J = ………………… Hz

$5{,}00\cdot10^{-19}$ J = ………………… nm

2* Maak de volgende berekeningen voor fotonen:

1,00 eV = ………………… J

1,00 eV = ………………… Hz

1,00 eV = ………………… nm

3* Maak de volgende berekeningen voor fotonen:

$5{,}00\cdot10^{14}$ Hz = ………………… J

$5{,}00\cdot10^{14}$ Hz = ………………… eV

$5{,}00\cdot10^{14}$ Hz = ………………… nm

4* Maak de volgende berekeningen voor fotonen:

500 nm = ………………… J

500 nm = ………………… eV

500 nm = ………………… Hz

5** Als de fotonenergie wordt uitgedrukt in joule geldt: $E_f(J) = \frac{h \cdot c}{\lambda}$

a Toon dit aan.

In deze formule is h de constante van Planck.

b Bepaal de eenheid van de constante van Planck.

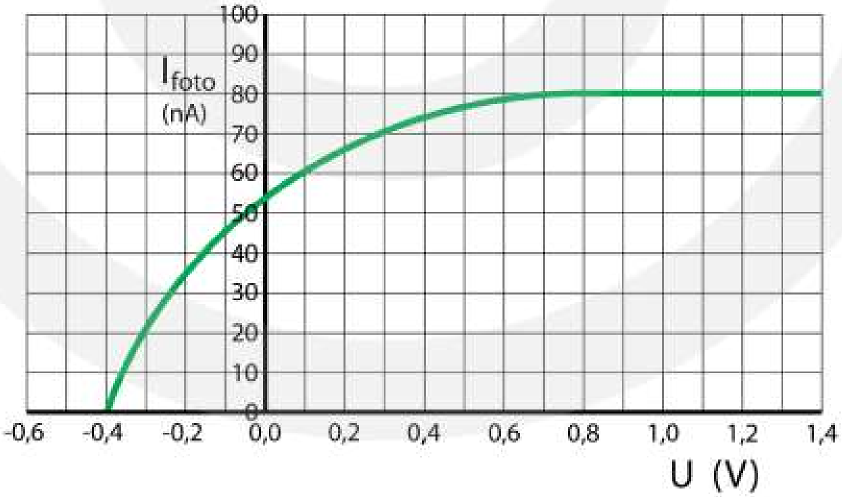
Als de fotonenergie wordt uitgedrukt in elektronvolt geldt: $E_f(eV) = \frac{h \cdot c}{e \cdot \lambda}$

c Toon dit aan.

Als de golflengte in nm wordt gegeven geldt: $E_f(eV) = \frac{1240}{\lambda(nm)}$

d Toon dit aan.

6*** Een fotocel wordt bestraald met monochromatisch licht afkomstig van een laser. Het laserlicht veroorzaakt een fotostroom die met een ampèremeter in het externe circuit kan worden gemeten. De stroom is afhankelijk van de spanning tussen de kathode en de anode. Ook als er geen spanning is aangebracht loopt er een fotostroom. De fotocel heeft een kathode van aluminium. De (I, U)-karakteristiek van de fotocel is weergegeven in figuur 1.



Figuur 1

a Leg uit waarom de stroomsterkte na een bepaalde spanning niet meer toeneemt.

b Waarom is de stroomsterkte niet gelijk aan nul bij een spanning van nul volt?

c Waarom is de stroomsterkte niet maximaal bij een spanning van nul volt?

Bij het aanleggen van een negatieve spanning neemt de stroomsterkte af.

d Leg uit waarom dit het geval is.

e Bepaal de golflengte van het licht waarmee de kathode is bestraald.

Vervolgens wordt de fotocel bestraald met ultra violet licht van 4,30 eV. Het aantal fotonen per seconde per m^2, is hetzelfde gebleven.

f Neem figuur 1 over en schets de (I, U)-karakteristiek als het wordt bestraald met ultraviolet licht van 4,30 eV

In figuur 1 zijn gemiddeld 30% van de opvallende fotonen in staat een elektron vrij te maken.

g Bereken met hoeveel fotonen per seconde de kathode wordt bestraald.

7*** Door een fotocel te bestralen met een monochromatische lichtbundel met een bekende golflengte is het mogelijk om de constante van Planck te bepalen.

a Zoek de constante van Planck op in Binas.

b Bereken de energie in joule van een foton van 4,30 eV.

c Leg uit hoe je de golflengte van een monochromatische lichtbron kunt meten.

d Leg uit hoe je met een fotocel de constante van Planck kunt bepalen.

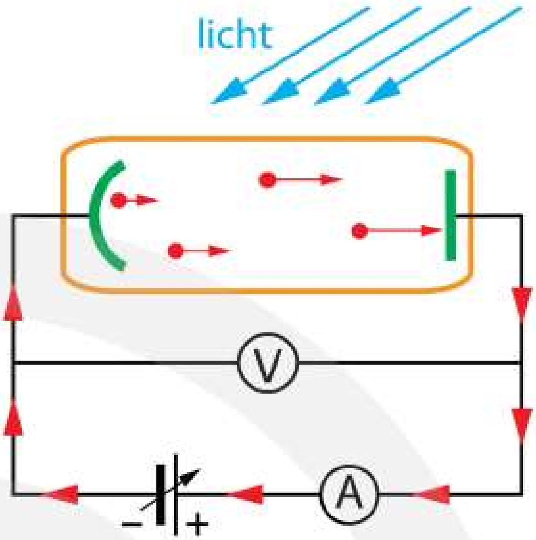
8*** Voor een fotocel geldt: $h = \frac{\lambda \cdot (E_{uit} - e \cdot U_{rem})}{c}$

- h is de constante van Planck (J s)
- λ is de golflengte van het licht (m)
- e is de elementaire lading (lading van een proton) (C)
- U_{rem} is de remspanning (V)
- c is de lichtsnelheid (m/s)

a Leid deze formule af.

b Leg uit of voor U_{rem} een positieve of negatieve waarde moet worden ingevuld.

9**** De kathode van een fotocel is gemaakt van cesium, Cs. De kathode wordt bestraald door licht met een golflengte van 532 nm. Het uitgestraalde vermogen is 1,5 mW.



a Hoeveel fotonen worden er per seconde uitgestraald?

b Hoe groot kan stroomsterkte maximaal worden?
HINT één foton levert één elektron op.

Als de aangelegde spanning groter is dan 2,0 V verandert de stroomsterkte niet meer.

c Hoeveel energie hebben de elektronen die bij de anode aankomen als U = 2,0 V uitgedrukt in eV?

d Met welke snelheid komen de elektronen aan?

Het blijkt dat de gemeten fotostroom bij U = 2,0 V veel kleiner is dan de bij vraag b berekende waarde. Dit heeft verschillende oorzaken:
- een deel van het uitgestraalde licht wordt gereflecteerd
- maar een deel van het geabsorbeerde licht wordt door elektronen geabsorbeerd
- een deel van de aangeslagen elektronen verliest te veel energie door botsingen
- een deel van de aangeslagen elektronen met voldoende energie wordt bij het oppervlak teruggekaatst

Uiteindelijk zijn er $1{,}5 \cdot 10^4$ uitgestraalde fotonen nodig om één elektron van de anode naar de kathode te laten gaan. Als we geen spanning aanleggen is de fotostroom 60% van de maximale waarde.

e Hoe groot is de stroomsterkte die bij U = 0 V wordt gemeten?

Simon denkt dat je een fotocel kunt gebruiken om elektriciteit op te wekken voor zijn mobiele telefoon.

f Denk je dat Simon gelijk heeft? Leg je antwoord uit.

17.3 Deeltjes of golven

1[*] We voeren het dubbelspleet-experiment uit en we bespreken het signaal dat door de detector wordt waargenomen. Continue signalen kunnen iedere waarden aannemen, zoals de temperatuur bij een thermometer. Binaire signalen hebben maar twee waarden: aan of uit, zoals bij een rookmelder.

We voeren het experiment uit met kogeltjes.

a Leg uit of de detector een continu signaal of een binair signaal waarneemt.

We voeren het experiment uit met geluid.

b Leg uit of de detector een continu signaal of een binair signaal waarneemt.

We voeren het experiment uit met elektronen.

c Leg uit of de detector een continu signaal of een binair signaal waarneemt.

We gaan nu kijken naar de verdeling van de signaalsterkte over het scherm. De verdeling kan wel of geen interferentiepatroon vertonen.

d Leg uit waaraan je een interferentiepatroon herkent.

We voeren het experiment uit met kogeltjes.

e Leg uit of er wel of geen interferentiepatroon ontstaat.

We voeren het experiment uit met geluid.

f Leg uit of er wel of geen interferentiepatroon ontstaat.

We voeren het experiment uit met elektronen.

g Leg uit of er wel of geen interferentiepatroon ontstaat.

2[**] We voeren het dubbelspleet-experiment uit met elektronen. In het eerste experiment gebruiken we een elektronenbundel met een intensiteit van 36.000 elektronen per seconde. We zetten de bundel één seconde aan, zodat er in totaal 36.000 elektronen bij het scherm aankomen.

a Wat zie je op het scherm? Twee vage strepen opgebouwd uit stippen, of een interferentiepatroon opgebouwd uit stippen.

We verlagen de intensiteit tot 1 elektron per seconde en zetten de bundel 10 uur aan, zodat er in totaal 36.000 elektronen bij het scherm aankomen.

b Wat zie je op het scherm? Twee vage strepen opgebouwd uit stippen, of een interferentiepatroon opgebouwd uit stippen.

3* We voeren het dubbelspleet-experiment uit met elektronen. De elektronen worden door een spanning van 10 kV versneld. Per seconde worden er 1000 elektronen afgevuurd.

a Bereken de snelheid van de elektronen nadat ze zijn versneld. Gebruik de rustmassa van het elektron.

b Bereken de afstand tussen twee vlak na elkaar afgevuurde elektronen.

c Beredeneer hoeveel elektronen tegelijkertijd in de opstelling aanwezig zijn.

4 We schijnen licht op een ruit. 10% van het licht wordt gereflecteerd en 90% van het licht gaat door de ruit heen. Tom beweert dat een foton door het glas wordt teruggekaatst als het tegen atomen botst. Hij denkt daarbij aan het terugkaatsen van een tennisbal tegen een muur.

a Leg uit of deze manier van redeneren klopt met de kwantummechanica.

b Leg uit hoe je volgens lichtreflectie volgens kwantummechanica moet beschrijven. Gebruik in je uitleg het woord superpositie.

5** We voeren het dubbelspleet experiment uit met golven. De intensiteit van een golf is het kwadraat van de amplitude h van de golf. Komen twee golven samen dan tel je de amplitude van beide golven bij elkaar op: $h_{12} = h_1 + h_2$. Daarbij moet je rekening houden met het faseverschil δ tussen de golven.

Voor het kwadraat van de amplitude geldt: $(h_1 + h_2)^2 = h_1^2 + h_2^2 + 2h_1 \cdot h_2 \cdot \cos\delta$

a Leg uit hoe het faseverschil δ interferentie veroorzaakt.

Een golf met $h_1 = 3{,}0\text{ m}$ en een golf met $h_2 = 1{,}0\text{ m}$ komen elkaar tegen waardoor interferentie ontstaat.

b Bereken de maximale en de minimale waarde van $h_{12} = h_1 + h_2$.

Het kwadraat van de amplitude van een golf is de intensiteit I.

c Hoe groot is de maximale en de minimale intensiteit van twee interfererende watergolven die dezelfde amplitude hebben?

17.4 Onbepaaldheid

1** Om het oliepeil van een auto te meten gebruik je een peilstok. Je dompelt de peilstok tot een bepaalde hoogte in het motorblok en haalt hem daarna omhoog om het oliepeil af te lezen.

a Weet je nu het oliepeil van de auto?

b Leg uit op welke manier je meetinstrument de uitkomst van de meting beïnvloedt.

c Leg uit of het meten van het oliepeil een voorbeeld is van het onbepaaldheids-principe.

2** De constante van Planck is een fundamentele natuurconstante. Als deze constante nul zou zijn geweest zouden er geen kwantumeffecten bestaan.

a Leg dit uit met behulp van de onbepaaldheidsrelatie.

Als de constante van Planck heel groot zou zijn geweest, dan zouden we op menselijke schaal kwantumeffecten ervaren. Stel dat h = 10 J s.

b Maak een schatting van je onbepaaldheid in plaats als je fietst met een onbepaaldheid in snelheid van 0,1 km/h.

3*** De constante van Planck heeft als eenheid J·s.

a Toon dit aan. Laat hierbij eerst zien dat de eenheid van energie $kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$ is.

In 2019 is de standaardeenheid voor massa gebaseerd op de lichtsnelheid, de eenheid van tijd en de constante van Planck.

b Laat zien hoe de lichtsnelheid, de eenheid van tijd en de constante van Planck een hoeveelheid massa kan aangeven. Gebruik hierbij je antwoord op vraag a.

4** Een geweer schiet een kogel af met een snelheid van 975 m/s. De kogel heeft een massa van 4,2 gram.

a Bereken de kinetische energie van de kogel.

b Bereken de impuls van de kogel.

De kogel wordt opgevangen door een vrij beweegbaar blok klei met een massa van 500 gram waarin de kogel blijft steken.

c Bereken de snelheid van het blok klei nadat hij de kogel heeft opgevangen.

d Bereken de debroglie golflengte van de kogel.

We willen dat de kogel een golflengte krijgt van 10^{-15} meter.

e Bereken met welke snelheid de kogel moet worden afgeschoten.

5** Leid de uitdrukking af voor de kinetische energie van een voorwerp uitgedrukt in de impuls en de massa van het voorwerp.

6*** Je wilt een waterstofatoom met een elektronenmicroscoop bekijken. Een waterstofatoom heeft een diameter van ongeveer 100 pm. Om het waterstofatoom te kunnen zien moeten de elektronen een golflengte hebben van 100 pm of kleiner.

a Leg uit waarom dit noodzakelijk is.

b Bereken de snelheid van een elektron met een golflengte van 100 pm. Gebruik voor de massa van het elektron de rustmassa: $m_e = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}$ kg.

c Is het toegestaan om bij de berekening van de snelheid de rustmassa van het elektron te gebruiken?

d Bereken de impuls van een elektron met een golflengte van 100 pm.

e Bereken de kinetische energie van een elektron met een golflengte van 100 pm.

Om een elektron deze hoeveelheid kinetische energie te geven wordt het versneld door een spanning aan te leggen.

f Hoeveel spanning is er nodig?

Om een waterstofatoom te ioniseren ($H \rightarrow H^+ + 1e$) is 13,6 eV energie nodig.

g Wordt een waterstofatoom geïoniseerd door een elektron met een golflengte van 100 pm als het elektron 10% van zijn energie overdraagt?

7** **a** Bereken de energie van een foton met een golflengte van 500 nm.

b Bereken de verwachtingswaarde van de kinetische energie van een elektron met een golflengte van 500 nm.

8** Een proton heeft een diameter van ongeveer 0,85 fm (femtometer = 10^{-15} meter).

a Bereken bij welke snelheid de debroglie-golflengte van het proton gelijk is aan zijn diameter.

b Leg uit of je antwoord op vraag a realistisch is.

9** Een elektron zit opgesloten in een 2,0 nm groot molecuul.

a Bereken de onbepaaldheid van de snelheid van het elektron.

10*** Voor de kinetische energie van een elektron in een elektronenmicroscoop geldt:

$$E_K = \frac{h^2}{2m \cdot \lambda^2}$$

a Leid deze uitdrukking af.

Voor de energie van een foton geldt: $E_{foton} = h \cdot f$.

Een elektron en een foton hebben dezelfde golflengte én dezelfde energie.

b Bereken de golflengte van deze deeltjes.

c Bereken de energie van deze deeltjes.

11*** Een atoom heeft een diameter van 0,20 nm. We willen de impuls van een gebonden elektron in het atoom weten. Hiertoe laten we een foton botsen met het elektron. De onbepaaldheid van de impuls van het elektron willen we zo klein mogelijk maken. Deze onbepaaldheid wordt echter beperkt door de onbepaaldheid in plaats. Want als de onbepaaldheid in plaats van het gebonden elektron groter wordt dan het atoom kan het elektron het atoom verlaten. Het atoom wordt dan geïoniseerd.

a Bereken met welke minimale onbepaaldheid je de impuls van het elektron kunt bepalen.

b Bereken met welke minimale onbepaaldheid je de snelheid van het elektron kunt bepalen.

Een gebonden elektron in het atoom heeft ongeveer 10 eV kinetische energie.

c Vergelijk de snelheid van het gebonden elektron met de onbepaaldheid in deze snelheid en bereken hoeveel procent de onbepaaldheid in snelheid is (de relatieve onbepaaldheid).

12*** Radioactieve schilderijen (vwo 2007-1 PMN)

Hieronder volgen twee fragmenten uit een artikel in de Volkskrant van 22 december 2002. Lees het eerste fragment.

Ten behoeve van kunsthistorisch onderzoek bestraalt men in de kernreactor in Petten oude schilderijen met langzame neutronen. In de verfstoffen van de schilderijen ontstaan door deze bestraling radioactieve isotopen die bij verval ioniserende straling uitzenden. Deze straling wordt opgevangen door een fotografisch gevoelige plaat. Op deze manier worden contouren van onderliggende verflagen zichtbaar en verkrijgt men informatie over de chemische samenstelling van de oorspronkelijke verfstoffen.

De langzame neutronen hebben een kinetische energie van 0,025 eV.

4p **a** Bereken de debroglie-golflengte van deze neutronen.

Nadat een langzaam neutron is geabsorbeerd door de kern van een atoom in de verf is de debroglie-golflengte van het neutron niet langer scherp bepaald.

3p **b** Leg dit uit.

13*** Wetenschapsquiz (vwo 2000-2)

In de Nationale Wetenschapsquiz van 1997 kwam de volgende vraag voor over de snelheid van de geleidingselektronen in een koperdraad:

Een lamp is met twee koperdraden van 1,0 meter lengte en een diameter van 2,0 mm verbonden aan een accu. Er loopt een stroom van 1,0 ampère door de draden.

Hoe lang doet een elektron er over om van de stroombron naar de lamp te komen?

a) Ongeveer 3 miljardste van een seconde.
b) Ongeveer een halve dag.
c) Niet te zeggen, want het hangt af van de spanning.

4p **a** Bereken de spanning over één stuk koperdraad tussen de accu en de lamp in de beschreven situatie.

Het juiste antwoord op de vraag van de wetenschapsquiz is b: "Ongeveer een halve dag". De geleidingselektronen in de koperdraad vormen samen een zogenoemd "elektronengas". Als er een gelijkspanning over de draad staat, verplaatst dit elektronengas zich met een kleine snelheid door de draad. In de schakeling die de quiz beschrijft, is deze snelheid 0,02 mm s^{-1}. Deze snelheid kan met behulp van de formule I = Q / t worden berekend. Hierin is I de stroomsterkte en Q de hoeveelheid elektrische lading die in een periode t een dwarsdoorsnede van de draad passeert. Per mm^3 koper zijn hiervoor $1 \cdot 10^{20}$ geleidingselektronen beschikbaar.

5p **b** Controleer de opgegeven snelheid van het elektronengas met behulp van de formule I = Q / t .

2p **c** Controleer dat de elektronen ongeveer een halve dag nodig hebben om van de accu naar de lamp te bewegen.

De organisatoren van de quiz maakten bij de uitleg van het juiste antwoord gebruik van een model. Een geleidingselektron wordt in dat model voorgesteld als een bolletje dat eenparig in de lengterichting van de draad beweegt.

Uitgaande van dit model beweert Arie dat je met een experiment kunt controleren of afzonderlijke geleidingselektronen inderdaad een snelheid hebben van 0,02 mm s^{-1}. Volgens hem is het mogelijk om van één elektron voldoende nauwkeurig de plaats in de draad als functie van de tijd te bepalen.

Berrie spreekt dat tegen. Hij denkt namelijk dat je niet tegelijkertijd kunt weten dat een elektron in de draad aanwezig is én dat het zo langzaam beweegt. Hij beroept zich daarbij op de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

Neem aan dat de onbepaaldheid in de plaats van een elektron in de koperdraad dezelfde orde van grootte heeft als de diameter van de draad.

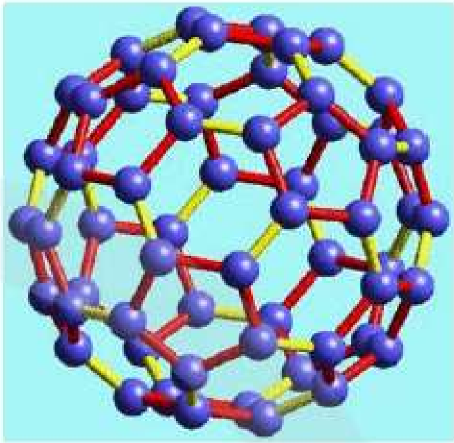
4p **d** Leg met behulp van een berekening met de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg uit of Berrie gelijk heeft.

De snelheid van de elektronen waarover het in de quizvraag gaat, heet de "driftsnelheid". Dit is de snelheid waarmee de geleidingselektronen bij een elektrische spanning over de draad afdrijven in de richting van de hoogste potentiaal.

2p **e** Leg uit dat bij het gebruik van wisselspanning de driftsnelheid nul is.

14*** Interferentie met buckyballen (PMN SE 2001)

Naast diamant en grafiet als zuivere vorm van koolstof is er in 1985 een derde vorm ontdekt: het koolstofmolecuul C60, waarvan een model is te zien in figuur 1. Dit molecuul heeft dankzij zijn aparte vorm al snel de naam voetbalmolecuul gekregen, zie figuur 1. De officiële naam is buckminsterfullereen, maar vrijwel iedereen spreekt over de buckybal. Sindsdien wordt er door wetenschappers allerlei onderzoek gedaan naar de eigenschappen van dit bijzondere molecuul. Zo is ondermeer bepaald dat de diameter van een buckybal $7{,}0 \cdot 10^{-10}$ m is.

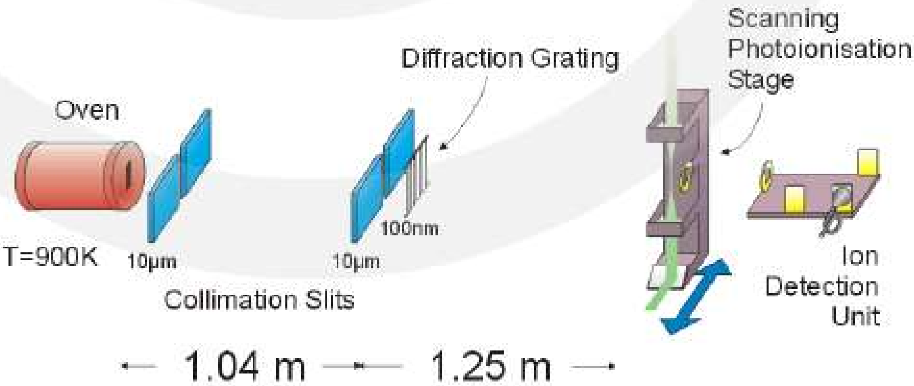


Figuur 1

3p **a** Toon met behulp van een berekening aan dat de massa van een buckybal $1{,}20 \cdot 10^{-24}$ kg bedraagt.

Een experiment waarover in oktober 1999 in een tijdschrift voor natuurwetenschappen Nature wordt gerapporteerd, is een interferentieproef met de buckyballen. Dit molecuul was tot dat moment het meest massieve en complexe materiële object waarvan het golfkarakter is waargenomen.

De opstelling waarmee de proef werd uitgevoerd is in figuur 2 getekend. De bundel moleculen komt uit een oven en gaat achtereenvolgens door twee enkele spleten om de bundel goed te richten. Hierachter is een tralie opgesteld met een tralieconstante van 100 nm. De spleetbreedte van het tralie bedraagt 50 nm. De afstand tussen tralie en detector bedraagt 1,25 m. De meest voorkomende snelheid waarmee de moleculen bewegen is 220 m/s.



Figuur 2

Pressure ~5 10^{-7} mbar

Een bundel moleculen die op het tralie valt is enigszins te vergelijken met het schieten op het doel met een voetbal. Volgens de regels van de wereldvoetbalbond behoort een standaard voetbal een diameter van 22 cm te hebben en het doel een breedte van 732 cm. De verhouding van deze afmetingen blijkt in orde van grootte goed overeen te komen met de verhouding van de relevante afmetingen uit het natuurkunde experiment.

3p **b** Licht zonder berekening toe waarom er tijdens het scoren geen rekening gehouden hoeft te worden met het golfkarakter van de voetbal.

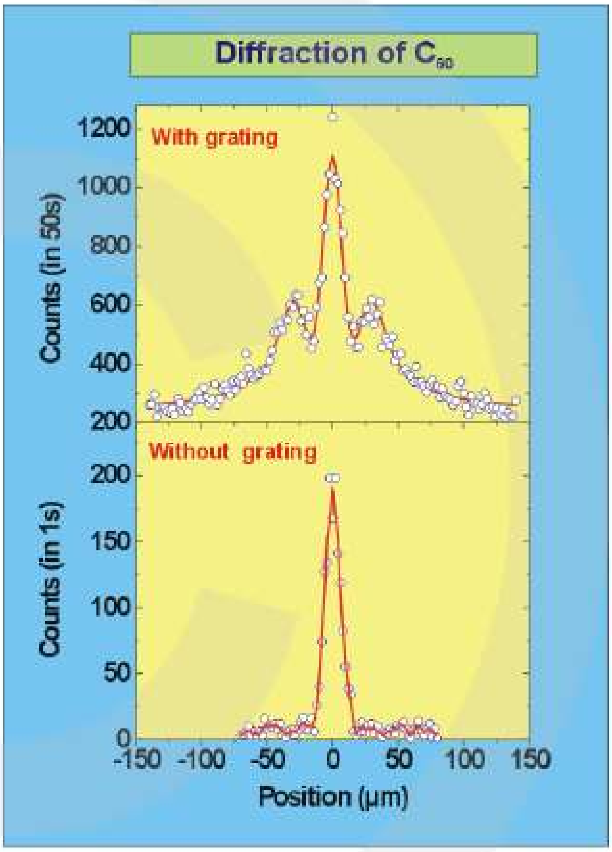
3p **c** Bereken de debroglie golflengte van de buckyballen.

Het interferentiepatroon dat ontstaat is afgebeeld in figuur 3. De bovenste figuur is het resultaat als er een tralie (Engels: "grating") wordt gebruikt. De onderste figuur is zonder grating.

2p **d** Leg uit waarom in figuur 3 de resultaten met en zonder tralie worden getoond.

In de bovenste figuur zijn het 0e orde maximum en beide 1e orde maxima duidelijk waarneembaar.

5p **e** Bepaal de debroglie golflengte van de buckyballen nogmaals, maar nu met behulp van deze resultaten



Figuur 3

15*** Elektronendiffractie

In diamant liggen de atomen in vlakken. De afstand tussen deze vlakken heet de roosterafstand en is voor diamant 0,15445 nm. Om de roosterafstand te bepalen wordt diamant bestraald met een bundel elektronen.

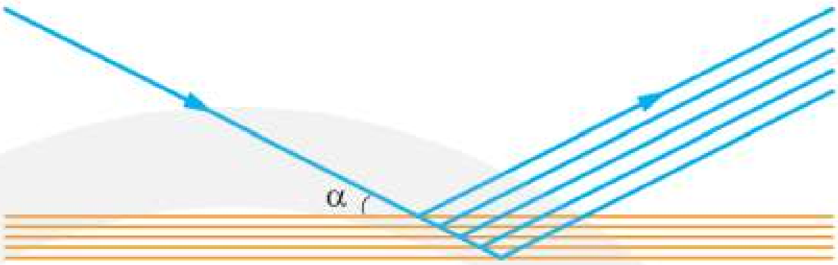
Als elektronen uit stilstand worden versneld door spanning U geldt: $v = \sqrt{\dfrac{2e \cdot U}{m}}$

a Toon dit aan.

b Bij welke snelheid is de debroglie-golflengte van de elektronen gelijk aan de roosterafstand?

c Welke spanning is er nodig om elektronen deze snelheid te geven?

Een bundel elektronen wordt onder hoek α op het diamant geschoten. De elektronen kaatsen terug onder dezelfde hoek α. Sommige elektronen kaatsen terug op de eerste atoomlaag, anderen op de tweede- weer andere op dieper gelegen atoomlagen. Zie figuur 1. De teruggekaatste elektronen wordt gedetecteerd.



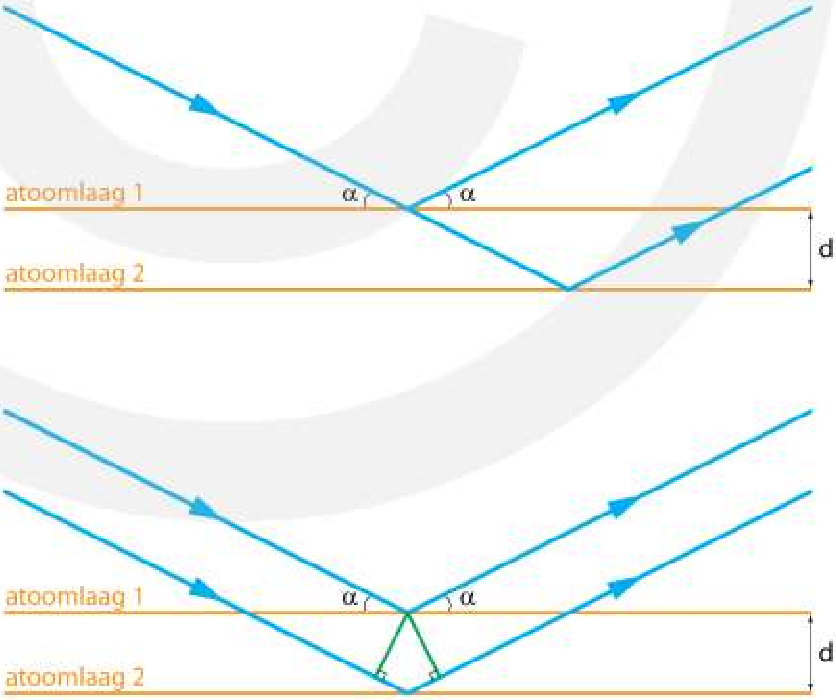
Figuur 1

Bij bepaalde hoeken α is het faseverschil tussen de elektronen die terugkaatsen op de 1^e atoomlaag en de elektronen die terugkaatsen op de 2^e atoomlaag gelijk aan 1. In dat geval is er constructieve interferentie, zodat er een sterk signaal wordt waargenomen.

Het faseverschil is 1 als het verschil in weglengte gelijk is aan de golflengte.

d Leg dit uit.

Om een formule te vinden waarmee hoek α kan worden berekend waarbij het faseverschil een heel aantal keer de golflengte is, beschouwen we elektronen die bij atoomlaag 1 en elektronen die bij atoomlaag 2 terugkaatsen. Zie figuur 2.

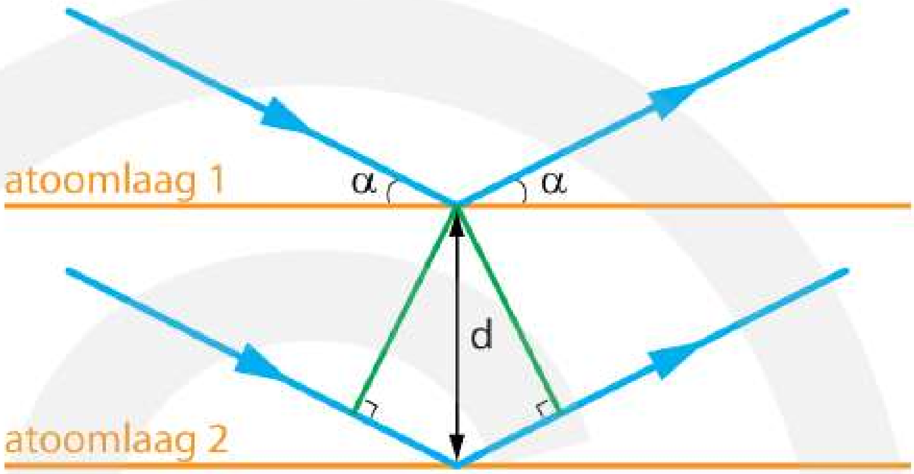


Figuur 2

e Geef in figuur 2 in de onderste tekening het verschil in weglengte aan tussen de elektronen die bij atoomlaag 1 en elektronen die bij atoomlaag 2 terugkaatsen.

In figuur 3 is een vergroting van de onderste tekening van figuur 2. Met behulp van figuur 3 kun je de volgende formule afleiden:

$$n \cdot \lambda = 2d \cdot \sin \alpha \quad \text{met} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$



Figuur 3

f Leid deze formule af.

Deze formule is gelijk aan de formule door vader en zoon Bragg in 1913 is afgeleid voor röntgenstraling. De techniek om met röntgenstraling atoomafstanden te meten heet Braggreflectie.

g Bereken onder bij welke hoek α elektronen met een golflengte gelijk aan de roosterafstand worden teruggekaatst bij n = 1.

17.5 De schrödingervergelijking

GEEN OPGAVEN

17.6 Kwantumdeeltje in een energieput

1** Een kwantumdeeltje in een energieput kan niet stilstaan.

a Leg uit waarom dit het geval is.

2*** Voor de energie van een kwantumdeeltje in een oneindig diepe energieput geldt:

$$E = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2} \quad \text{met} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

We plaatsen een elektron in een energieput met lengte L = 1,0 nm.

a Bereken hoeveel energie het kost om het elektron vanuit de grondtoestand in de eerste aangeslagen toestand te brengen uitgedrukt in elektronvolt.

Om het elektron vervolgens vanuit de eerste aangeslagen toestand naar de tweede aangeslagen toestand te brengen kost 5/3 keer zoveel energie.

b Toon dit aan.

3*** Voor de energie van een kwantumdeeltje in een oneindig diepe energieput geldt:

$$E = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2} \quad \text{met} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Voor de energie die nodig is om een kwantumdeeltje in een oneindig diepe energieput vanuit toestand n naar toestand n+1 te brengen geldt:

$$\Delta E_{n \to n+1} = (2n+1)\frac{h^2}{8mL^2}$$

a Toon dit aan.

4*** Voor de golflengte van een kwantumdeeltje in een oneindig diepe energieput geldt:

$$\lambda = \frac{2 \cdot L}{n} \quad \text{met} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

a Leg dit uit.

Hieruit volgt voor ieder kwantumgetal n: $E = \frac{h^2}{2m \cdot \lambda^2}$

b Toon dit aan.

5**** Voor de toestandsfunctie van een kwantumdeeltje in een oneindig diepe put geldt

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad \text{met} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

De golflengte die hieruit volgt gelijk is aan $\lambda = \dfrac{2 \cdot L}{n}$ met $n = 1, 2, 3, \cdots$

a Toon dit aan.

6*** Een kwantumdeeltje bevindt zich in een oneindig diepe put in de eerste aangeslagen toestand.
Bewering 1: de kans om het deeltje in het midden van de put aan te treffen is nul.
Bewering 2: de kans om het deeltje bij de randen van de put aan te treffen is nul.

a Leg uit of de beweringen voor het kwantumdeeltje waar zijn:
- Bewering 1 is *waar / niet waar* omdat ....
- Bewering 2 is *waar / niet waar* omdat ....

We plaatsen nu een steentje in de energieput.

b Leg uit of de beweringen voor het steentje waar zijn:
- Bewering 1 is *waar / niet waar* omdat ....
- Bewering 2 is *waar / niet waar* omdat ....

7** Een kwantumdeeltje in een oneindig diepe put bevindt zich in een aangeslagen toestand. Op sommige plaatsen in de put heeft de golffunctie de waarde nul.

a Leg uit of je het kwantumdeeltje op deze plaatsen kunt aantreffen.

b Leg uit of het kwantumdeeltje zo'n plaats in de put kan passeren.

c Is er een tegenspraak tussen je antwoorden op de vragen a en b?

8*** Een elektron is opgesloten in een oneindig diepe put met L = 0,10 nm. Dit is ongeveer de grootte van en waterstofatoom.

a Bereken de energie in eV van de laagste drie toestanden: n = 1, n = 2 en n = 3.

b Bereken de golflengte van het foton dat wordt uitgezonden als het elektron in deze put terugvalt van de toestand met n = 2 naar de toestand met n = 1.

c Bereken de golflengte van het foton dat wordt uitgezonden als het elektron terugvalt van de toestand met n = 3 naar de toestand met n = 1.

d Bereken de golflengte van het foton dat wordt uitgezonden als het elektron terugvalt van de toestand met n = 3 naar de toestand met n = 2.

Bij waterstof hoort de overgang van n = 3 naar n = 2 tot de Balmer reeks.

e Vergelijk je antwoord op vraag d met de waarde voor waterstof die je in Binas vindt en geef een verklaring voor het verschil.

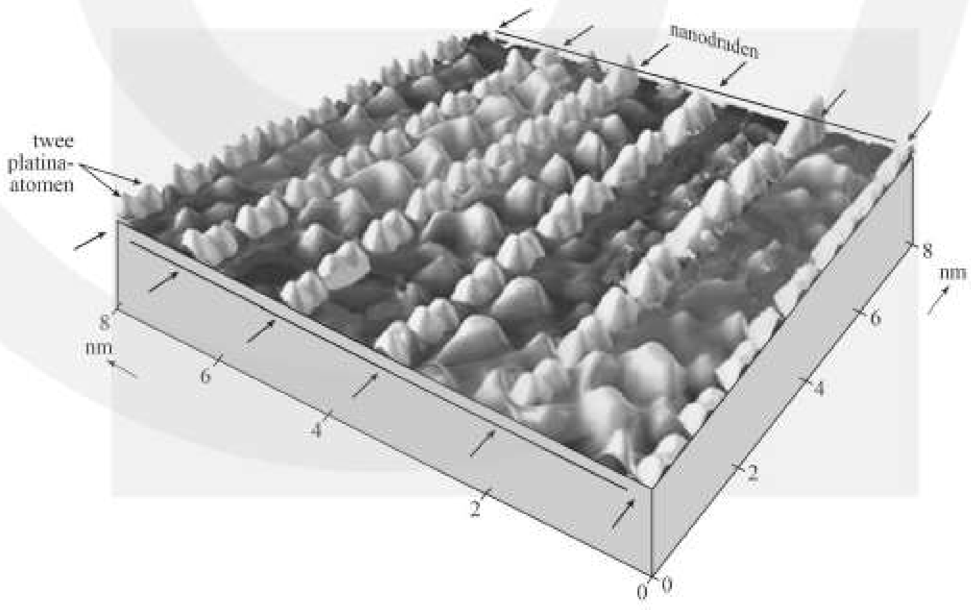
9** Een neutron is opgesloten in een oneindig diepe put met $L = 1{,}0 \cdot 10^{-15}$ m. Dit is ongeveer de grootte van een atoomkern.

a Bereken de kinetische energie van het neutron in de grondtoestand uitgedrukt in elektronvolt.

b Bereken de snelheid van het neutron in de grondtoestand.

10**** **Elektronen tussen nanodraden (vwo 2008-1 PMN, aangepast)**

In 2005 zijn onderzoekers van de Universiteit Twente erin geslaagd nanodraden van platina te laten groeien op een oppervlak van germanium. In figuur 1 is een beeld van het resultaat te zien. Dit beeld is met behulp van een zogenaamde scanning tunneling microscoop (STM) gemaakt.



Figuur 1

In figuur 1 is te zien dat de nanodraden slechts één atoom dik zijn. Een nanodraad bestaat uit een rij Pt-atomen die paarsgewijs achter elkaar zijn gerangschikt. Tussen sommige nanodraden zijn hobbels te zien. Deze hobbels geven de plaatsen met hoge elektronendichtheid aan. Dit zijn elektronen op het germaniumoppervlak die zich tussen de Pt-nanodraden bevinden. Het germanium-oppervlak van figuur 1 bevat gemiddeld 0,75 vrije elektronen per nm². Neem aan dat deze allemaal afkomstig zijn van de platina-atomen.

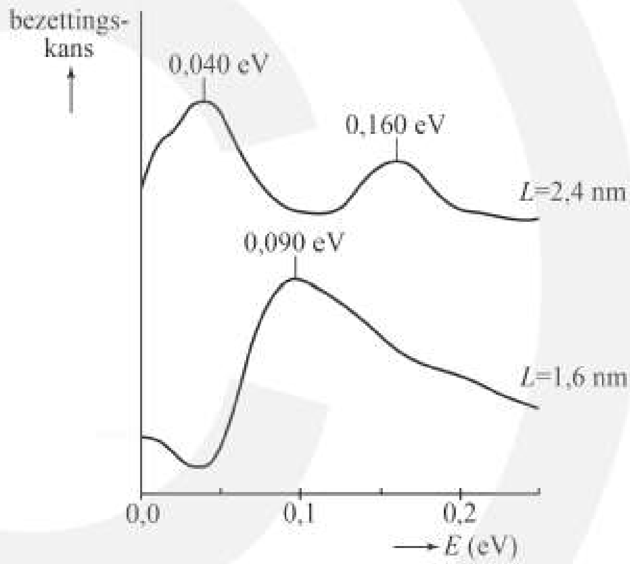
3p **a** Bepaal met behulp van figuur 1 hoeveel vrije elektronen elk platina-atoom gemiddeld aan het germaniumoppervlak levert.

De onderzoekers hebben bij zeer lage temperatuur het energiespectrum van de elektronen op het germaniumoppervlak gemeten. Zie figuur 2. De metingen zijn gedaan bij twee waarden van de afstand L tussen de nanodraden. Horizontaal is de energie uitgezet en verticaal de kans dat een bepaald energieniveau door een elektron is bezet.

Bij L = 2,4 nm kan een elektron door absorptie van een foton de overstap maken van de 0,040 eV-piek naar de 0,160 eV-piek.

3p **b** Bereken de golflengte die dit foton daartoe moet hebben.

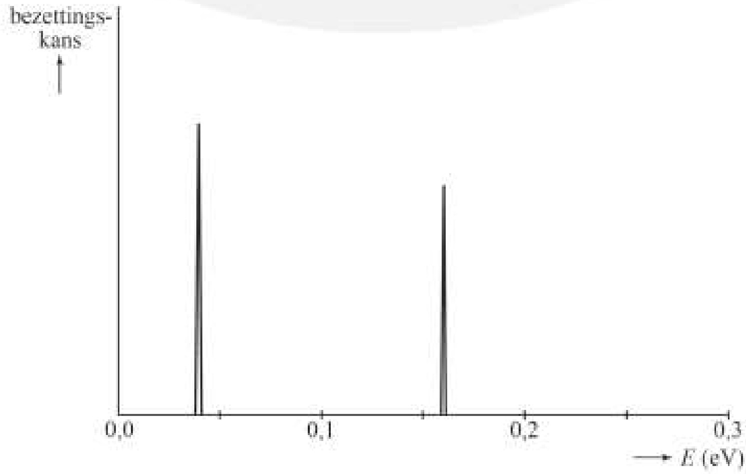
In figuur 2 is bij drie pieken de waarde van de energie aangegeven. De onderzoekers schrijven de drie pieken toe aan opsluiting van de elektronen tussen de nanodraden. Ze verwachten dat de beweging van de elektronen loodrecht op de draden goed wordt beschreven door het ééndimensionale doosjesmodel.



Figuur 2

4p **c** Laat zien dat de onderlinge verhoudingen van de energieën van de drie pieken inderdaad kloppen met wat het ééndimensionale doosjesmodel voorspelt.

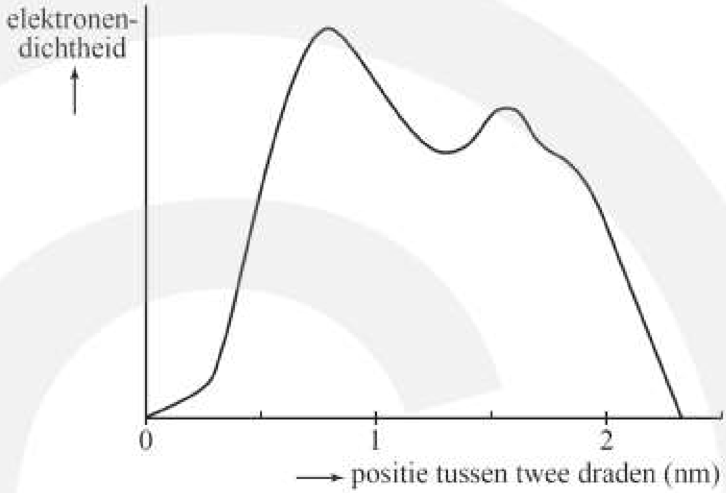
Als het ééndimensionale doosjesmodel een perfecte beschrijving van de elektronen tussen de nanodraden zou geven, dan zou de bezettingskans als functie van de energie er voor L = 2,4 nm uitzien als in figuur 3.



Figuur 3

3p **d** Verklaar met het ééndimensionale doosjesmodel:
1 Waarom binnen het energiebereik in figuur 3 slechts twee pieken passen.
2 Waarom voor alle overige energieën in figuur 3 de bezettingskans nul is.

De onderzoekers hebben ook de elektronendichtheid tussen twee nanodraden in de richting loodrecht op de draden gemeten. Voor L = 2,4 nm zijn de resultaten gegeven in figuur 4.



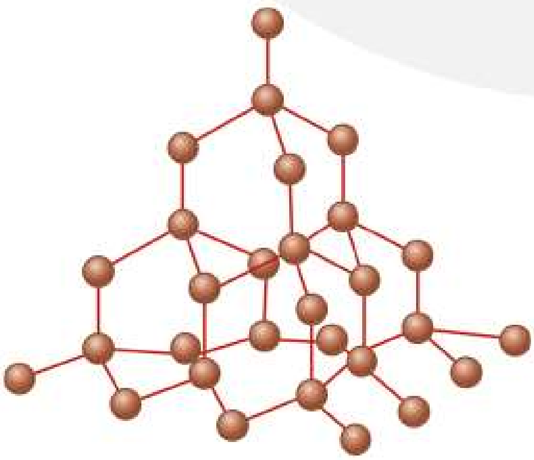
Figuur 4

Met behulp van het ééndimensionale doosjesmodel voor de beweging loodrecht op de draden, zou men twee conclusies kunnen trekken:
1 Alle elektronen zitten in het laagste energieniveau van het doosje (n = 1).
2 Alle elektronen zitten in het op één na laagste energieniveau (n = 2).

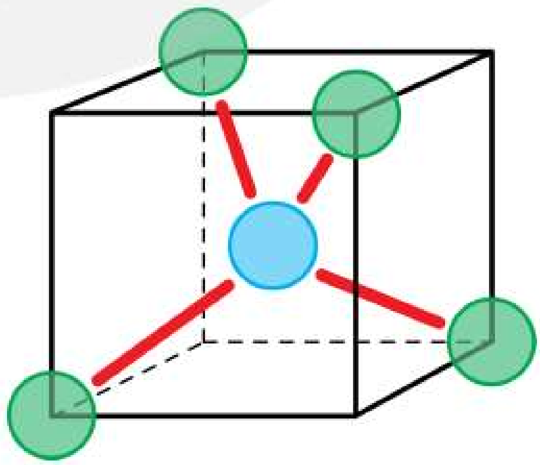
3p **e** Leg met behulp van figuur 4 uit dat beide conclusies (1 en 2) niet juist zijn.

11**** Diamant (vwo 2004 PMN SE)

Diamant is een koolstofkristal, evenals grafiet. Dankzij de manier waarop de atomen zijn gestapeld en de sterkte van de bindingen tussen naburige atomen is diamant echter veel harder.



Figuur 1a



Figuur 1b

Figuur 1a geeft een beeld van de kristalstructuur. Hierin is te zien dat ieder koolstofatoom is verbonden met zijn vier naaste buren. In figuur 1b is te zien dat die naaste buren op de hoekpunten van een kubus zitten. Het koolstofatoom binnen de kubus bevindt zich op het snijpunt van de lichaamsdiagonalen.

Als er géén druk wordt uitgeoefend op het kristal nemen de bindingen een evenwichtslengte aan van $L_0 = 0{,}154$ nm.

2p **a** Laat door een berekening zien dat de ribbe van de kubus in figuur 1b gelijk is aan 0,178 nm.

De kubussen uit figuur 1b vullen niet de gehele ruimte van het kristal op. Wel kan worden afgeleid dat, gemiddeld over het hele kristal genomen, het volume per koolstofatoom gelijk is aan het volume van de getekende kubus.

3p **b** Bereken met behulp van de gegeven ribbe de dichtheid van diamant.

In een model van het diamantkristal worden de bindingen tussen de atomen voorgesteld door ééndimensionale doosjes. Ieder doosje bevat twee bindingselektronen in de grondtoestand. De lengte L van de bindingen verandert als er druk wordt uitgeoefend op het kristal.

Voor de kinetische energie van een elektron in de grondtoestand van een ééndimensionaal doosje geldt de vergelijking:

$$E_K = \frac{a}{L^2} \quad \text{met} \quad a = \frac{h^2}{8m_e} = 6{,}02 \cdot 10^{-38}\ \mathrm{J \cdot m^2}$$

Als het kristal wordt ingedrukt, wordt de bindingslengte L kleiner en neemt de kinetische energie van de bindingselektronen dus toe. Dit zorgt ervoor dat het kristal moeilijk in te drukken is.

Ook als de bindingslengte groter wordt dan de evenwichtslengte neemt de energie toe. We nemen aan dat er ook een potentiële energie E_p is, die toeneemt naarmate het doosje langer wordt. We nemen aan dat deze potentiële energie omgekeerd evenredig is met de lengte van het doosje. De totale energie E_d van de twee elektronen in het doosje wordt dan:

$$E_d = \frac{2a}{L^2} + \frac{b}{L}$$

Deze energie is minimaal bij $L = L_0$

3p **c** Toon aan dat b gegeven wordt door $b = -\frac{4a}{L_0}$

Met gebruik van dit resultaat kan E_d geschreven worden als

$$E_d = \frac{2a}{L^2} - \frac{4a}{L \cdot L_0}$$

Een diamant van 1,0 cm^3 bevat $3{,}5 \cdot 10^{23}$ bindingen. Door gelijkmatig druk uit te oefenen op alle kanten van het kristal wordt bereikt dat al deze bindingen 1,0 % korter worden. Het volume van het kristal wordt dan 3,0 % kleiner.

5p **d** Laat door een berekening zien dat de totale toename van de energie van alle bindingen in de diamant gelijk is aan $1{,}8 \cdot 10^2$ J.

Uit de energietoename van het totale kristal kan de druk die voor het samenpersen ervan nodig is, berekend worden met de formule

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} p \cdot \Delta V$$

- ΔE is de totale energietoename van alle bindingen in het kristal
- p is de benodigde druk
- ΔV is de volumeafname van het kristal

Voor de genoemde volumeverandering van diamant blijkt in de praktijk een druk nodig te zijn van $1{,}3 \cdot 10^{10}$ Pa.

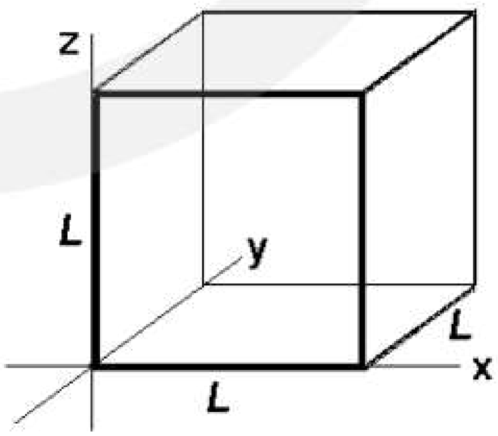
3p **e** Toon met behulp van een berekening aan dat de druk volgens het gebruikte model niet meer dan 10% afwijkt van de gemeten waarde.

12**** Het spectrum van langgerekte moleculen (vwo 2001 PMN SE)

In bepaalde typen organische kleurstoffen kunnen sommige elektronen over een groot deel van de lengte van het molecuul vrij bewegen. De energieniveaus van dergelijke stoffen kunnen met enig succes voorspeld worden met behulp van het model van een kwantumdeeltje in een ééndimensionale doos. Dit lijkt misschien eigenaardig, omdat de beweging van de elektronen in feite natuurlijk is beperkt tot een weliswaar langgerekte, maar toch zeker driedimensionale ruimte. Daarom onderzoeken we waarom het eendimensionale model toch goed voldoet.

We starten met een kwantumdeeltje dat wordt opgesloten in een driedimensionale kubus met ribben L, zie figuur 1. Rekening houdend met drie dimensies kan de kinetische energie van een deeltje geschreven worden als:

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$



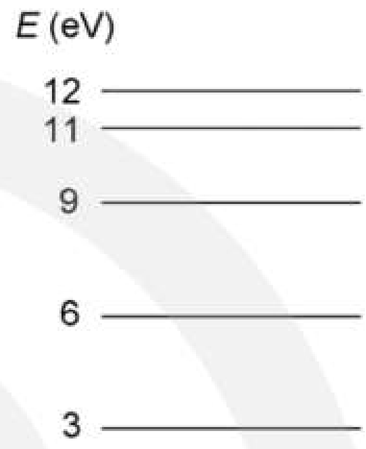
Figuur 1

Voor het gemak nemen we aan dat de factor $\frac{h^2}{8mL^2}$ een waarde heeft van 1,00 eV.

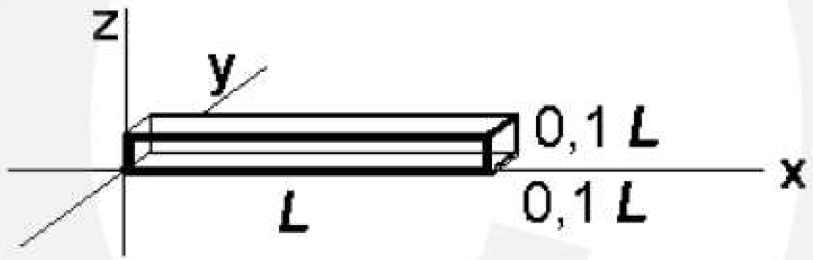
De energieniveaus kunnen nu gevonden worden door verschillende waarden voor n_x, n_y en n_z in te vullen. In figuur 2 zijn de vijf laagste (verschillende) energieniveaus voor dit systeem getekend.

3p **a** Laat zien met welke waarden van n_x, n_y en n_z de getekende energieën overeenkomen.

3p **b** Leg uit dat het spectrum dat hoort bij deze energieniveaus verschilt van het spectrum van een deeltje in een ééndimensionale doos.



Figuur 2



Figuur 3

Een langgerekte doos heeft energieniveaus die duidelijk verschillen van die van een kubus. De doos die nu beschouwd wordt heeft in de x-richting nog steeds dezelfde lengte L, maar in de y- en de z-richting een lengte van 0,100 L, zie figuur 3. De energie van een deeltje in deze doos wordt nu gegeven door:

$$E = (n_x^2 + 100 \cdot n_y^2 + 100 \cdot n_z^2) \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$

3p **c** Leid deze formule af.

3p **d** Bereken voor dit systeem de energieën van de vijf laagste (verschillende) energieniveaus uitgedrukt in elektronvolt.

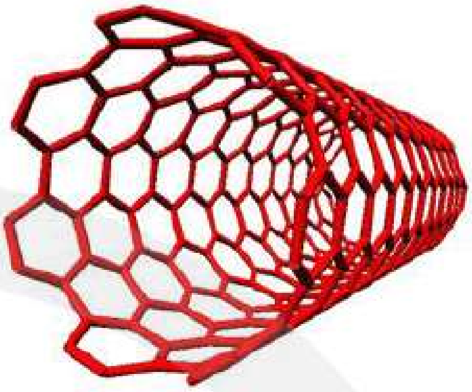
Het model van een kwantumdeeltje in een ééndimensionale doos geeft goede voorspellingen voor het berekenen van een deel van het spectrum van sommige langgerekte moleculen.

Moeilijke vraag: alleen voor de liefhebber.

4p **e** Bereken bij welke minimale frequentie er voor het eerst verschillen optreden.

13*** Koolstof nanobuisje (PMN SE 2002)

Een koolstof nanobuisje is een cilindertje met een diameter van 1 nanometer en een veel grotere lengte. Het is voor te stellen als een rond gevouwen vel grafiet. Het laagje grafiet bestaat uit koolstof-atomen die gerangschikt zijn in een zeshoekige structuur, zie figuur 1. De koolstofringen liggen zo naast elkaar dat het buisje een geleider is.



Figuur 1

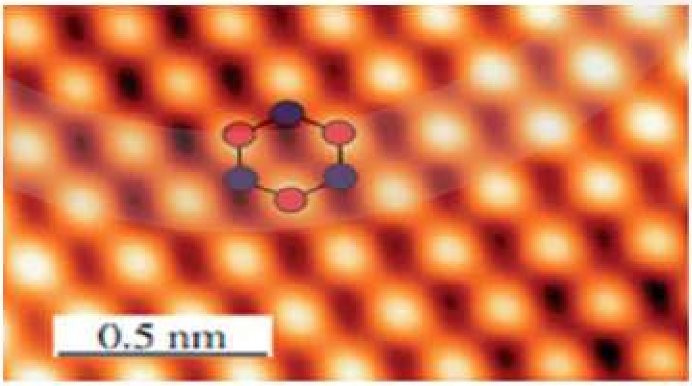
In korte nanobuisjes is het golfkarakter van de elektronen waarneembaar. De elektronen vormen dan staande golven in het nanobuisje. Onderzoekers van de Technische Universiteit Delft hebben aangetoond dat dit systeem in eerste benadering goed te beschrijven is met het eendimensionale deeltje-in-een-doos model.

In een lang nanobuisje liggen de energieniveaus van de verschillende toestanden dicht bij elkaar. Dit maakt het experimenteel gezien lastig om één toestand te bestuderen.

2p **a** Leg uit waardoor de energieniveaus bij een kort nanobuisje verder uit elkaar liggen dan bij een lang buisje.

Met behulp van een Scanning Tunneling Microscoop (STM) is het mogelijk inzicht te verkrijgen in de elektrontoestand bij een bepaald energieniveau. De STM meet indirect hoe groot de kans is om een elektron op een bepaalde plaats aan te treffen, zie figuur 2. Een hoge intensiteit betekent dat de kans groot is om het elektron op deze plaats in het buisje waar te nemen. In de figuur is tevens een koolstofring afgebeeld.

Figuur 2



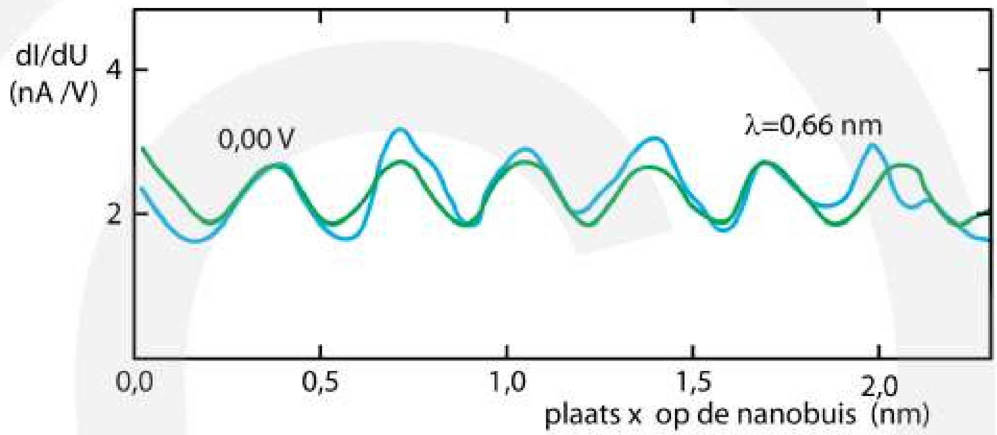
In figuur 2 zie je dat de koolstofatomen rijen vormen, gerangschikt langs diagonalen. Vanwege deze rangschikking is het ééndimensionale deeltje-in-een-doos model een goede benadering is van de elektronen in een nanobuisje.

2p **b** Leg dit uit.

We nemen een nanobuisje met een lengte van 30 nm.

4p **c** Toon met behulp van een berekening aan dat de energie die hoort bij de grondtoestand van dit nanobuisje gelijk is aan 0,4 meV.

In figuur 3 is een grafiek te zien die een maat is voor de waarschijnlijkheidsverdeling die hoort bij een bepaalde elektrontoestand. Het betreft een nanobuisje van 30 nm. Een deel van het patroon in de lengterichting is uitgezet in die figuur. De blauwe grafiek is de gemeten waarde, de groene grafiek is de theoretische waarde. Hieruit volgt ook de bijbehorende debroglie golflengte van de elektronen. Voor deze toestand bedraagt die 0,66 nm.



Figuur 3

3p **d** Leg uit dat het in figuur 3 o m een hogere aangeslagen toestand gaat.

2p **e** Bereken om welke aangeslagen toestand het gaat.

2p **f** Bereken de bijbehorende waarde van de kinetische energie van het elektron uitgedrukt in elektronvolt.

17.7 Harmonische oscillator

GEEN OPGAVEN

17.8 Het waterstofatoom

1[**] In de figuur zie je vijf energieniveaus van een atoom.

a Hoeveel verschillende energiesprongen kunnen er worden gemaakt?

b Hoeveel lijnen heeft het emissiespectrum van dit atoom?

c Leg uit bij welke overgang de uitgezonden straling de grootste golflengte heeft.

d Bereken de grootst mogelijke golflengte.

e Leg uit bij welke overgang de uitgezonden straling de kleinste golflengte heeft.

f Bereken de kleinst mogelijke golflengte.

2[**] Natrium en magnesium staan naast elkaar in het periodiek systeem. De ionisatie-energie van Na is 5,14 eV en die van Mg is 7,65 eV.

a Bereken de energie in joule die nodig om een elektron uit de buitenste schil van Na en van Mg te verwijderen.

b Breken de golflengte van het licht dat nodig is om een Na atoom te ioniseren.

c Breken de golflengte van het licht dat nodig is om een Mg atoom te ioniseren.

Nadat je het eerste elektron hebt verwijderd kun je ook een tweede elektron verwijderen. Voor natrium kost dit 47,29 eV en voor magnesium 15,04 eV.

d Bereken de golflengte van het licht dat nodig is om van een Na^{+} ion een elektron te verwijderen zodat een Na^{2+} ion ontstaat.

e Bereken de frequentie van het licht dat nodig is om van een Mg^+ ion een elektron te verwijderen zodat een Mg^{2+} ion ontstaat.

Als natrium met zuurstof reageert ontstaat er Na_2O en als je magnesium met zuurstof reageert ontstaat er MgO. Het ioniseren van Na en Mg atomen kost energie. Stel dat de vorming van een O^{2-} ion en het aangaan van een chemische binding een vaste hoeveelheid energie oplevert.

f Beredeneer bij welke chemische reactie in dat geval de meeste energie vrijkomt.

3** In een kleurloze gasvlam van een bunsenbrander strooi je een beetje strontium-sulfaat ($SrSO_4$). Door de hoge temperatuur van de vlam ontleedt het $SrSO_4$ en ontstaat er licht met een golflengte van 668 nm.

a Leg uit welke kleur dit licht heeft.

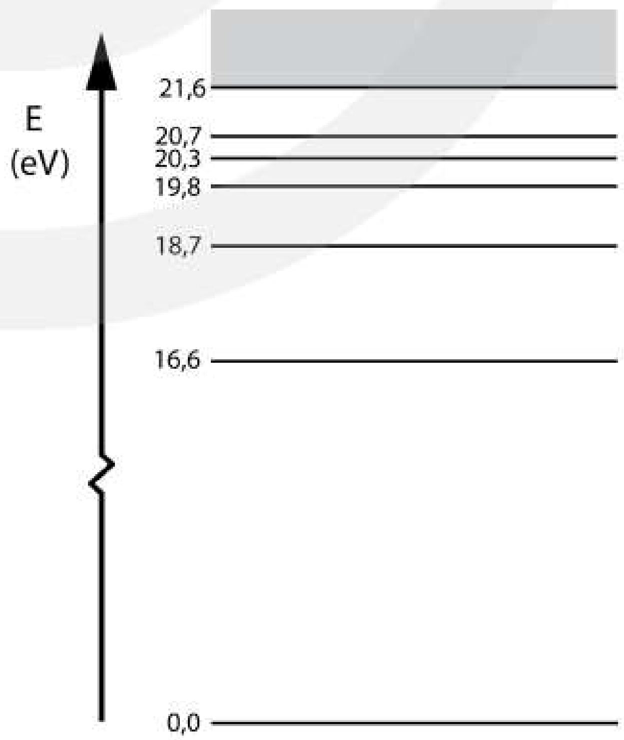
b Bereken de energie van de uitgezonden fotonen uitgedrukt in joule.

c Bereken de energie van de uitgezonden fotonen uitgedrukt in elektronvolt.

Om licht waar te nemen heeft het netvlies tenminste $1{,}7 \cdot 10^{-18}$ W nodig.

d Bereken hoeveel fotonen met λ = 668 nm er per seconde op het netvlies moeten vallen om het licht te kunnen zien.

4*** Een helium-neonlaser (HeNe laser) bevat uit een buis gevuld met een mengsel van helium- en neon gas in een verhouding 10 : 1 met een lage druk. In een HeNe laser wordt een heliumatoom door elektrische ontlading in een aangeslagen toestand gebracht. Door te botsen met een neonatoom draagt het heliumatoom zijn energie over aan een neonatoom die hierdoor in een aangeslagen toestand komt. Uit een HeNe laser komt een smalle lichtbundel met een golflengte van $6{,}32816 \cdot 10^{-7}$ m. Het energieniveau-schema van een neonatoom is in onderstaande figuur vereenvoudigd weergegeven.



a Bepaal de kleur van het licht dat een neonlaser uitzendt.

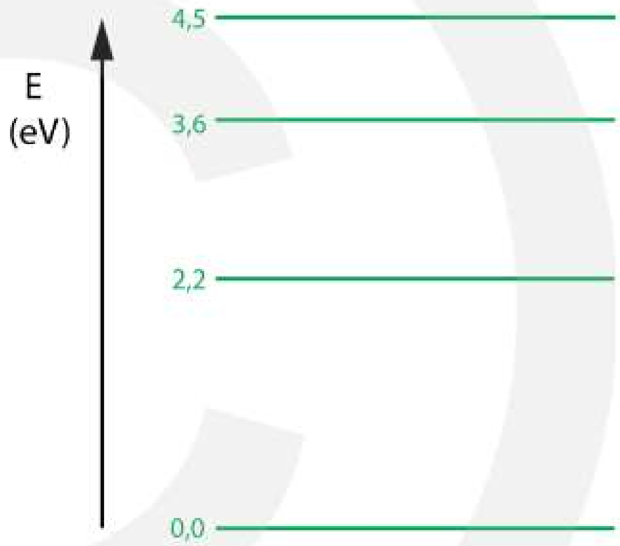
b Bepaal met welke overgang het uitgezonden licht correspondeert.

Het licht uit een HeNe laser bestaat uit een smalle band aan frequenties en is daarom vrijwel monochromatisch. De bandbreedte van de frequenties is 1,5 GHz.

c Bereken de minimale en de maximale golflengte van het licht dat door een HeNe laser wordt uitgezonden. Let op: gebruik minimaal 8 significante cijfers!

d Bereken hoeveel procent de frequentiespreiding is. (Δf / f uitgedrukt in procenten)

5*** Een ruimte is gevuld met gas. De figuur toont het energieniveauschema van de atomen waaruit het gas bestaat. Door het gas wordt een lichtbundel gestuurd. De lichtbundel bevat uitsluitend fotonen met een golflengte tussen 500 en 600 nm.



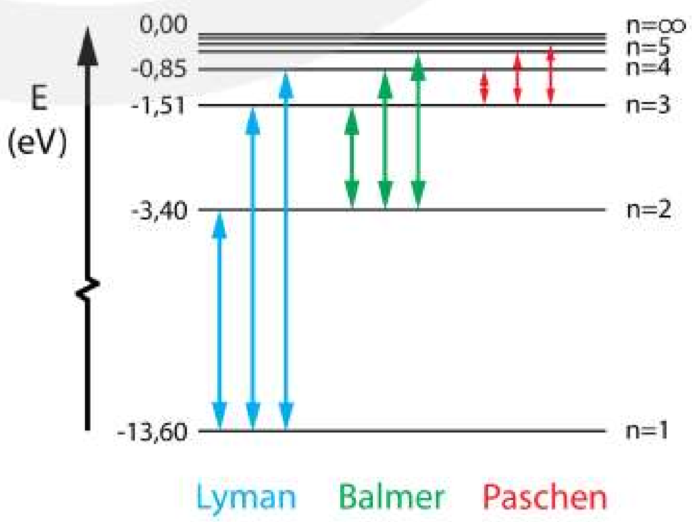
a Wat kun je zeggen over de kleur van de lichtbundel?

b Bepaal hoeveel lijnen er in het absorptiespectrum te zien zijn.

De lijnen in het absorptiespectrum zijn niet allemaal even sterk.

c Leg uit waarom dit het geval is.

6*** Figuur 1 is het vereenvoudigde energieniveauschema van waterstof.



Het getal n met n = 1, 2, 3, . . . is het hoofdkwantumgetal. Het energieverschil tussen een overgang van n = p naar n = q met q > p kan worden berekend met de volgende formule:

$\Delta E = C \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right)$ C is een constante die voor iedere overgang hetzelfde is.

a Bereken C voor de overgang van n = 1 naar n = 2

b Bereken C voor de overgang van n = 2 naar n = 3

c Bereken C voor de overgang van n = 1 naar n = 3

d Leg met behulp van de formule uit dat de waarde van C overeenkomt met de ionisatie-energie.

e Controleer dat C overeenkomt met = 13,60 eV

De spectraallijnen die horen bij de Balmerreeks liggen in het zichtbare gebied.

f Bereken de golflengten en frequenties van deze spectraallijnen in drie significante cijfers. Zoek de energie op in Binas tabel 21A.

Een waterstofatoom wordt geïoniseerd als er voldoende energie wordt toegevoegd. Dit kan ook kinetische energie zijn. Twee waterstofatomen botsen met even grote snelheid op elkaar waardoor ze beide worden geïoniseerd.

g Bereken hoe groot hun snelheid hiervoor minstens moet zijn.

Bij een temperatuur van T kelvin heeft een waterstofatoom heeft een gemiddelde kinetische energie van $E_K = (3/2)\ k_B \cdot T$, waarbij k_B de constante van Boltzmann is.

h Bereken bij welke temperatuur waterstofgas wordt geïoniseerd.

7***

Een CO_2 laser wordt gebruikt om metaal te snijden en te lassen. Een CO_2 laserbundel heeft genoeg vermogen om ijzer binnen enkele seconden te smelten. Een CO_2 laser zendt straling uit met een golflengte van 10,6 μm.

Een industriële CO_2 laser heeft een vermogen van 150 W.

a Bereken hoeveel fotonen de laser per seconde uitzendt.

De laser werkt op 380 V en heeft een stroomsterkte van 18 A.

b Bereken het rendement van de CO_2 laser.

De cirkelvormige laserbundel heeft een diameter van 5,0 mm. Om één kilogram ijzer één graad in temperatuur te laten stijgen is 460 J nodig. Om één kilogram ijzer te smelten kost 276 kJ. IJzer smelt bij 1811 K.

De CO_2 laserbundel wordt gericht op een ijzeren plaat met dikte van 1,0 mm. De begintemperatuur is 293 K. Ga ervan uit dat er geen warmte weglekt naar de omgeving.

+ c Bereken de tijd die nodig is om het ijzer onder de laserspot te laten smelten.

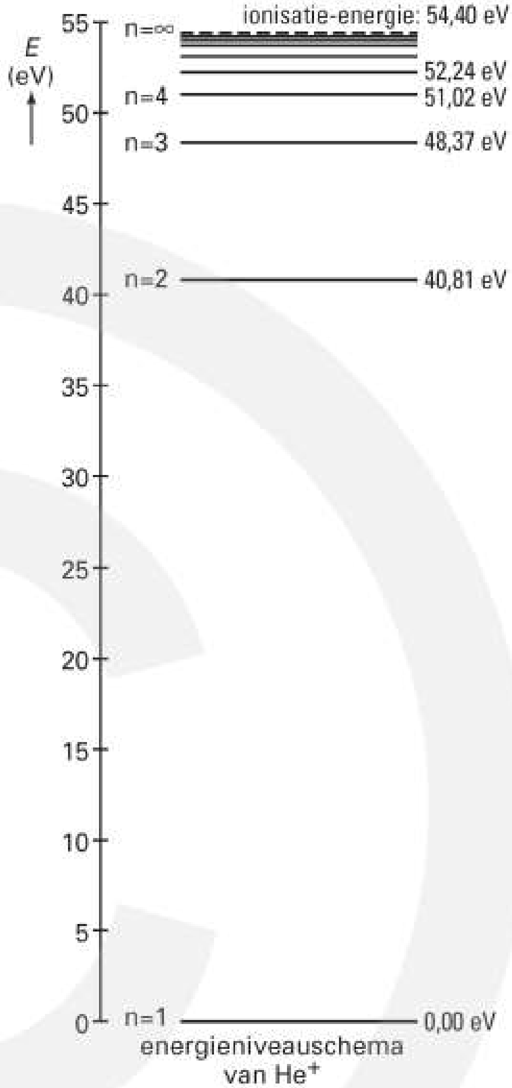
8*** Geïoniseerd helium (2003-1 Na12, PMN)

Het spectrum van éénmaal geïoniseerd helium (He^+) heeft een sterke overeenkomst met dat van neutraal waterstof (H). In figuur 1 is een energieniveauschema van dit helium getekend. Dit energieniveauschema is goed vergelijkbaar met dat van waterstof, zie het informatieboek Binas. Er bestaat een eenvoudige relatie tussen de energiewaarden van H en He^+.

2p **a** Welke relatie is dit? Geef de getalwaarde in deze relatie in drie significante cijfers.

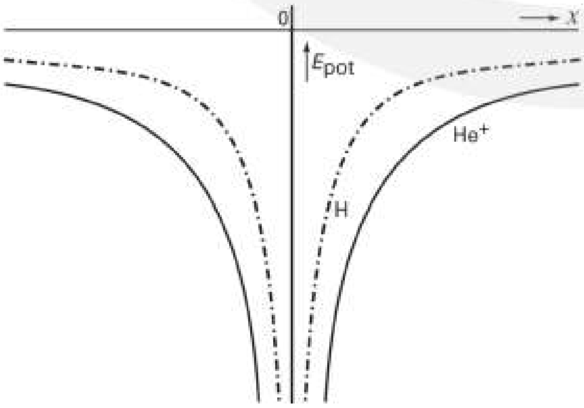
Een relatief sterke lijn in het emissiespectrum van He^+ ligt in het UV-gebied, en heeft een golflengte van 164,0 nm.

4p **b** Bepaal aan de hand van een berekening bij welke energieovergang uit figuur 1 deze lijn hoort en geef deze overgang met een pijl aan in de figuur.

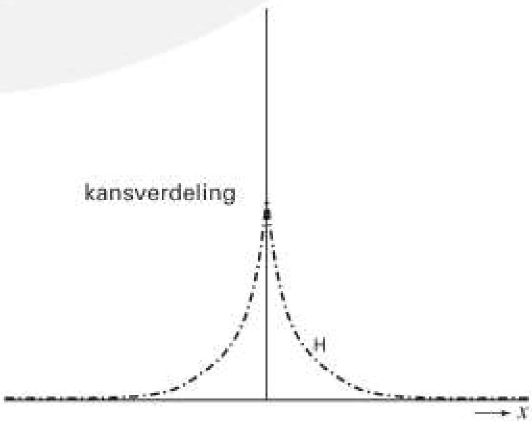


Figuur 1

In figuur 2a staat de potentiële energie van het elektron in het waterstofatoom en die in het heliumion als functie van de afstand x tot de kern.



Figuur 2a

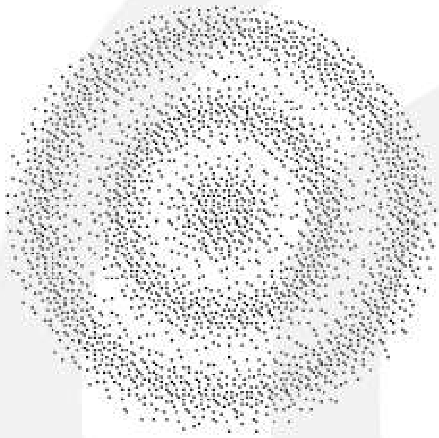


Figuur 2b

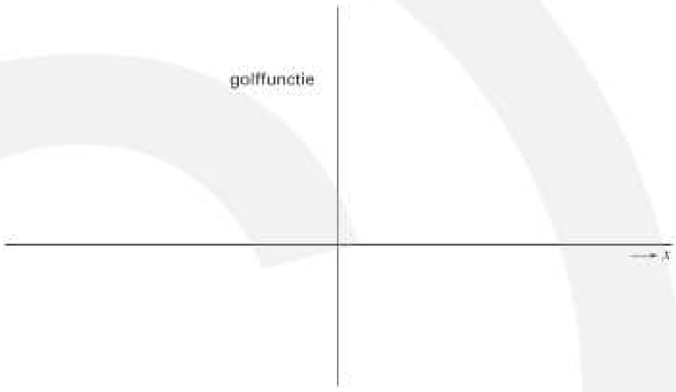
In figuur 2b is voor de grondtoestand van het waterstofatoom een grafiek getekend. Deze grafiek geeft de kans om het elektron in een bepaald (zeer klein) volumegebiedje aan te treffen als functie van x.

4p **c** Schets in figuur 2b een dergelijke grafiek voor de grondtoestand van het heliumion en leg uit waarin de kansverdelingen voor H en He^+ verschillen.

Figuur 3 stelt een bolsymmetrische kansverdeling voor van een aangeslagen toestand van het heliumion. De stippendichtheid op een plaats is een maat voor de kans om een elektron op die plaats aan te treffen.



Figuur 3a

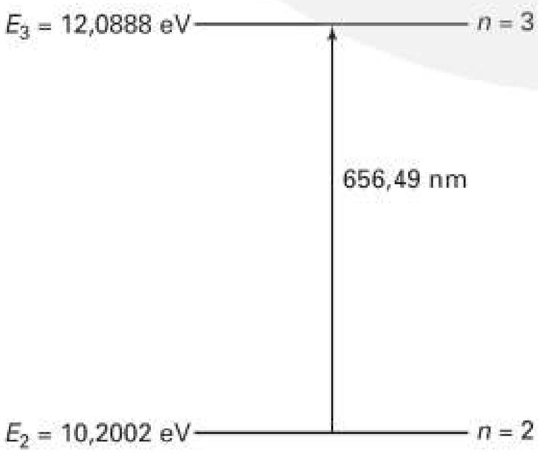


Figuur 3b

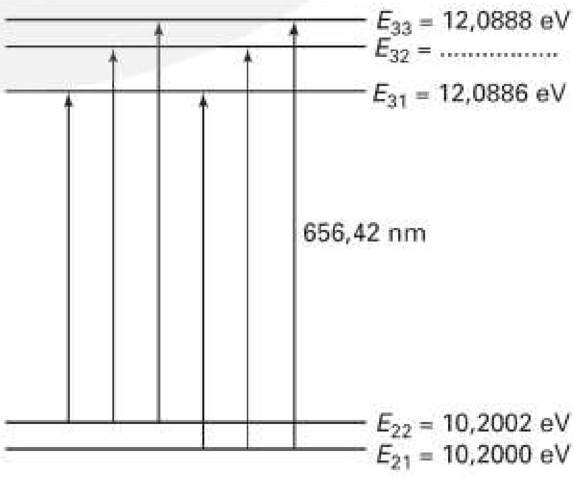
3p **d** Leg uit bij welk energieniveau deze kansverdeling hoort en schets in figuur 3b de bijbehorende golffunctie.

9*** Natuurconstanten (vwo 2004-2 Na12 PMN)

In het informatieboek Binas staat het energieniveauschema van het waterstofatoom volgens het atoommodel van Bohr. In figuur 1 is de situatie voor de energieniveaus voor de hoofdkwantumgetallen n = 2 en n = 3 weergegeven.



Figuur 1



Figuur 2

Volgens het model van Bohr zou de geabsorbeerde golflengte tussen deze niveaus 656,49 nm bedragen. In werkelijkheid zijn de twee getoonde niveaus opgesplitst in een aantal subniveaus. Men spreekt van de 'fijnstructuur'. Zie figuur 2. Deze figuur is niet op schaal. Hierbij speelt de zogeheten fijnstructuurconstante α een rol.

Voor α geldt:

$$\alpha = \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{hc} = 0{,}00729735$$

Hierin is:
- ε_0 is de diëlektrische constante: $\varepsilon_0 = 8{,}85419 \cdot 10^{-12}$ C V^{-1} m^{-1}
- e is het elementair ladingskwantum
- h is de constante van Planck
- c is de lichtsnelheid

3p **a** Laat met een berekening zien dat de gegeven waarde van α zowel wat betreft getalwaarde als wat betreft significantie in overeenstemming is met de benodigde gegevens van het informatieboek Binas.

3p **b** Ga met een eenhedenbeschouwing na of α een eenheid heeft.

In onderstaande tabel is aangegeven hoe de energiewaarden die bij de subniveaus van figuur 2 horen, afhangen van de fijnstructuurconstante α.

$E_{21} = E_2 \cdot \left(1 - \frac{5\alpha^2}{16}\right)$	$E_{31} = E_3 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right)$
$E_{22} = E_2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{16}\right)$	$E_{32} = E_3 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$
	$E_{33} = E_3 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right)$

2p **c** Bereken de waarde van E_{32}.

De absorptielijn van 656,49 nm uit figuur 1 heeft een zekere lijnbreedte $\Delta\lambda$. Dit komt omdat de lijn feitelijk bestaat uit de 6 absorptielijnen die uit de energieniveaus van figuur 2 volgen. De lijnbreedte $\Delta\lambda$ is het verschil tussen de grootste golflengte en de kleinste golflengte van deze absorptielijnen. De golflengte die hoort bij de absorptielijn van de grootste energie-overgang is 656,42 nm.

4p **d** Bereken de lijnbreedte $\Delta\lambda$.

10**** Atomen en fotonen (VWO 1992-1)

Wanneer een foton met een golflengte van 589,6 nm op een stilstaand natriumatoom in de grondtoestand valt, wordt dit foton geabsorbeerd. Het natrium-atoom komt hierdoor in de eerste aangeslagen toestand.

3p **a** Bereken de energie van dit foton.

Doordat het Na-atoom ($^{23}_{11}Na$) de impuls van het foton overneemt, krijgt het een snelheid van 0,0294 m/s.

4p **b** Bereken de impuls van een foton van licht met een golflengte van 589,6 nm.

Een klein deel van de energie van het foton is dus nodig om het atoom kinetische energie te geven. Dit betekent dat het energieverschil $E_{1\to2}$ tussen de eerste aangeslagen toestand en de grondtoestand van het Na-atoom niet precies gelijk is aan de energie van het geabsorbeerde foton U_f.

3p **c** Bereken $E_{foton} - E_{1\to2}$.

Als een Na-atoom tegen een lichtbundel in beweegt, kan het door het absorberen van fotonen worden afgeremd. Door het dopplereffect is de frequentie van het licht in de bundel voor bewegende atomen anders dan voor stilstaande atomen. Door een golflengte te gebruiken die iets afwijkt van 589,6 nm, zorgt men ervoor dat alleen de atomen die tegen de bundel in bewegen, fotonen absorberen. Atomen die met de bundel meebewegen, absorberen deze fotonen niet.

3p **d** Leg uit of men de golflengte van de lichtbundel die gebruikt wordt voor het afremmen van de atomen moet instellen op iets meer dan wel op iets minder dan 589,6 nm.

17.9 Spin

GEEN OPGAVEN

17.10 Moleculen en vaste stoffen

GEEN OPGAVEN

17.11 Tunnelen

1**** Een kwantumdeeltje kan uit een energieput ontsnappen, ook als zijn energie kleiner is dan de hoogte van de barrière. Dit wordt tunnelen genoemd. De oorzaak hiervan is dat de toestandsfunctie bij de wand niet abrupt naar nul gaat maar over een korte afstand in de wand doordringt. De golffunctie krijgt een exponentiële demping.

$$\Psi = \Psi_0 \cdot e^{-x/d_e} \quad \text{met} \quad d_e = \frac{h}{2\pi \cdot \sqrt{2m \cdot (V - E)}}$$

- Ψ is de golffunctie in de energiebarrière
- x is de afstand buiten de put gemeten tot aan de rand in meter (m)
- d_e is de afstand waarin de golffunctie met 1/e is afgenomen in meter (m)
- m is de massa van het deeltje in kilogram (kg)
- h is de constante van Planck: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s
- E is de energie van het deeltje
- V is de potentiële energie van de barrière

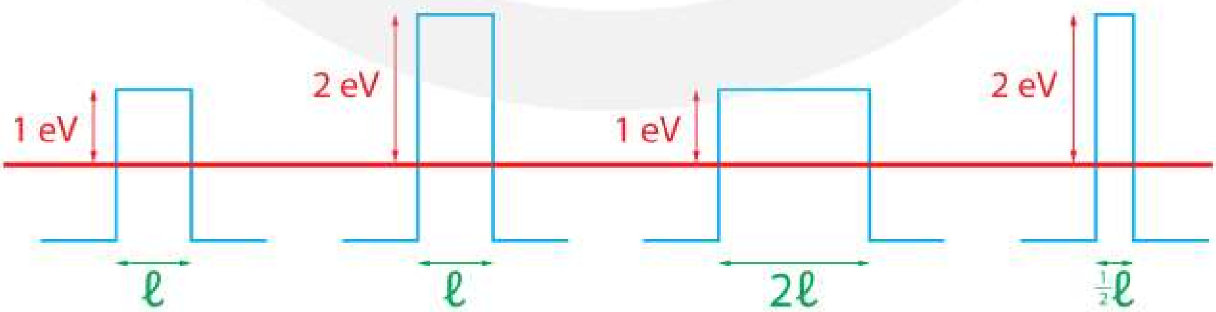
Voor de kans dat een kwantumdeeltje tunnelt door een barrière met hoogte V – E en dikte L geldt:

$$P = e^{-2G \cdot L} \quad \text{met} \quad G = \sqrt{\frac{2m \cdot (E - V)}{\hbar^2}} \quad \text{waarin} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

a Toon dit aan.

b Leg uit waar de tunnelkans het meest gevoelig voor is:
- de massa van het kwantumdeeltje
- de hoogte van de energie barrière (V –E)
- de dikte van de energie barrière L

In figuur 1 zie je vier barrières waar een kwantumdeeltje doorheen kan tunnelen.



Figuur 1

c Zet de barrières op volgorde van kleinste tunnelkans naar grootste tunnelkans.

Een elektron met 4,0 eV kinetische energie nadert een barrière van 8,0 eV en een dikte van 0,10 nm.

d Bereken de tunnelkans.

Een ander elektron nadert een barrière met een hoogte van 10 eV en een dikte van 0,50 nm. De tunnelkans is 1,0%.

e Bereken de kinetische energie van dit elektron.

Weer een ander elektron heeft een kinetische energie van 7,0 eV en nadert een barrière met een hoogte van 10 eV. De tunnelkans van dit elektron is 2,0%.

f Bereken de dikte L van deze barrière.

2*** Kernfusie in de zon (vwo 2007-1 Na12 PMN)

In het centrum van de zon wordt door kernfusie helium gevormd uit waterstof. Het centrum van de zon bestaat vrijwel geheel uit een plasma van protonen en elektronen. Om te kunnen fuseren moeten de protonen in dit plasma voldoende dicht bij elkaar kunnen komen. Volgens de klassieke natuurkunde moeten ze hiervoor een kinetische energie hebben in de orde van 1 MeV. De gemiddelde kinetische energie van de protonen in het plasma wordt in de klassieke natuurkunde gegeven door de formule:

$$E_K = \tfrac{3}{2} k \cdot T$$

Hierin is:
– k de constante van Boltzmann,
– T de absolute temperatuur van het plasma.

3p **a** Toon met een berekening aan dat bij een plasmatemperatuur in de orde van 10^{10} K de protonen volgens de klassieke natuurkunde gemiddeld voldoende kinetische energie hebben om met elkaar te kunnen fuseren.

De werkelijke plasmatemperatuur is van de orde van 10^7 K. Volgens de klassieke natuurkunde zouden bij die temperatuur per seconde veel te weinig protonen fuseren om de enorme energieproductie van de zon te kunnen verklaren.

3p **b** Leg met behulp van het begrip golffunctie uit waarom er in werkelijkheid meer fusies plaatsvinden dan volgens de klassieke natuurkunde verwacht mag worden.

De eerste stap in het fusieproces in het genoemde plasma bestaat uit fusie van twee protonen, waarbij een deuteriumkern een positron en een neutrino ontstaan. Na een aantal stappen ontstaat een He-4 kern. Bij dit proces worden netto vier protonen en twee elektronen omgezet in een He-4 kern en twee neutrino's.

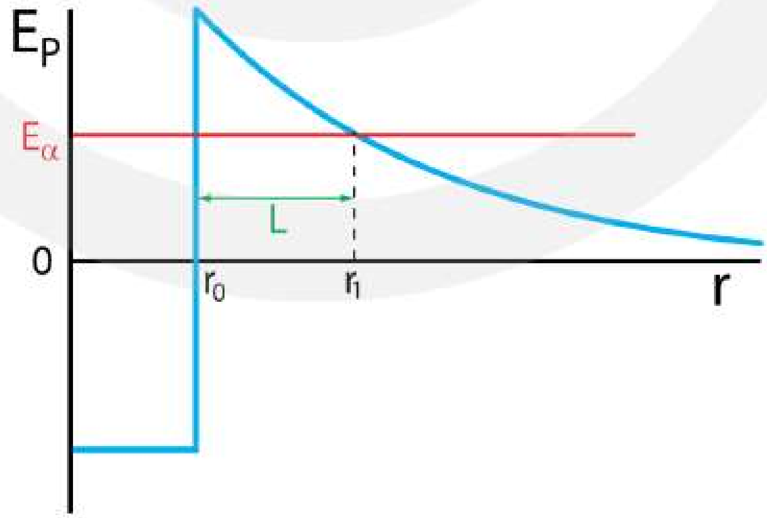
Wanneer de waterstof opraakt, wordt de zon eerst een rode reus. Nadat deze zijn buitenlagen heeft afgestoten blijft er een witte dwerg over: een compact object dat geleidelijk afkoelt. In deze toestand is de druk ten gevolge van de eigen zwaartekracht zo groot dat de witte dwerg volledig zou instorten als de kernen en elektronen klassieke deeltjes zouden zijn. Dat dit niet gebeurt, is kwantummechanisch te verklaren door de elektronen in de witte dwerg te beschouwen als deeltjes in een doos. Wanneer de zwaartekracht de doos in elkaar drukt, geven de elektronen tegendruk omdat hun energie toeneemt.

3p **c** Leg uit waarom de energie van een elektron in een bepaald energieniveau van het deeltjes-in-een-doos-model toeneemt wanneer de zwaartekracht de doos in elkaar drukt.

3*** Alfaverval

Bij alfaverval zendt een atoomkern een α-deeltje (He-kern) uit met een bepaalde energie. De halveringstijden van dit proces lopen ver uiteen, van een miljoenste seconde (10^{-6} s) tot de leeftijd van het heelal (10^{10} jaar). De halveringstijd hangt af van de energie van het uitgezonden α-deeltje én van het atoomnummer van de moederkern. In 1928 stelt George Gamow een model op om dit te verklaren. Hij maakt hierbij gebruik van tunneling.

Gamow stelt zich voor dat in de moederkern een α-deeltje heen en weer beweegt. De kinetische energie van het opgesloten α-deeltje is gelijk aan de energie van α-deeltje als het de moederkern heeft verlaten. Deze kinetische energie is kleiner dan de potentiele energie van de sterke kernkrachten, en vandaar dat het α-deeltje niet zomaar uit de kern kan ontsnappen.



Figuur 1

Deze situatie lijkt op een kwantumdeeltje in een energieput. In figuur 1 is de situatie weergegeven. Volgens de klassieke mechanica heeft het α-deeltje te weinig energie om uit de put te ontsnappen, maar kwantummechanica biedt de mogelijkheid dat het α-deeltje naar buiten tunnelt. Zie figuur 1.

a Leg uit hoe je met het model van Gamow kunt verklaren dat alfaverval waarbij α-deeltjes met veel energie worden uitgestraald een kleine halveringstijd hebben.

Voor uranium zijn de volgende waarden gemeten:

isotoop	**halveringstijd (jaar)**	**energie van het α-deeltje (MeV)**
U-233	$1{,}6 \cdot 10^5$	4,83
U-234	$2{,}5 \cdot 10^5$	4,76
U-235	$7{,}04 \cdot 10^8$	4,52
U-236	$2{,}34 \cdot 10^7$	4,49
U-238	$4{,}46 \cdot 10^9$	4,18

In bovenstaande tabel zijn van de uraniumisotopen de halveringstijd en de energie van het α-deeltje gegeven.

b Leg uit of de gegevens van de tabel kwalitatief in overeenstemming zijn met het model van Gamow.

De energie van het α-deeltje is kleiner voor isotopen met een groter massagetal.

c Geef hiervoor een verklaring.

Voor moederkernen met een laag atoomnummer is de afstoting tussen het positief geladen α-deeltje en de positief geladen kern kleiner.

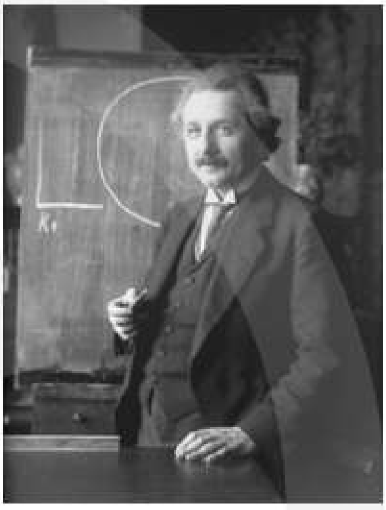
d Leg met behulp van een schets van de afstoting uit of de tunnelkans voor een moederkern met een laag atoomnummer kleiner of groter is dan voor een moederkern met een hoog atoomnummer.

e Vergelijk de halveringstijden van het α-verval van radon (Rn) en uranium (U) en leg uit of dit in overeenstemming is met het model van Gamow.

Examenvragen vwo

Opbrengst van het foto-elektrische effect (aangepast)

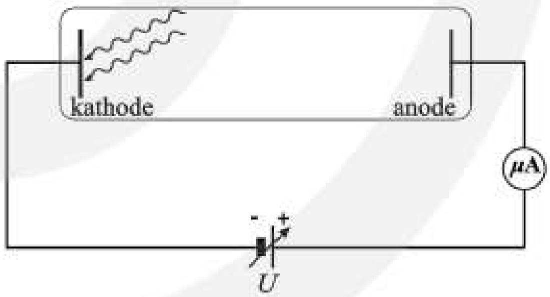
Lees onderstaand artikel



Om de straling van zwarte stralers te verklaren stelde Max Planck in 1900 de hypothese dat de stralings-energie van zwarte stralers opgedeeld is in pakketjes met een energie E = hf. In 1905 stelde Einstein in zijn theorie van het foto-elektrisch effect dat het inderdaad om meetbare losse deeltjes gaat. Deze deeltjes kregen later de naam fotonen.

Het deeltjeskarakter van licht werd pas na veel weerstand door de natuurkundige wereld geaccepteerd. Zo heeft Millikan tot 1916 geprobeerd deze theorie te weerleggen. Einstein ontving voor zijn idee in 1921 de Nobelprijs. Het tijdperk van de quantumfysica was definitief aangebroken. Het heeft echter tot 1960 geduurd voordat men begreep dat het foto-elektrisch effect geen puur oppervlakteverschijnsel was, maar binnen in het metaal plaatsvindt.

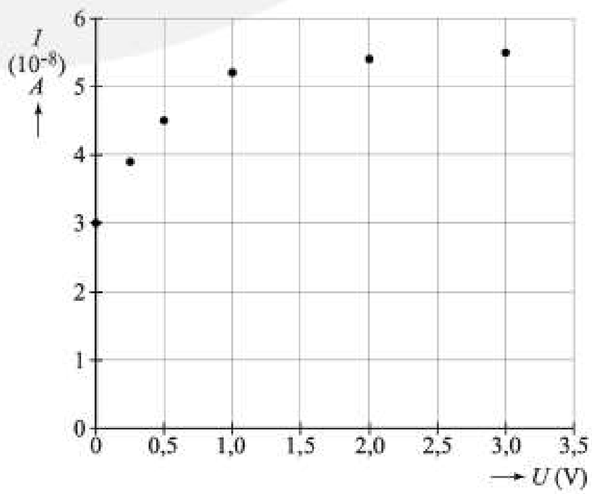
Het foto-elektrisch effect wordt vaak aangetoond in een experiment zoals weergegeven in figuur 1. In zo'n experiment wordt de kathode in een vacuümbuis beschenen door een laser met een golflengte $\lambda = 410$ nm en een vermogen van P = 3,0 mW. Op de kathode komen dan elektronen vrij die naar de anode bewegen.



Figuur 1

De stroomsterkte I in de kring wordt uitgezet tegen de spanning U. Zie figuur 2.

Als de spanning hoger is dan U = 2,0 V, bereiken alle vrijgemaakte elektronen de anode.



Figuur 2

2p **a** Beantwoord de volgende vragen:
- Hoe is dit te zien in figuur 2?
- Waarom bereiken bij een lagere spanning niet alle vrijgemaakte elektronen de anode?

Niet elk foton dat op de kathode valt, maakt een elektron vrij. Daarom spreekt men over het quantumrendement η_Q van een fotokathode. Voor het quantumrendement geldt:

$$\eta_Q = \frac{n_e}{n_f} \qquad \text{formule (1)}$$

Hierin is:
- n_f het aantal fotonen dat per seconde het kathodeoppervlak treft;
- n_e het aantal elektronen dat per seconde de kathode verlaat.

Voor de maximale stroomsterkte I_{max} geldt:

$$I_{max} = \frac{\eta_Q\, e}{E_f} P_{licht} \qquad \text{formule (2)}$$

Hierin is:
- e elementair ladingsquantum;
- P_{licht} het vermogen van het opvallende licht;
- E_f de energie van een foton.

3p **b** Leid formule (2) af met behulp van formule (1) en formules in Binas.

3p **c** Bepaal het quantumrendement η_Q van deze fotokathode.

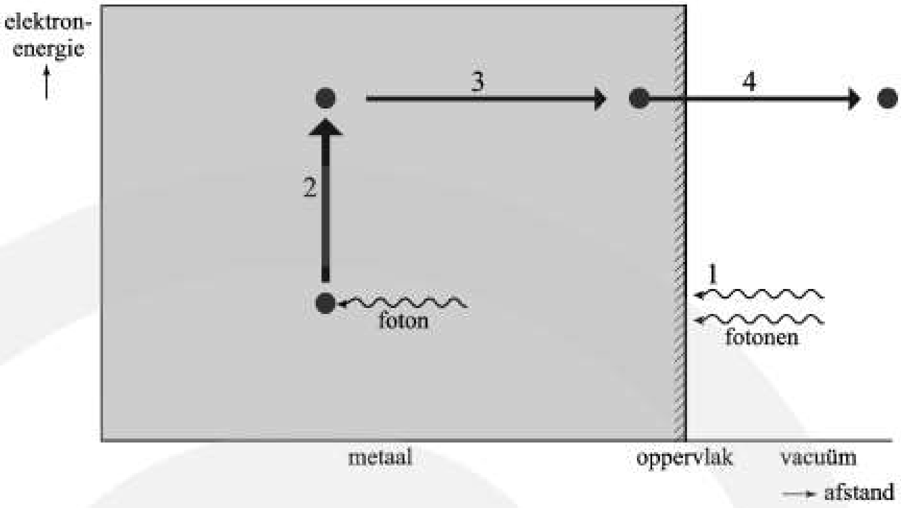
Er zijn duizenden fotonen nodig voor het vrijmaken van één elektron. Toch vormt het foto-elektrisch effect een bewijs voor het individuele deeltjeskarakter van fotonen.

2p **d** Leg uit waarom.

Chris wil weten hoe het komt dat het foto-elektrisch effect bij metalen zo'n laag quantumrendement η_Q heeft. Hij gebruikt hiervoor het model voor het foto-elektrisch effect dat in 1958 ontwikkeld is door de natuurkundige Spicer. Hierbij wordt het proces van het foto-elektrisch effect in de volgende vier stappen verdeeld:

1 terugkaatsing van een foton aan het buitenoppervlak van het metaal
2 absorptie van een foton door een elektron
3 transport van het elektron naar het oppervlak
4 ontsnappen van het elektron aan het oppervlak

Het proces is schematisch weergegeven in figuur 3.



Figuur 3

In tabel 1 zijn karakteristieke waarden gegeven die Chris heeft gevonden voor de foto-elektrische deelprocessen van een fotokathode van koper, bestraald met fotonen van 4,8 eV.

Tabel 1

stap	percentage
1	40% van de fotonen wordt gereflecteerd
2	83% van de fotonen wordt door elektronen geabsorbeerd
3	80% van de aangeslagen elektronen wordt verstrooid door botsingen
4a	4% van de aangeslagen elektronen hebben voldoende energie om te ontsnappen
4b	99% van de aangeslagen elektronen met voldoende energie treffen het oppervlak onder een zodanige hoek dat ze worden teruggekaatst

3p **e** Bereken met behulp van tabel 1 het quantumrendement η_Q van de fotokathode.

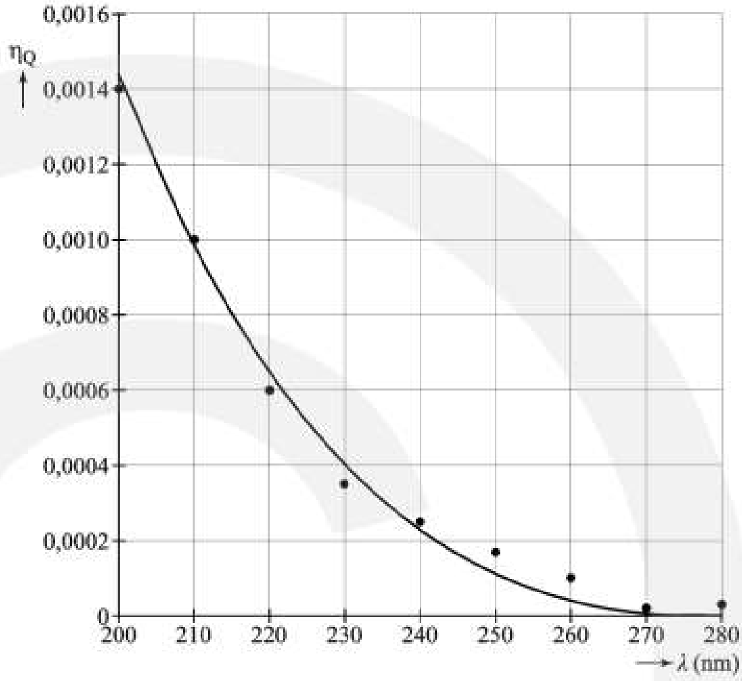
Als de fotonenergie toeneemt, stijgt het energieoverschot ($E_f - W_u$). Hierdoor wordt de opbrengst zowel bij stap 4a als bij stap 4b groter. Dit leidt tot de regel van Fowler:

$$\eta_Q = k\left(E_f - W_u\right)^2$$

Hierin is:
- k een materiaalconstante;
- ($E_f - W_u$) het energieoverschot uitgedrukt in eV.

3p **f** Leid de eenheid van k af.

Chris vindt in de literatuur een diagram waarin het quantumrendement η_Q van een bepaalde fotokathode uitgezet is tegen de golflengte van het opvallende licht. Zie figuur 4.



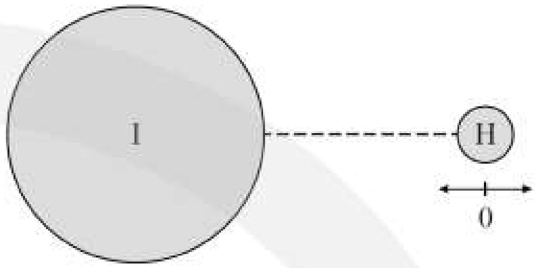
Figuur 4

4p **g** Voer de volgende opdrachten uit:
- Toon aan dat de fotokathode van koper is. Gebruik hierbij Binas.
- Bepaal de waarde van de constante k.

Trillingen binnen een molecuul

Lees onderstaand artikel.

In het molecuul waterstofjodide (HI) is het kleine waterstofatoom gebonden aan het grote jodiumatoom. De evenwichtsafstand tussen de twee atomen is $1{,}609 \cdot 10^{-10}$ m. Als deze afstand groter of kleiner wordt, zorgt de binding voor een terugdrijvende kracht die in eerste benadering recht evenredig is met de uitwijking van de even-wichtsstand.

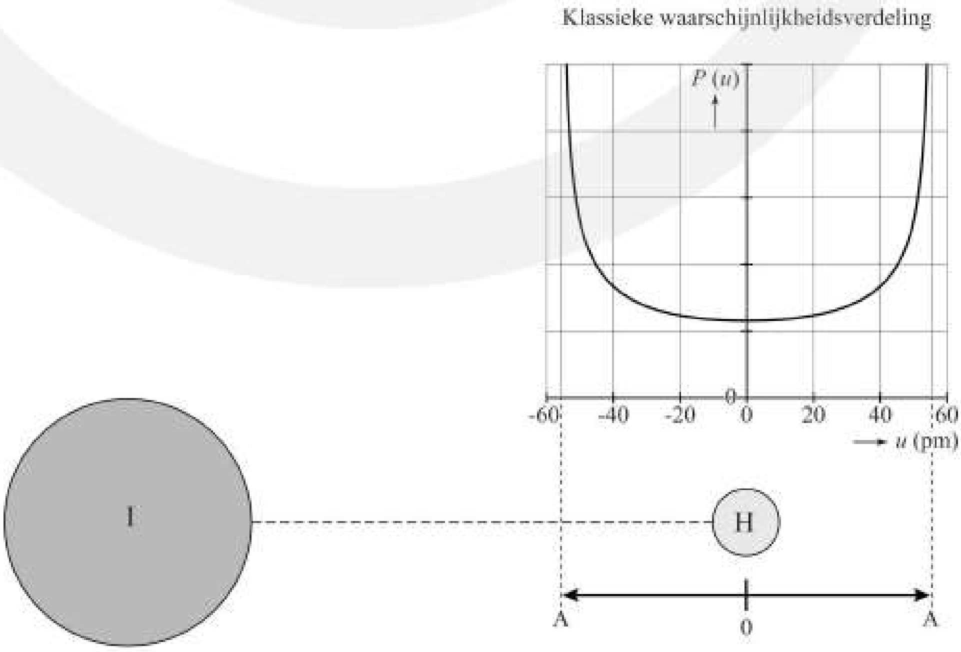


Een model om het molecuul te beschrijven is een massaveersysteem, waarbij het waterstofatoom trilt, het jodiumatoom stilstaat en de binding beschouwd wordt als een veer. In het klassieke model van een harmonisch trillend systeem zijn alle energietoestanden mogelijk. Kijkt men echter naar het spectrum van waterstofjodide, dan blijkt dat geen continu spectrum maar een lijnenspectrum te zijn: om dat te begrijpen is een quantumfysisch model nodig!

De trillingsfrequentie f van dit massa-veersysteem is $6{,}92 \cdot 10^{13}$ Hz. Hiermee kan met het klassieke model de veerconstante berekend worden.

3p **a** Voer die berekening uit.

In figuur 1 is de klassieke waarschijnlijkheidsverdeling P(u) van het trillende H-atoom in het massa-veersysteem gegeven met amplitude $A = 5{,}54 \cdot 10^{-11}$ m.

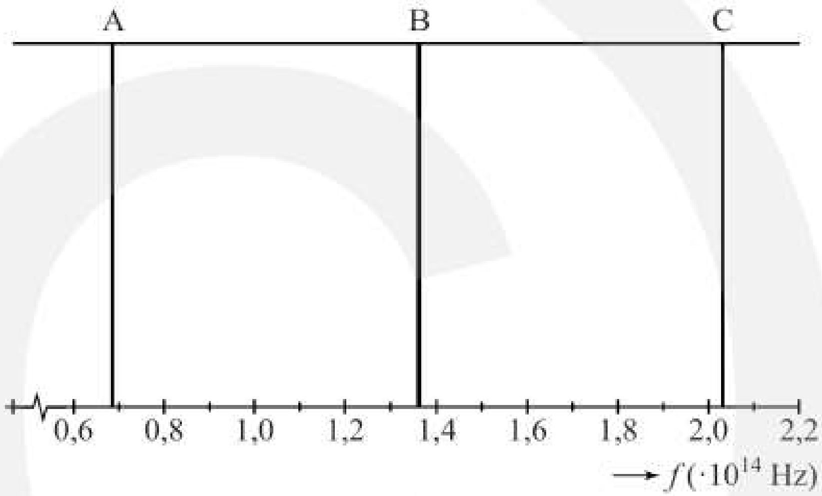


Figuur 1

Uit de oppervlakte tussen twee posities onder de waarschijnlijkheidsverdeling is het percentage van de tijd te berekenen dat een trillende massa zich tussen die twee posities bevindt.

3p **b** Voer de volgende opdrachten uit:
- Geef aan waarom P(u) een minimum heeft voor u = 0 en maximaal is voor $u \rightarrow \pm A$.
- Leg uit hoe de waarschijnlijkheidsverdeling P(u) in breedte en hoogte verandert als de totale energie van het systeem groter wordt.

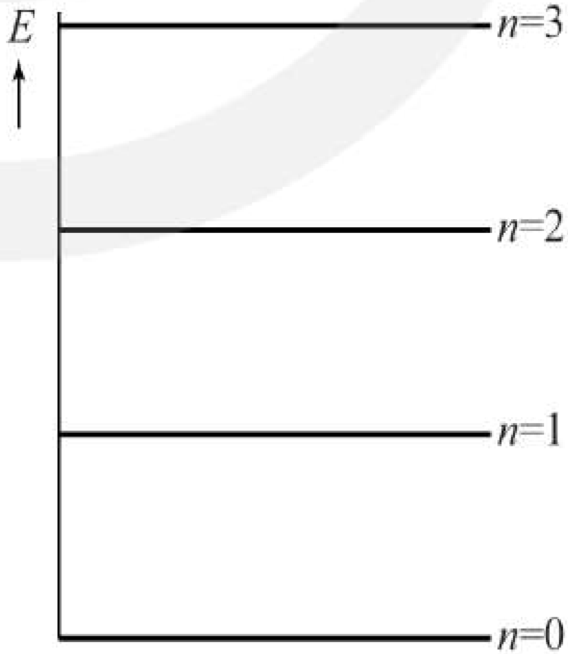
Het spectrum van waterstofjodidegas is een lijnenspectrum. In dit spectrum zijn onder andere drie lijnen te zien. Zie figuur 2.



Figuur 2

Dit lijnenspectrum is niet te verklaren met het klassieke model van het massaveer-systeem. Blijkbaar heeft het HI-molecuul discrete energieniveaus. Uit het spectrum van figuur 2 kan men het figuur 3 energie-niveau-schema van HI afleiden. Dit is in figuur 3 weergegeven. De energieniveaus worden aangegeven met de quantumgetallen n = 0, 1, 2, … .

4p **c** Voer de volgende opdrachten uit:
- Leg uit hoe uit figuur 2 volgt dat de afstand tussen de energie-niveaus in figuur 3 constant is.
- Bepaal de waarde $\Delta E = E_1 - E_0$ in eV.
- Teken in figuur 3 een overgang die hoort bij lijn B van figuur 2.



Figuur 3

Het is mogelijk om een quantumfysisch model van HI op te stellen, waarbij het trillende H-atoom beschreven wordt als een deeltje in een één-dimensionale energieput. De afstanden tussen de energieniveaus hangen af van de eigenschappen van de energieput.

We vergelijken de afstanden van de energieniveaus bij HI met de afstanden in twee andere quantumfysische modellen.

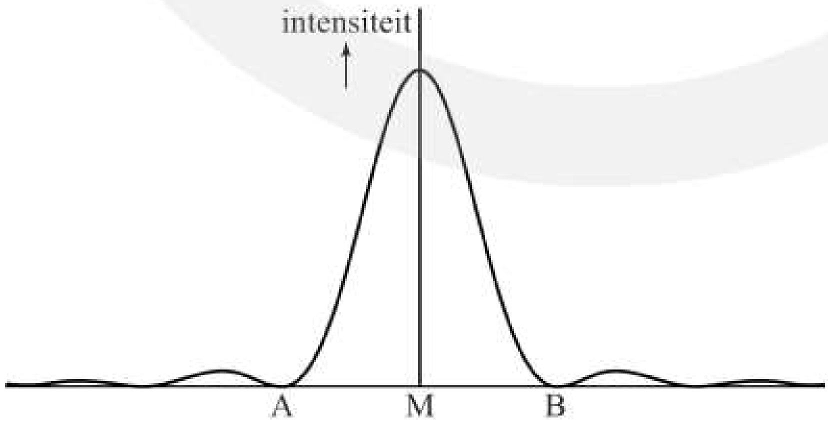
3p **d** Voer de volgende opdrachten uit:
- Geef aan hoe in het quantummodel van een energieput met oneindig hoge wanden de energieniveaus ten opzichte van elkaar liggen.
- Geef aan hoe in het quantummodel van een (elektron in een) vrij waterstofatoom de energieniveaus ten opzichte van elkaar liggen.
- Geef aan waarom beide modellen niet kunnen gelden voor HI.

In de quantumfysica is het uitgesloten dat het waterstofatoom in het molecuul HI helemaal stilstaat.

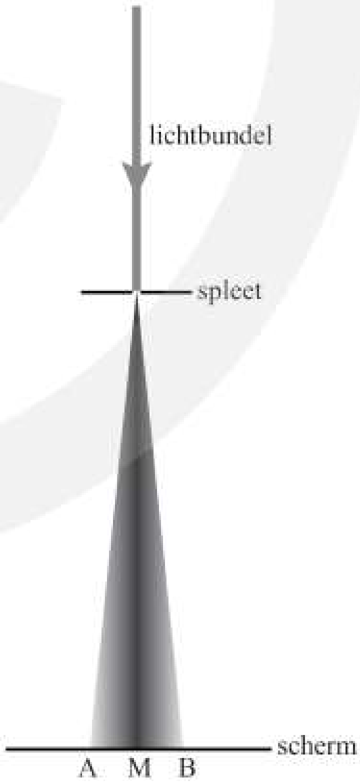
2p **e** Leg dit uit met behulp van de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

Buiging bij een enkelspleet

Een evenwijdige lichtbundel die door een nauwe spleet gaat, komt er divergent uit. In figuur 1 is dit schematisch weergegeven. Deze figuur is niet op schaal. Dit verschijnsel wordt buiging genoemd. Op het scherm achter de spleet is tussen de punten A en B een lichtvlek te zien in plaats van één stip alleen in punt M. Links van A en rechts van B komt ook nog een klein beetje licht. Figuur 2 laat zien hoe de lichtintensiteit op het scherm verloopt.



Figuur 1

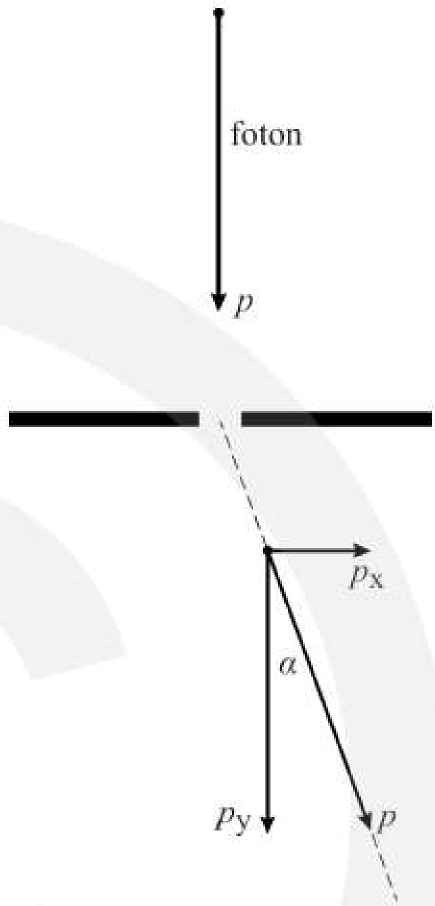


Figuur 2

3p **a** Leg uit waarom in de punten A en B de lichtintensiteit nul is. Gebruik hierbij het begrip interferentie.

Een lichtbundel bestaat uit fotonen. De fotonen die door de spleet gaan, hebben na de spleet niet allemaal dezelfde richting. In figuur 3 is weergegeven hoe een foton na de spleet onder een hoek α naar het scherm gaat. De impuls p van het foton is niet van grootte veranderd, maar wel van richting. Figuur 7 is niet op schaal.

Voor de golflengte van het licht geldt: $\lambda = 632{,}8$ nm; voor de horizontale component van de impuls van dit foton na de spleet geldt: $p_x = 1{,}33 \cdot 10^{-29}$ kg m s^{-1}



Figuur 3

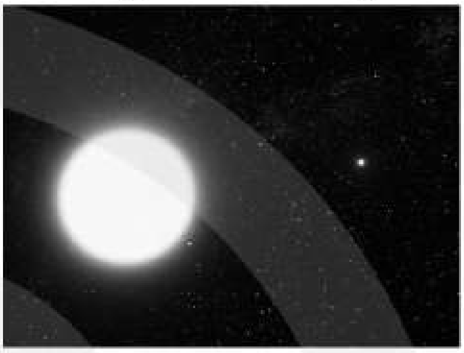
3p **b** Bereken de grootte van hoek α.

De meeste fotonen komen ergens tussen de punten A en B op het scherm, afhankelijk van de grootte en richting van de component p_x die het foton heeft gekregen bij het passeren van de spleet. Als de in figuur 7 getekende lichtstraal net links van punt B uitkomt, mag de gegeven waarde van p_x beschouwd worden als de onbepaaldheid Δp zoals die voorkomt in de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

4p **c** Voer de volgende opdrachten uit:
- Bereken de minimale waarde van Δx in dit geval volgens de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.
- Geef aan of deze waarde van Δx betrekking heeft op de breedte van de spleet of op de afstand AB op het scherm.
- Leg uit wat er met de afstand AB gebeurt als de spleetbreedte kleiner wordt en de afstand van de spleet tot het scherm gelijk blijft.

Sirius B als Quantumsysteem   (aangepast)

Lees onderstaand artikel.



Uit de beweging van Sirius A, de helderste ster aan de hemel, voorspelde men al in 1844 dat Sirius een dubbelster is. De zwakker stralende begeleider, Sirius B, een witte dwerg, werd in 1862 ontdekt. ***In 1914 ontdekte de astronoom Adams dat Sirius B ongeveer zo zwaar is als de zon en ongeveer zo groot is als de aarde.*** *Het was met de toenmalige stand van de wetenschap niet te begrijpen hoe zo'n object kon bestaan. Het duurde tot de komst van de quantumfysica voordat men begreep waarom zo'n supercompact object niet onder zijn eigen zwaartekracht in elkaar stort. Om dat te verklaren wordt Sirius B in de quantumfysica beschreven als één gigantisch atoom met 10^{57} elektronen!*

Het continue emissiespectrum van Sirius B heeft de grootste intensiteit bij $\lambda = 115$ nm.

2p **a** Bereken de temperatuur van Sirius B.

Sirius B bestaat uit een plasma: een verzameling losse kernen en vrije elektronen. Hij bestaat vooral uit $^{12}_{6}C$ en $^{16}_{8}O$ met een mantel van $^{4}_{2}He$.

Voor het aantal elektronen in Sirius B geldt: $N_e = 6 \cdot 10^{56}$.

3p **b** Voer de volgende opdrachten uit:
- Geef de reden dat het aantal elektronen N_e in Sirius B de helft is van het aantal kerndeeltjes.
- Laat hiermee en met de gegevens uit het artikel met een berekening zien dat de orde van grootte van N_e klopt.

Het volume van Sirius B is gelijk aan $8{,}1 \cdot 10^{20}$ m^3. De elektronen in Sirius B zitten dicht op elkaar. Om de gemiddelde onderlinge afstand d te schatten stellen we het volume dat één elektron inneemt gelijk aan d^3. Dan geldt voor de gemiddelde onderlinge afstand: $d = 1 \cdot 10^{-12}$ m.

2p **c** Toon aan met een berekening dat dan geldt: $d = 1 \cdot 10^{-12}$ m.

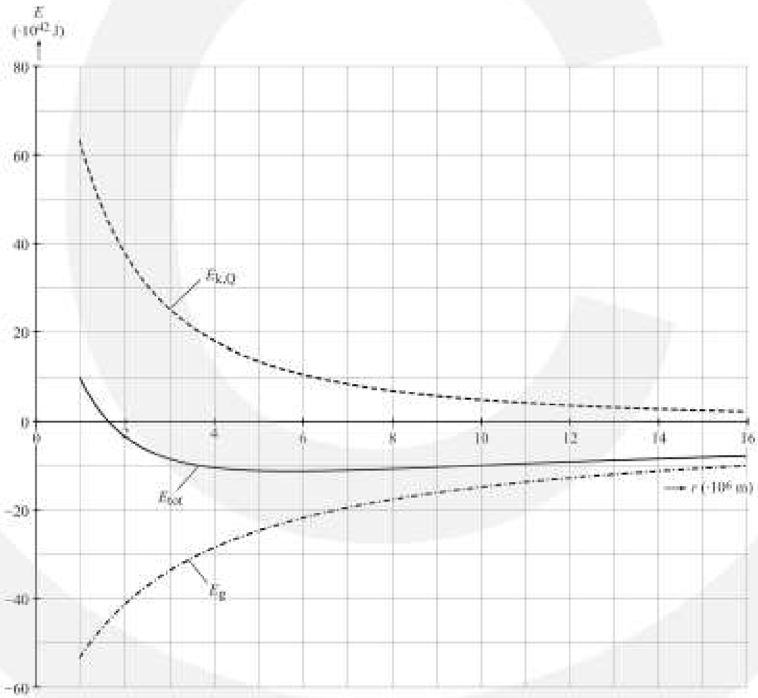
Omdat de elektronen in Sirius B zo dicht op elkaar zitten, is er een vereenvoudigd quantummodel opgesteld: alle elektronen van Sirius B bevinden zich in een ééndimensionale energieput met $L = 5{,}8 \cdot 10^{6}$ m. We verwaarlozen de krachten die op de elektronen werken.

In dit quantummodel wordt Sirius B dus beschouwd als één gigantisch atoom. Net als bij een gewoon atoom kunnen niet alle elektronen hetzelfde energieniveau bezetten: hoe meer elektronen er zijn, des te meer energieniveaus bezet zijn. Voor het quantumgetal n dat hoort bij het hoogst bezette energieniveau van Sirius B geldt: $n_{max} = 8{,}4 \cdot 10^{18}$.

De elektronen zijn in dit model te beschrijven als golven met een debroglie-golflengte waarvoor de formule geldt: $\lambda_B = \dfrac{2 \cdot L}{n}$

3p **d** Voer de volgende opdrachten uit:
- Leid deze formule af.
- Bereken de minimale debroglie-golflengte van elektronen in Sirius B.

Met het quantummodel zijn model-energie-berekeningen gemaakt. De resultaten zijn weergegeven in figuur 1.



Figuur 1

- $E_{k,Q}$ is de quantumfysische kinetische energie. Deze is gelijk aan de som van de elektron-energieën van alle gevulde energieniveaus.
- E_g is de gravitatie-energie.
- E_{tot} is de totale energie. Er geldt: $E_{tot} = E_g + E_{k,Q}$

De grootte van Sirius B is met dit quantummodel te bepalen.

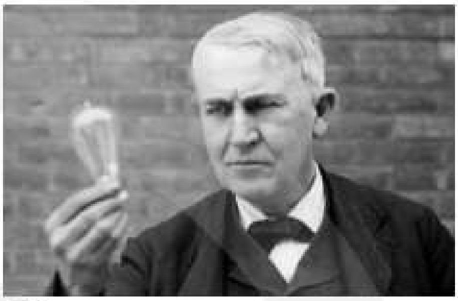
3p **e** Voer daartoe de volgende opdrachten uit:
- Geef de reden dat de totale quantumfysische kinetische energie $E_{k,Q}$ toeneemt als de straal van Sirius B kleiner wordt.
- Geef aan wat dit betekent voor een mogelijke ineenstorting van Sirius B.
- Bepaal met behulp van figuur 1 de straal van Sirius B die uit dit model volgt.

Elektronen uit metaal 'stoken'

Lees onderstaand artikel.

Edison

Thomas Edison was één van de belangrijkste ontwikkelaars van de gloeilamp. Hij constateerde dat een verhitte gloeidraad niet alleen licht maar ook negatieve lading uitzendt. Edison kende het bestaan van elektronen nog niet en nam in 1883 patent op dit 'Edison-effect' zonder echt te begrijpen wat er gebeurde.



Edison

Richardson Dushman

Het effect van het 'uitstoken' van elektronen uit een geleider is in het begin van de twintigste eeuw diepgaand bestudeerd door de Britse fysicus Owen Richardson en de Russisch-Amerikaanse fysicus Saul Dushman. Zij ontvingen daarvoor de Nobelprijs in 1928. Thermische emissie is ook nu nog het belangrijkste principe voor betrouwbare elektronenbronnen in vacuüm, toegepast in röntgenbuizen, elektronenmicroscopen en beeldbuizen.

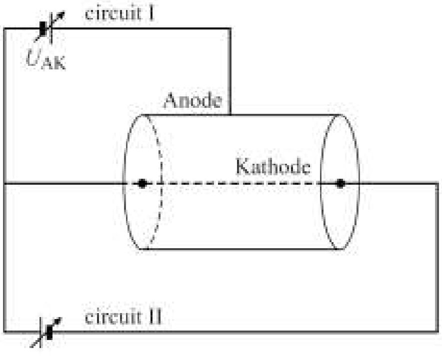
Richardson

Dushman

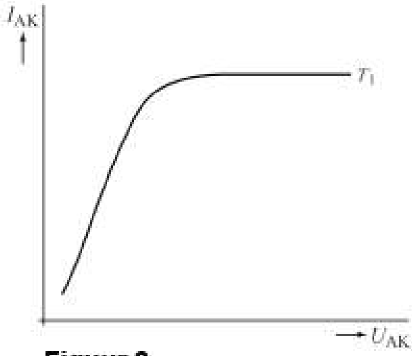
Experiment

Met de opstelling van figuur 1 wil men het verband bepalen tussen de temperatuur van een gloeidraad en het aantal elektronen dat daaruit per seconde vrijkomt. De as van de cilinder is de kathode: een hete gloeidraad van wolfraam. De anode is de mantel van de cilinder. De anode neemt de uit de draad vrijgekomen elektronen op door de spanning U_{AK} in circuit I.

3p **a** Voer de volgende opdrachten uit:
- Teken in figuur 1 een stroommeter die de stroom tussen de anode en de kathode meet.
- Teken een spanningsmeter om de spanning U_{AK} te meten.
- Geef aan op welke manier men de temperatuur van de gloeidraad in de schakeling verandert.



Figuur 1



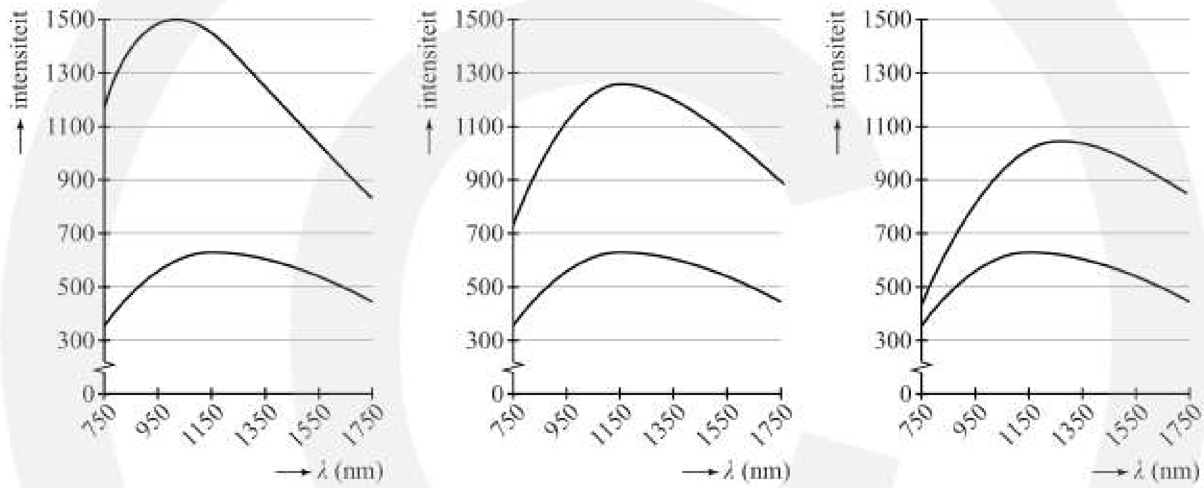
Figuur 2

Het verband tussen de stroomsterkte I_{AK} en de spanning U_{AK} is geschetst in figuur 2.

2p **b** Leg uit waarom I_{AK} bij grotere waarden van de spanning U_{AK} niet meer toeneemt.

De temperatuur van de gloeidraad is te bepalen door het uitgezonden stralingsspectrum te vergelijken met de planck-kromme (het ideale spectrum voor een zwarte straler) van dezelfde temperatuur. De uitgezonden lichtintensiteit van een metaal is lager dan de planckkromme van dezelfde temperatuur. Deze verzwakking is onafhankelijk van de golflengte.

In de figuren 3a, 3b en 3c is de onderste kromme steeds de kromme van de gloeidraad en de bovenste kromme een planck-kromme.



Figuur 3a **Figuur 3b** **Figuur 3c**

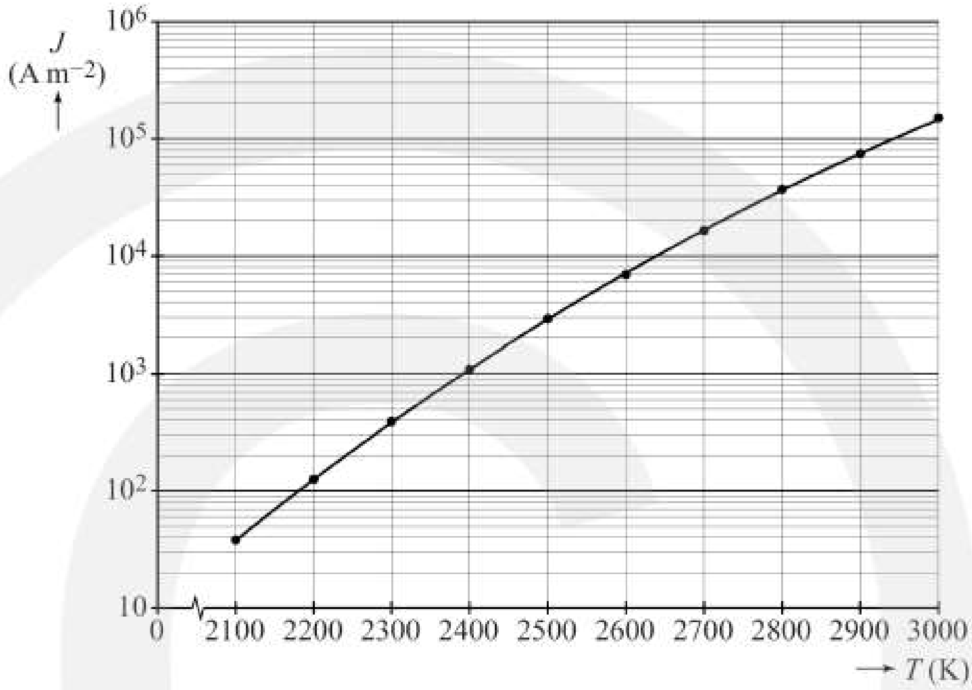
4p **c** Voer de volgende opdrachten uit:
- Leg uit in welke figuur de planck-kromme met dezelfde temperatuur als de gloeidraad staat.
- Bepaal de temperatuur van de gloeidraad.

Theorie
Om uit de draad te ontsnappen, moeten de elektronen voldoende energie hebben om de uittree-energie W_u te overwinnen. Richardson en Dushman gebruikten de uittree-energie in hun formule voor de geproduceerde stroomdichtheid J, dit is de stroomsterkte per eenheid van oppervlak van de gloeidraad:

$$J = \frac{I}{A} = (1-r)\cdot C_0 \cdot T^2 \cdot e^{\left(\frac{-W_u}{k_B T}\right)}$$

Hierin is:
- I de gemeten stroomsterkte in A;
- A de oppervlakte van de kathode in m^2;
- r de (inwendige) reflectiecoëfficiënt;
- C_0 een natuurconstante: $C_0 = 1{,}20173\cdot 10^6$ A m^{-2} K^{-2};
- W_u de uittree-energie van het metaal in J;
- k_B de constante van Boltzmann;
- T de absolute temperatuur in K.

De stroomdichtheid J hangt sterk af van de temperatuur. Het verband tussen J en T voor het metaal wolfraam is te zien in figuur 4 (dit is een logaritmisch diagram).
De uittree-energie van wolfraam is $7{,}29 \cdot 10^{-19}$ J.



Figuur 4

3p **d** Bepaal met behulp van figuur 4 de grootte van de reflectiecoëfficiënt r.

Bij lagere temperaturen (< 2000 K, zie figuur 4) neemt de 'klassieke' thermische emissie snel af en vindt er alleen nog emissie via het tunneleffect plaats. Minieme bedekkingen (coatings) als een laagje van enkele moleculen dikte blijken grote invloed te hebben op de thermische emissie. Met de coating wordt de elektronen een kansrijke (tunnel)weg naar buiten geboden. Doordat de coating een andere uittree-energie heeft dan wolfraam, wordt de effectieve uittree-energie veranderd. Voor de debroglie-golflengte van vrije elektronen in een metaal bij een temperatuur T geldt:

$$\lambda_B = \frac{7{,}45 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{T}}$$

3p **e** Voer de volgende opdrachten uit:
- Ga met een schatting na of dit effect van de coating bij T = 2000 K een quantumverschijnsel zou kunnen zijn.
- Leg uit of dit effect sterker is bij lagere temperaturen.

De emissie door deze coating-tunneling wordt bepaald door:
- de dikte van de coating-laag;
- de grootte van de uittree-energie van de coating.

2p **f** Geef aan, aan welke eisen beide grootheden moeten voldoen om de emissie-kans bij lagere temperaturen zo groot mogelijk te maken.

Water uit de ruimte (aangepast)

Lees onderstaand artikel.

Water is een noodzakelijke voorwaarde voor leven op onze planeet. Volgens veel wetenschappers is water niet op aarde ontstaan, maar is het op aarde 'aangeleverd' door een groot aantal inslagen van kometen, planetoïden en meteoren. Deze bevatten ijs dat oorspronkelijk in koude interstellaire gaswolken met een temperatuur van 10 K is gevormd.

Een komeet met een massa van $12 \cdot 10^3$ kg beweegt op een hoogte van 100 km boven het aardoppervlak met een snelheid van 50 km s^{-1} richting de aarde. Bij aankomst op de aarde is de massa van de komeet afgenomen tot $6{,}0 \cdot 10^3$ kg. Het totaal van de kinetische energie en de gravitatie-energie is dan nog slechts 0,20% van de oorspronkelijke totale energie. (Het verschil in gravitatie-energie ten opzichte van de zon is bij deze overgang verwaarloosbaar.)

5p **a** Bereken met welke snelheid de komeet op de aarde aankomt.

Een komeet zendt IR-straling uit. Het spectrum daarvan bestaat uit een deel met lijnen en een continu deel. Uit het spectrum kan men meer te weten komen over de temperatuur en de chemische samenstelling van de komeet.
Hieronder staat een tabel.

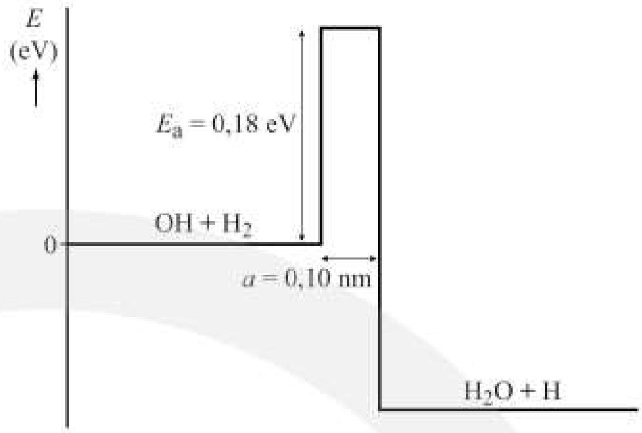
deel van het spectrum	chemische samenstelling van de komeet	temperatuur van de komeet	geen van beide
lijnen			
continu			

2p **b** Geef in de tabel met een kruisje voor elk deel van het spectrum aan, of daarmee de chemische samenstelling of de temperatuur van de komeet te bepalen is, of geen van beide.

Uit spectroscopische analyses van een aantal kometen en planetoïden blijkt dat deze water bevatten met dezelfde isotopenverhouding van waterstof (^1_1H) en deuterium ($^2_1D = {}^2_1H$) als op aarde. Men neemt aan dat water gevormd is in 'interstellaire wolken' bij een temperatuur van 10 K. Eén van de reacties voor watervorming is:

$OH + H_2 \rightarrow H_2O + H$ reactie (1)

Deze reactie vindt plaats aan het oppervlak van microscopische stofdeeltjes waarbij ijsmantels om de stofdeeltjes worden gevormd. Zoals bij veel reacties moet ook bij deze reactie een activeringsenergie E_a overwonnen worden. Zie figuur 1.

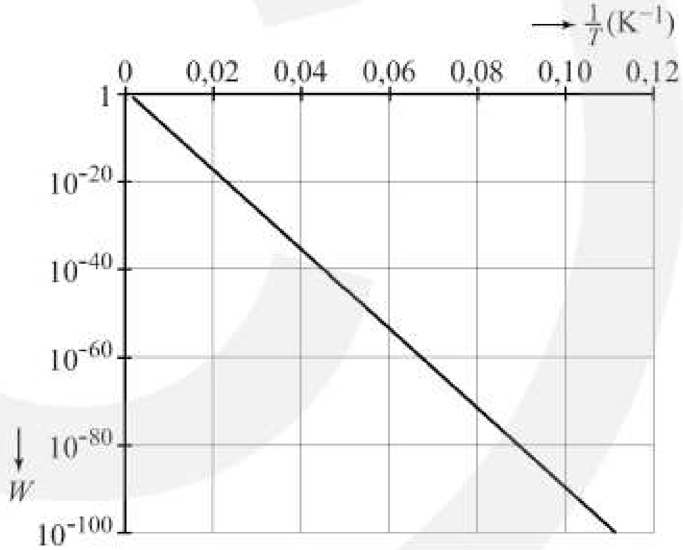


Figuur 1

Over deze reactie zijn twee theorieën opgesteld.

Theorie 1
De activeringsenergie E_a wordt geleverd door de thermische energie van de betrokken deeltjes. Bij 2100 K hebben de deeltjes een gemiddelde thermische energie van 0,18 eV.

De waarschijnlijkheid W dat de reactie optreedt volgens theorie 1 is alleen afhankelijk van de temperatuur T. In figuur 2 is deze waarschijnlijkheid W weergegeven als functie van $\frac{1}{T}$.



Figuur 2

4p **c** Voer de volgende opdrachten uit:
- Bepaal met behulp van figuur 2 de verhouding van de waarden van W bij 10 K en bij 2100 K.
- Leg hiermee uit dat theorie 1 geen goede verklaring geeft voor het ontstaan van water bij 10 K.

Theorie 2
De energiebarrière wordt doorbroken door het quantum-tunneleffect. Als een H_2-deeltje en een OH-deeltje zich voldoende dicht bij elkaar aan het oppervlak van een vast stofdeeltje bevinden, kan er een reactie door het quantum-tunneleffect plaatsvinden. In deze reactie 'verhuist' een H-atoom van het H_2-deeltje naar het OH-deeltje, over een afstand a = 10^{-10} m.

Voor deeltjes met een massa m geldt voor de gemiddelde debroglie-golflengte λ in een omgeving met temperatuur T:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi\, m\, k_B T}}$$

Hierin is:
– k_B de constante van Boltzmann;
– h de constante van Planck.

3p **d** Leg met behulp van deze formule en met figuur 1 uit of er onder deze omstandigheden een redelijke kans is op het quantum-tunneleffect.

Wetenschappers onderzoeken deze reactie in een laboratorium. Ze vervangen daarbij alle waterstofkernen (^1_1H) door deuteriumkernen ($^2_1D = {}^2_1H$). Dit levert de volgende reactie:

$OD + D_2 \rightarrow D_2O + D$ reactie (2)

Voor reactie (2) zijn de hoogte en de breedte van de energiebarrière gelijk aan die van reactie (1), zoals weergegeven in figuur 1. Maar reactie (2) heeft een andere kans op het quantum-tunneleffect dan reactie (1).

2p **e** Leg uit of de kans dat het quantum-tunneleffect optreedt met deuteriumkernen groter of kleiner is dan met waterstofkernen.

Tim heeft moeite met theorie 2. Hij zegt: "In figuur 1 blijven de hoogte en breedte van de energiebarrière constant, dus je kunt net zo makkelijk 'terug-tunnelen' en dan wordt het water weer even snel afgebroken."

2p **f** Leg uit of Tim gelijk heeft.

Water maakt leven op een planeet mogelijk. In tabel 32H van BiNaS en in tabel 3.1a van ScienceData wordt het verband gegeven tussen de temperatuur van het heelal en de tijd sinds de oerknal. Ewine stelt dat het heelal oud genoeg moet zijn voor het vormen van water volgens theorie 2.

2p **g** Leg uit dat Ewine gelijk heeft.