18 Modelleren

vwo

18.1 Natuurkundig model

Numerieke rekenmethode

In een numerieke rekenmethode wordt de verandering van een grootheid berekend door in kleine stapjes het natuurkundige proces te volgen. De informatie die nodig is zijn de beginsituatie én een rekenvoorschrift om de nieuwe situatie, even later in de tijd, te berekenen. Het rekenvoorschrift bevat de natuurkundige formules die gebruikt worden. Deze formules zijn een benadering van de werkelijkheid, omdat er altijd invloeden zijn die verwaarloosd worden. Minder verwaarlozing vereist een uitgebreider model. Verder is de stapgrootte van belang. Hoe kleiner de tijdstapjes zijn hoe nauwkeuriger de berekening wordt.

Voorbeeld: eenparig rechtlijnige beweging

Bij een eenparig rechtlijnige beweging is een numerieke methode niet nodig, omdat met de bewegingsvergelijkingen kan worden berekend wat de plaats en de snelheid van het voorwerp op ieder moment zijn. Maar vanwege deze eenvoud is het geschikt als voorbeeld.

Een voorwerp heeft een constante snelheid van 5,0 m/s. De afstand die het voorwerp in 10 seconden aflegt moet worden berekend. De bewegingsvergelijking voor een eenparig rechtlijnige beweging is: $x = x_0 + v \cdot t$ en met $x_0 = 0$ vinden we $x = 5{,}0 \cdot 10 = 50\ \text{m}$. Bij een numerieke methode gaat de berekening als volgt:

1 Het tijdsinterval van 10 s wordt ingedeeld in kleine stappen, bijvoorbeeld 1000 stappen van 0,01 s.

2 Met het rekenvoorschrift $dx = v \cdot dt$ wordt de verandering van de plaats x na stap dt berekend.

3 Bij stapgrootte $dt = 0{,}01$ s vinden we $dx = 5{,}0 \cdot dt = 5{,}0 \cdot 0{,}01 = 0{,}05\ \text{m}$.

4 Na de eerste tijdstap is de plaats: $x_1 = x_0 + 0{,}05 = 0 + 0{,}05 = 0{,}05\ \text{m}$.

5 x_1 is de beginplaats voor de volgende stap.

6 Na twee tijdstappen: $x_2 = x_1 + v \cdot dt = 0{,}05 + (5{,}0 \cdot 0{,}01) = 0{,}10\ \text{m}$.

7 Deze berekening kan worden herhaald en na n tijdstappen is de plaats:
$x_n = x_{n-1} + v \cdot dt$.

8 Na 10 s met stapgrootte 0,01 s is de cyclus 1000 keer doorlopen.

In dit voorbeeld zie je dat voor de berekening van stap 1 gebruik wordt gemaakt van de gegevens van t = 0. Deze gegevens moeten dus bekend zijn. Voor de berekening van stap 2 maak je gebruik van de uitkomsten van stap 1. Op deze manier ga je verder. Steeds kun je een nieuwe rekenstap maken door de uitkomsten van de vorige stap te gebruiken.

De numerieke rekentaal

Om een nauwkeurige berekening te maken moeten de antwoorden van veel berekeningen bij elkaar worden opgeteld. Een computer is daarbij nodig. Om de computer te instrueren wordt een programmeertaal gebruikt. Het schrijven van een computerprogramma moet nauwkeurig gebeuren, want een computer is niet in staat om te begrijpen wat je bedoelt. Een computer voert uit wat is opgeschreven. Het vergeten van één leesteken kan ervoor zorgen dat het programma niet goed werkt.

Er zijn veel programmeertalen waaruit gekozen kan worden. Tegenwoordig wordt vaak gewerkt met: C++ en Python. Speciaal ontwikkelt voor numerieke berekeningen zijn de programma's Igor, MatLab en Mathematica. Het Microsoft programma Excel is een spreadsheet-programma, maar kan ook worden gebruikt om eenvoudige natuurkundige problemen numeriek op te lossen. Voor het aansturen van meetinstrumenten en robots wordt tegenwoordig vaak LabView gebruikt. Op Nederlandse middelbare scholen wordt veel gewerkt met de programma's Coach en Powersim.

Net als bij gewone talen heeft iedere computertaal zijn eigen grammaticale regels. Deze grammatica moet je goed kennen voordat je begint met programmeren. Ondanks de verschillen in grammatica is de structuur van een computerprogramma meestal goed te begrijpen. Hoewel de grammatica soms niet "logisch" is is de structuur van het programma dat wel. Een goed geschreven computerprogramma zit inzichtelijk in elkaar.

Stap 1

Ken aan iedere grootheid een symbool toe. Het is verstandig om de letter te kiezen die gebruikt wordt in de natuurkunde. Om de herkenbaarheid te vergroten kun je ook een paar letters gebruiken, maar veel letters is niet handig, omdat je dan veel moet typen en de code onoverzichtelijk wordt.

Stap 2

Leg voor iedere grootheid vast welke eenheid je gebruikt. Gebruik altijd de standaard SI eenheden, dus geen cm^2 maar m^2 en geen minuten of uren, maar seconden. Noteer de gebruikte eenheden in het programma, zodat je weet met welke eenheden je de berekeningen uitvoert. Dit commentaar wordt niet gebruikt bij de berekeningen maar dient als geheugensteun voor de programmeur.

Stap 3

Maak aan het begin van het programma een lijstje met de grootheden en variabelen waarvan de waarden bekend zijn of door jou zijn gekozen. Stel dat de beginsnelheid nul is dan staat er zoiets als $v_0 = 0$ m/s. Als je dit later wilt veranderen in een andere beginsnelheid hoef je alleen de 0 te vervangen door een ander getal. Omdat je lijstje aan het begin van het programma staat hoef je niet door het hele programma te zoeken als je een startwaarde wilt veranderen.

Stap 4

Als de berekening ingewikkeld is maak je eerst een **blokschema**. In een blokschema wordt de ingewikkelde opdracht gesplitst in een aantal deelopdrachten. Een moeilijke opdracht wordt hiermee de som van eenvoudige deelopdrachten. De deelopdrachten worden na elkaar uitgevoerd en daarna met elkaar gecombineerd. Het blokschema bevat de **strategie** waarmee je het probleem te lijf gaat. Het is van groot belang om voordat je begint te programmeren de strategie helder voor ogen te hebben. Een blokschema helpt om ervoor te zorgen dat je bij het schrijven het overzicht niet verliest.

Stap 5

Bij het schrijven van het programma volg je nauwgezet het blokschema. Een ingewikkeld programma bestaat uit een aantal kleinere programma's die **procedures** worden genoemd. In een procedure wordt een deelopdracht uitgevoerd. Het voordeel van het werken met procedures is dat als het programma niet goed werkt iedere procedure afzonderlijk kan worden getest. Eenvoudige programma's, zoals de voorbeelden die in dit hoofdstuk worden behandeld, bestaan uit één procedure. Maar zodra programma's ingewikkelder worden met veel programmeerregels, is het werken met procedures noodzakelijk.

Stap 6

Als het programma klaar is moet je het eerst testen. Dit doe je door een opdracht uit te rekenen waarvan je de uitkomst al weet. Werkt het programma goed dan vind je ongeveer hetzelfde resultaat. Het resultaat dat de computer berekend komt nooit exact overeen met het juiste antwoord. Dit heeft verschillende oorzaken

- Hoewel de computer met nauwkeurige getallen van bijvoorbeeld 12 decimalen werkt wordt bij iedere berekening een afronding gemaakt. Een paar keer afronden is niet zo erg, maar als de computer bijvoorbeeld een miljoen keer afrondt wordt het eindantwoord minder nauwkeurig.

- Bij veel opdrachten wordt de tijd of de afstand opgedeeld in kleine stappen. De grootte van deze stappen moet je van tevoren kiezen. Hoe kleiner de stappen zijn, hoe nauwkeuriger de berekening wordt. Maar met kleine stappen zijn er wel veel berekeningen nodig, waardoor de berekening lang duurt en onnauwkeurige wordt vanwege het afronden.

Stap 7

Als het programma steeds het juiste antwoord geeft en je tevreden bent over de nauwkeurigheid van het resultaat weet je dat het programma goed werkt en kun je problemen gaan oplossen waarvan je de uitkomst niet weet.

18.2 Rechtlijnige beweging

Constante snelheid

Een voorwerp beweegt met een constante snelheid van 5,0 m/s in een rechte lijn. Hieronder vind je een computerprogramma waarmee deze beweging wordt gemodelleerd. Het programma heeft maar drie regels. In het programma is niet aangegeven wanneer de berekening moet stoppen. Hoe je dit moet programmeren leer je later.

	model	startwaarden in SI eenheden
1	dx = v*dt	v = 5
2	x = x + dx	x = 0
3	t = t + dt	t = 0
		dt = 0,01

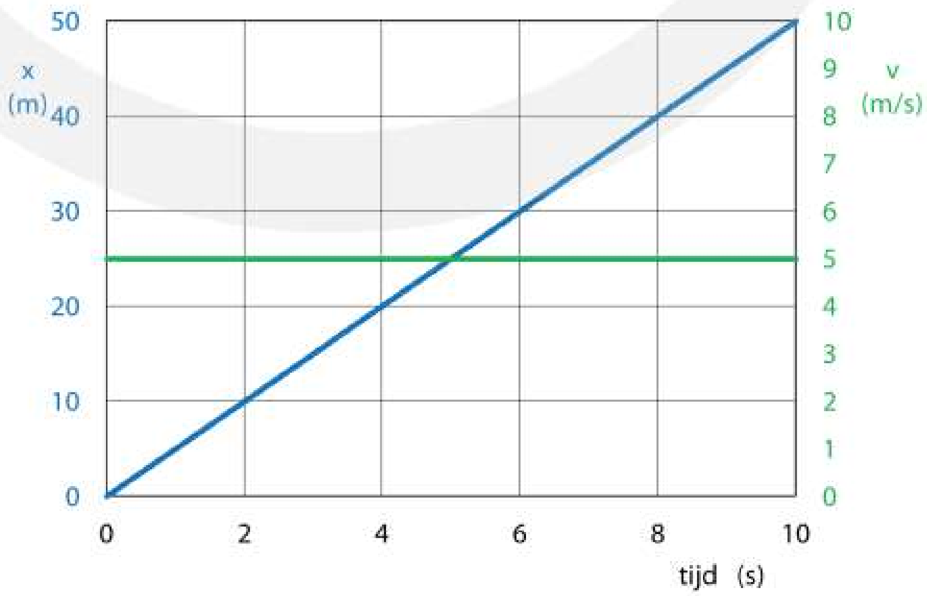
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

x = 0 m — de plaats waar de beweging begint
v = 5 m/s — de snelheid aan het begin (verandert niet)
t = 0 s — het tijdstip waarop de beweging begint
dt = 0,01 s — de grootte van de tijdstap

Model

1 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
2 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
3 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 1
Constante snelheid. Plaats (blauw) en snelheid (groen) uitgezet tegen te tijd. 1000 tijdstappen.

Constante versnelling

Een voorwerp versnelt vanuit stilstand met een constante versnelling van 2,0 m/s^2. Luchtweerstand wordt verwaarloosd.

model		startwaarden in SI eenheden
1	dv = a*dt	a = 2,0
2	v = v + dv	v = 0,0
3	dx = v*dt	x = 0,0
4	x = x + dx	t = 0,0
5	t = t + dt	dt = 0,01

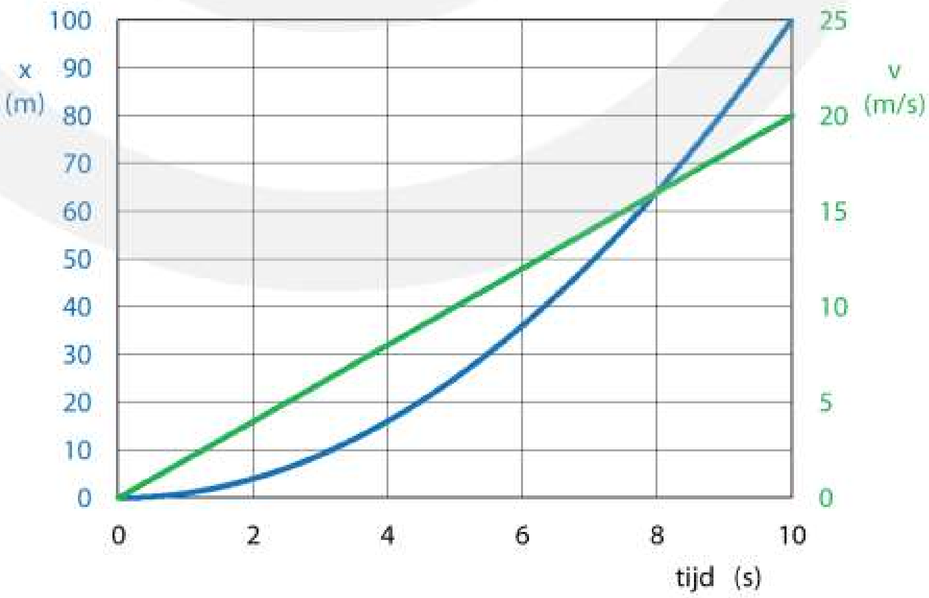
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

a = 2 m/s^2 de versnelling aan het begin (verandert niet)
v = 0 m/s de snelheid aan het begin
x = 0 m de plaats waar de beweging begint
t = 0 s het tijdstip waarop de beweging begint
dt = 0,01 s de grootte van de tijdstap

Model

1 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
2 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
3 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
4 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
5 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 2
Constante versnelling. Plaats (blauw) en snelheid (groen) uitgezet tegen te tijd. 1000 tijdstappen.

Vrije val (zonder luchtweerstand)

Een voorwerp met een massa van 0,35 kg valt vanuit stilstand vanaf 100 meter hoogte. Luchtweerstand wordt verwaarloosd. Omdat we later een val mét luchtweerstand gaan berekenen maken gebruiken we $F_{res} = m \cdot a$ met als F_{res} de zwaartekracht.

model		startwaarden in SI eenheden
1	Fres = m*g	m = 0,35
2	a = Fres / m	g = −9,81
3	dv = a*dt	v = 0
4	v = v + dv	x = 100
5	dx = v*dt	t = 0
6	x = x + dx	dt = 0,005
7	t = t + dt	

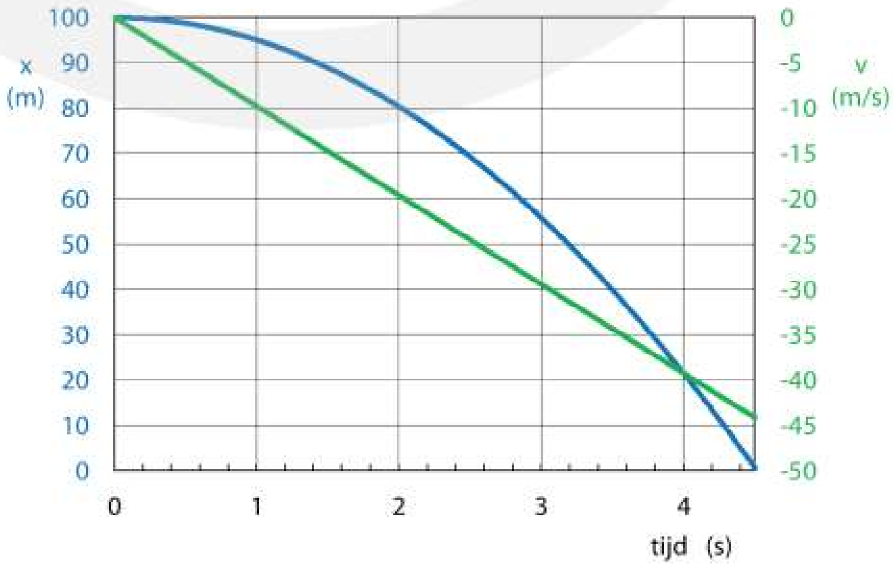
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

m = 0,35 kg	de massa (bij deze berekening niet nodig)
g = −9,81 m/s^2	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
v = 0 m/s	de snelheid aan het begin
x = 100 m	de plaats waar de beweging begint
t = 0 s	het tijdstip waarop de beweging begint
dt = 0,005 s	de grootte van de tijdstap

Model

1 de resulterende kracht is gelijk aan de zwaartekracht
2 de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
3 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
4 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
5 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
6 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
7 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 3
Vrije val. Plaats (blauw) en snelheid (groen) uitgezet tegen te tijd.

Vallen met luchtweerstand

Bij een val mét luchtweerstand neemt de versnelling in de loop van de tijd af. Uiteindelijk wordt de versnelling nul en krijgt het voorwerp een constante snelheid. De luchtweerstand oefent een kracht uit die toeneemt met het kwadraat van de snelheid.

Voor de luchtweerstand geldt: $F_W = k \cdot v^2$ met $k = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$

- c_w is de luchtweerstandscoëfficiënt (geen eenheid)
- ρ is de dichtheid van lucht in kg/m^3
- A is de frontale oppervlakte van het voorwerp in m^2
- v is de snelheid van het voorwerp in m/s
- k $k = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$ (de eenheid van k is kg/m)

model		startwaarden in SI eenheden
1	k = 0,5*cw*rho*A	cw = 0,5
2	Fres = m*g + k*v^2	rho = 1,293
3	a = Fres / m	A = 10
4	dv = a*dt	m = 75
5	v = v + dv	g = −9,81
6	dx = v*dt	v = 0
7	x = x + dx	x = 100
8	t = t + dt	t = 0
		dt = 0,01

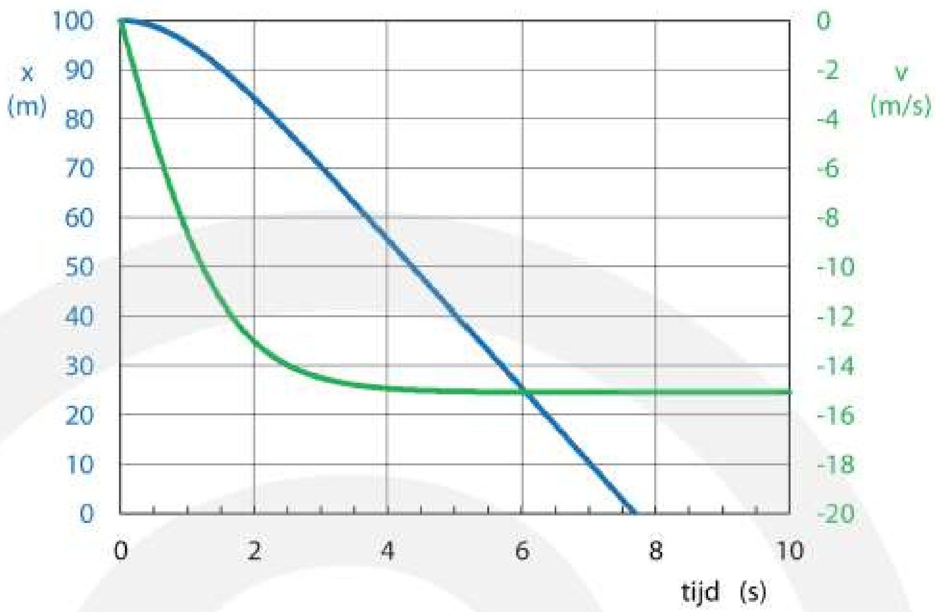
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

cw = 0,5 — de luchtweerstandscoëfficiënt brengt de vorm in rekening
rho = 1,293 kg/m^3 — de dichtheid van lucht bij het aardoppervlak
A = 10 m^2 — de frontale oppervlakte loodrecht op de bewegingsrichting
m = 75 kg — de massa is bij deze berekening wél nodig
g = −9,81 m/s^2 — de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
v = 0 m/s — de snelheid aan het begin
x = 100 m — de plaats waar de beweging begint
t = 0 s — het tijdstip waarop de beweging begint
dt = 0,01 s — de grootte van de tijdstap

Model

1 bereken k
2 F_{res} is de zwaartekracht plus de luchtweerstand (F_Z heeft minteken en F_W niet)
3 de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
4 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
5 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
6 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
7 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
8 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd



Figuur 4
Val met lucht-weerstand.

Parachute met snelle ontvouwing

Een parachutist met en massa (inclusief parachute) van 80 kg springt op een hoogte van 2000 meter uit een vliegtuig. Luchtweerstand wordt niet verwaarloosd. We kiezen $k_{dicht} = 0{,}30$ kg/m (parachute is dicht) en $k_{open} = 30$ kg/m (parachute is open). Op x = 400 m gaat de parachute open. De berekening stopt als de grond is bereikt.

Het programma moet een test uitvoeren op de waarde van x:
– als x > 400 dan is de parachute dicht en heeft k de waarde k_{dicht}
– als x < 400 dan is de parachute open en heeft k de waarde k_{open}

model		startwaarden in SI eenheden
1	Als x > 400 Dan k = kd Anders k = ko EindAls	kd = 0,30
2	Fres = m*g + k*v^2	ko = 30
3	a = Fres / m	m = 80
4	dv = a*dt	g = −9,81
5	v = v + dv	v = 0
6	dx = v*dt	x = 2000
7	x = x + dx	t = 0
8	t = t + dt	dt = 0,05
9	Als x < 0 Dan Stop EindAls	

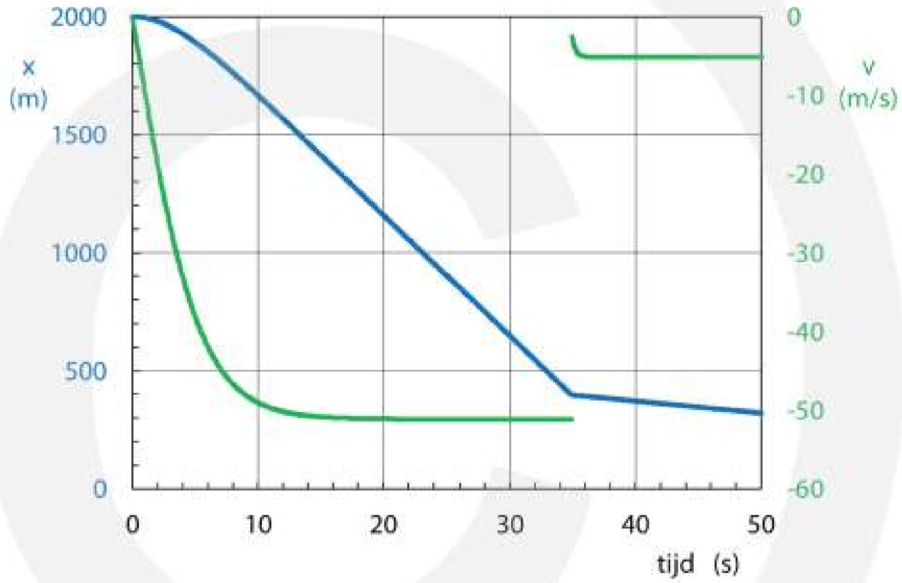
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

kd = 0,30 kg/m	de waarde van k als de parachute dicht is
ko = 30 kg/m	de waarde van k als de parachute open is
m = 80 kg	de massa
g = −9,81 m/s^2	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
v = 0 m/s	de snelheid aan het begin
x = 2000 m	de plaats waar de beweging begint
t = 0 s	het tijdstip waarop de beweging begint
dt = 0,05 s	de grootte van de tijdstap

Model

1 keuze tussen kd of ko is afhankelijk van de hoogte, x > 400 WAAR of NIET WAAR
2 F_{res} is de zwaartekracht plus de luchtweerstand (F_z heeft minteken en F_w niet)
3 de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
4 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
5 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
6 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
7 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
8 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
9 de berekening stopt als x < 0



Figuur 5
Parachute met snelle ontvouwing.

Parachute met langzame ontvouwing

Een parachutist met een massa (inclusief parachute) van 80 kg springt op een hoogte van 2000 meter uit een vliegtuig. Luchtweerstand wordt niet verwaarloosd. We kiezen $k_{dicht} = 0{,}30$ kg/m (parachute is dicht) en $k_{open} = 30$ kg/m (parachute is open). Op een hoogte van 600 m begint de parachute open te gaan en op 400 m is hij volledig open. Tussen 600 en 400 m is de waarde van k lineair afhankelijk van de hoogte.

Het programma moet een test uitvoeren op de waarde van x:
- als x > 600 dan is de parachute dicht en heeft k de waarde k_{dicht}
- als x < 400 dan is de parachute open en heeft k de waarde k_{open}
- tussen x = 400 en x = 600 moet k worden berekend met

$$k = \left(\frac{k_{open} - k_{dicht}}{600 - 400}\right)(600 - x) + k_{dicht}$$

model		startwaarden in SI eenheden
1	Als x > 600 Dan k = kd EindAls	kd = 0,30
2	Als x < 400 Dan k = ko EindAls	ko = 30
3	Als (x < 600) En (x > 400) Dan k = {(ko−kd) / (600−400)}*(600−x) + kd EindAls	m = 80
4	Fres = m*g + k*v^2	g = −9,81
5	a = Fres / m	v = 0
6	dv = a*dt	x = 2000
7	v = v + dv	t = 0
8	dx = v*dt	dt = 0,1
9	x = x + dx	
10	t = t + dt	
11	Als x < 0 Dan Stop EindAls	

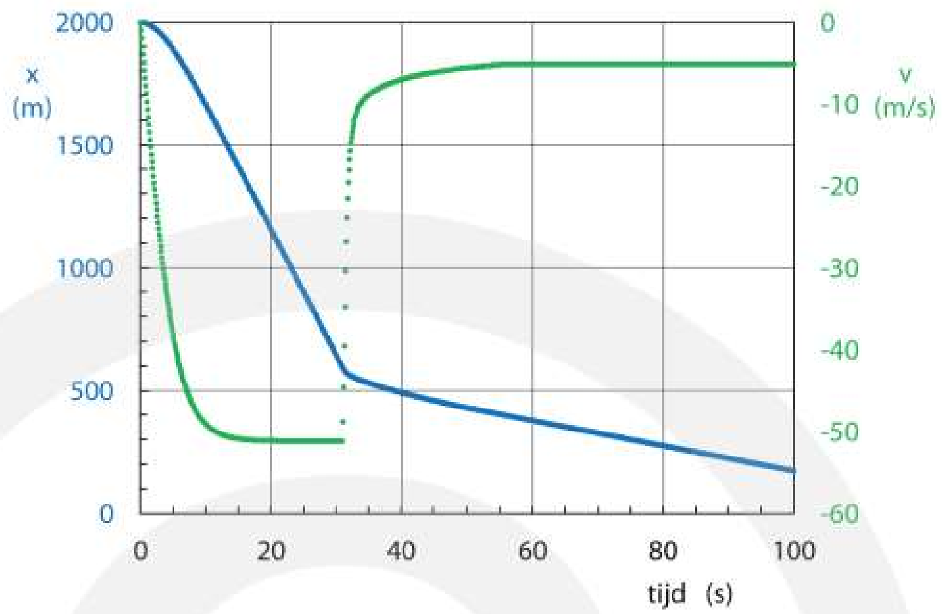
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

kd = 0,30 kg/m de waarde van k als de parachute dicht is
ko = 30 kg/m de waarde van k als de parachute open is
m = 80 kg de massa
g = −9,81 m/s^2 de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
v = 0 m/s de snelheid aan het begin
x = 2000 m de plaats waar de beweging begint
t = 0 s het tijdstip waarop de beweging begint
dt = 0,05 s de grootte van de tijdstap

Model

1 keuze voor kd als x > 600 is WAAR
2 keuze voor ko als x < 400 is WAAR
3 als de waarde van x tussen 400 en 600 meter is wordt k berekend
4 F_{res} is de zwaartekracht plus de luchtweerstand (F_Z heeft minteken en F_W niet)
5 de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
6 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
7 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
8 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
9 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
10 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
11 de berekening stopt als x < 0



Figuur 6
Parachute met langzame ontvouwing.

Een vuurpijl met constant vermogen

Een vuurpijl wordt verticaal omhoog afgeschoten. De vuurpijl weegt in totaal 300 gram en bevat in het begin 100 gram kruit. Per seconde wordt 40 gram kruit verbrand, waardoor het voortstuwend vermogen 100 watt is. De vuurpijl heeft een luchtweerstandscoëfficiënt van 0,5 en een frontaal oppervlakte van 10 cm^2. Voor de luchtweerstand geldt: $F_w = k \cdot v^2$ met $k = ½ \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$. De stuwkracht volgt uit $F_{stuw} = P / v$. Vandaar de beginsnelheid niet gelijk mag zijn aan nul, want anders deel je door nul. Kies voor de beginsnelheid een kleine waarde, bijvoorbeeld v = 1 m/s. Als je een andere waarde voor v kiest, bijvoorbeeld v = 5 m/s heeft dat nauwelijks invloed op de berekening.

	model	startwaarden in SI eenheden
1	Als mk > 0 Dan mk = mk − dmk*dt Anders mk = 0 EindAls	ml = 0,2
2	Als mk > 0 Dan Fstuw = P/v Anders Fstuw = 0 EindAls	mk = 0,1
3	k = 0,5*cw*rho*A	dmk = 0,04
4	Als v > 0 Dan Fres = (ml+mk)*g − k*v^2 + Fstuw Anders Fres = (ml+mk)*g + k*v^2 + Fstuw EindAls	P = 100
5	a = Fres / (ml+mk)	cw = 0,5
6	dv = a*dt	rho = 1,293
7	v = v + dv	A = 0,001
8	dx = v*dt	g = −9,81
9	x = x + dx	v = 1
10	t = t + dt	x = 0
11	Als x < 0 Dan Stop EindAls	t = 0
		dt = 0,01

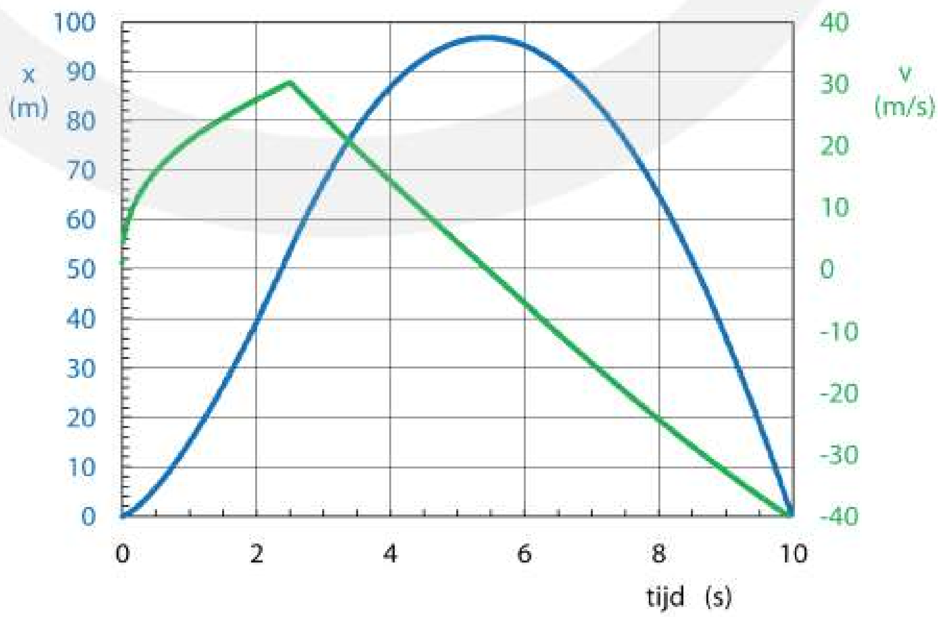
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

ml = 0,2 kg	de massa van de vuurpijl zonder kruit
mk = 0,1 kg	de massa van het kruit aan het begin
dmk = 0,04 kg	de massa van het kruit dat per seconde wordt verbruikt
P = 100 W	het vermogen zolang er kruit is
cw = 0,5	de luchtweerstandscoëfficiënt
rho = 1,293 kg/m^3	de dichtheid van lucht bij het aardoppervlak
A = 0,001 m^2	het frontale oppervlakte
g = −9,81 m/s^2	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
v = 1 m/s	de beginsnelheid niet nul vanwege $F_{stuw} = P/v$
x = 0 m	de plaats waar de beweging begint
t = 0 s	het tijdstop waarop de beweging begint
dt = 0,01 s	de grootte van de tijdstap

Model

1 de massa van het kruit wordt berekend en mag niet kleiner zijn dan nul
2 zolang er kruit is is er stuwvermogen
3 k van de luchtwrijving wordt berekend
4 als v > 0 (beweging omhoog) is F_w omlaag gericht en als v < 0 (beweging omlaag) is F_w omhoog gericht *(het teken van F_w is altijd tegengesteld aan het teken van v)*
5 de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
6 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
7 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
8 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
9 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
10 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
11 de berekening stopt als x < 0



Figuur 7
Vuurpijl met constant vermogen.

Stuiterbal

Een stuiterbal wordt vanaf een hoogte losgelaten en stuitert op de vloer ophoog. Bij de stuit verliest de stuiterbal een gedeelte van zijn energie. Hij komt dus steeds minder hoog. Hiervan gaan we een model maken. Daarbij verwaarlozen we de luchtweerstand.

model		startwaarden in SI eenheden
1	Eh = m*9,81*h	f = 0,8
2	Ek = 0,5*m*v^2	m = 0,020
3	Als x < 0 Dan v = (2*f*Ek/m)^0,5 EindAls	a = -9,81
4	dv = a*dt	v = 0
5	v = v + dv	x = 5
6	dx = v*dt	t = 0
7	x = x + dx	dt = 0,001
8	t = t + dt	
9	Als t > 10 Dan Stop EindAls	

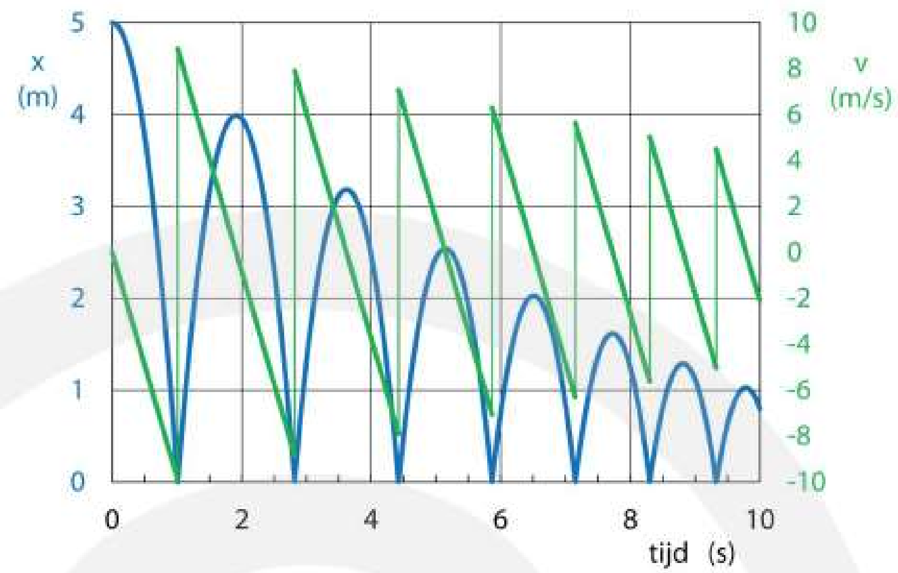
TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

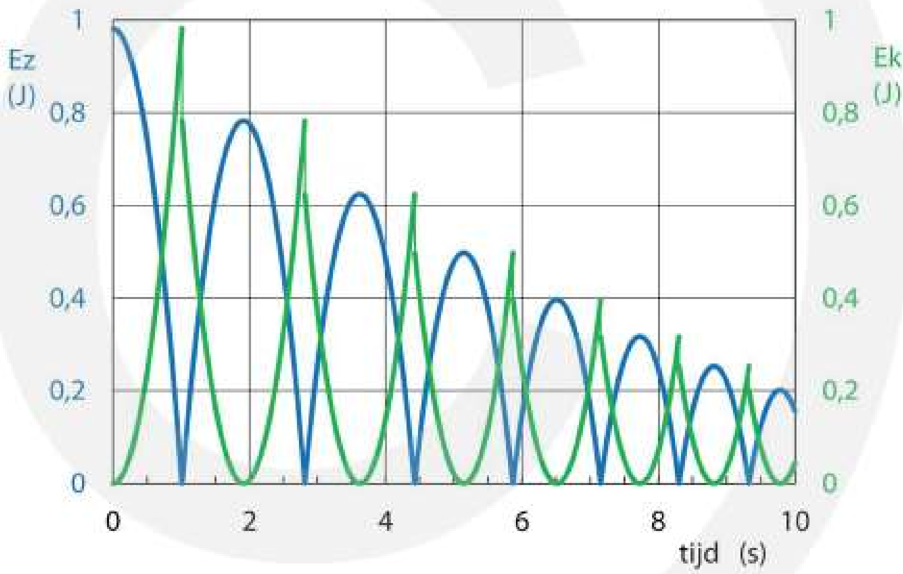
f = 0,8	factor waarmee de energie bij een stuit wordt vermenigvuldigd
m = 75 kg	de massa van de stuiterbal
a = −9,81 m/s^2	de valversnelling
v = 0 m/s	de snelheid waarmee de bal wordt losgelaten
x = 5 m	de hoogte waarop de bal wordt losgelaten
t = 0 s	het tijdstip waarop de beweging begint
dt = 0,001 s	de grootte van de tijdstap

Model

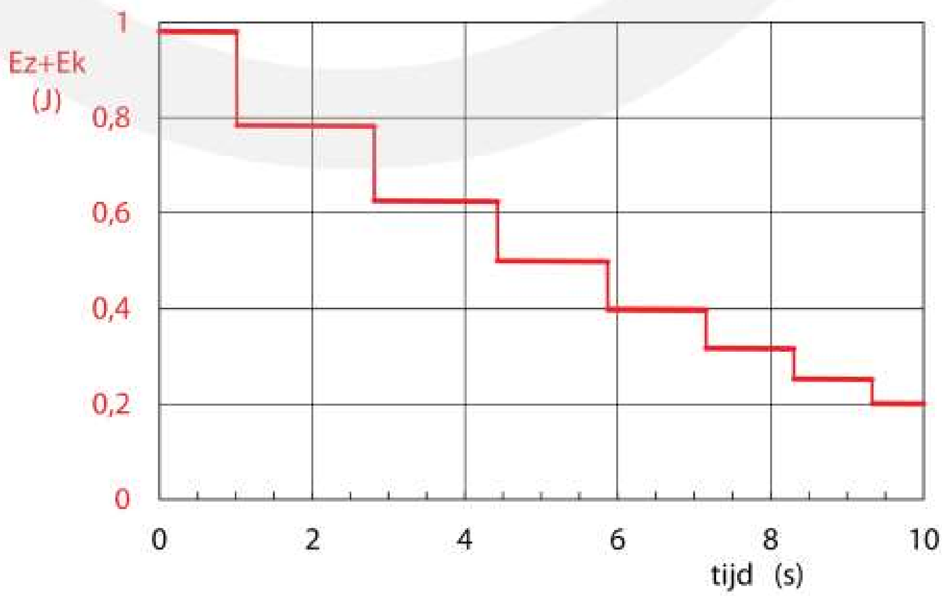
1 de zwaarte energie wordt uitgerekend
2 de kinetische energie wordt uitgerekend
3 Bij een stuit wordt E_k verminderd tot f·E_k
4 de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
5 nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
6 de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
7 nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
8 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
9 de berekening stopt na 10 seconden



Figuur 8
Stuiterbal plaats en snelheid.



Figuur 9
Stuiterbal zwaarte energie en kinetische energie.



Figuur 10
Stuiterbal totale energie (Ez + Ek).

18.3 Kromlijnige beweging

Een projectiel schuin omhoog zonder luchtweerstand

We schieten een projectiel schuin omhoog. De beweging heeft een horizontale en een verticale component. De horizontale component wordt aangegeven met x en de verticale component met y. De luchtweerstand wordt verwaarloosd. Omdat er geen wrijving is werkt alleen de zwaartekracht verticaal omlaag. Horizontaal werken er geen krachten. De beweging is een combinatie van een horizontale beweging met een constante snelheid en een verticale beweging met een constante versnelling.

	model	startwaarden in SI eenheden
	"beweging in de x-richting"	m = 2
1	dx = vx*dt	g = −9,81
2	x = x + dx	hoek = 30
	"beweging in de y-richting"	v0 = 300
3	FresY = m*g	vx = v0*Cos(hoek)
4	ay = FresY / m	vy = V0*Sin(hoek)
5	dvy = ay*dt	x = 0
6	vy = vy + dvy	y = 0
7	dy = vy*dt	t = 0
8	y = y + dy	dt = 0,01
9	t = t + dt	
10	Als y < 0 Dan Stop EindAls	

TOELICHTING

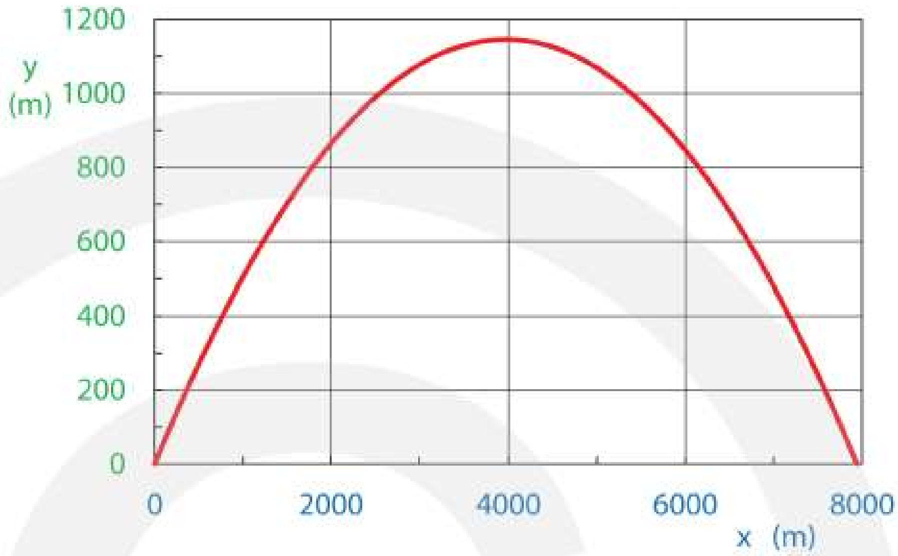
Startwaarden in SI eenheden

m = 2 kg	de massa
g = −9,81 m/s²	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
hoek = 30	de hoek waarmee het projectiel wordt weggeschoten in graden
v0 = 300 m/s	de beginsnelheid
vx = v0·cos(hoek)	de beginsnelheid in de x-richting
vy = v0·sin(hoek)	de beginsnelheid in de y-richting
x = 0	de beginplaats in de x-richting
y = 0	de beginplaats in de y-richting
t = 0 s	het tijdstop waarop de beweging begint
dt = 0,01 s	de grootte van de tijdstap

Model

1 x-richting | de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
2 x-richting | nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats
3 y-richting | F_{res} in de y-richting (FresY) is de zwaartekracht
4 y-richting | de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
5 y-richting | de verandering van de snelheid in één tijdstap wordt berekend
6 y-richting | nieuwe snelheid is oude snelheid plus de verandering van de snelheid
7 y-richting | de verandering van de plaats in één tijdstap wordt berekend
8 y-richting | nieuwe plaats is de oude plaats plus de verandering van de plaats

9 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
10 de berekening stopt als y < 0



Figuur 8
Projectiel zonder luchtweerstand.
(y, x)-diagram

Een projectiel schuin omhoog met luchtweerstand

We schieten een (bolvormig) projectiel schuin omhoog. Luchtweerstand wordt niet verwaarloosd. In de x-richting werkt alleen de wrijvingskracht. In de y-richting werkt de zwaartekracht plus de wrijvingskracht. De wrijvingskracht bereken je met $F_w = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$ met $v^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Net als in het voorgaande voorbeeld gaan we de beweging in de horizontale en in de verticale richting onafhankelijk van elkaar berekenen, met de tijd als verbindende factor. Hiervoor moeten we voor ieder tijdstip de horizontale en verticale component van de wrijvingskracht berekenen. Dat gaat als volgt.

De wrijvingskracht is op ieder tijdstip tegengesteld gericht aan de snelheid en de richting van de snelheid is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan. Zie figuur 9.

Er geldt:

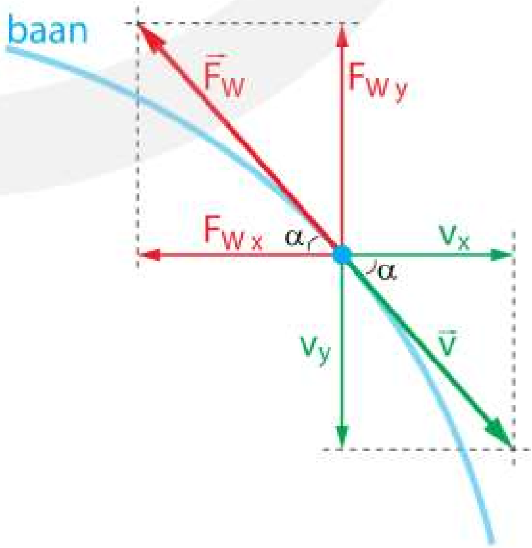
$F_{w\,x} = F_w \cdot \cos\alpha$ en $F_{w\,y} = F_w \cdot \sin\alpha$

Verder geldt:

$\cos\alpha = \dfrac{v_x}{v}$ en $\sin\alpha = \dfrac{v_y}{v}$

Hieruit volgt:

$F_{w\,x} = F_w \cdot \dfrac{v_x}{v}$ en $F_{w\,y} = F_w \cdot \dfrac{v_y}{v}$



Figuur 9 Berekening van de x- en de y-component van de wrijvingskracht.

model		startwaarden in SI eenheden
1	v = (vx^2 + vy^2)^0,5	cw = 1,0
2	Fw = 0,5*cw*rho*A*v^2	rho = 1,293
	"beweging in de x-richting"	A = 0,005
3	Fwx = Fw*(vx / v)	m = 2
4	FresX = −Fwx	g = −9,81
5	ax = FresX / m	hoek = 30
6	dvx = ax*dt	v0 = 300
7	vx = vx + dvx	vx = v0*Cos(hoek)
8	dx = vx*dt	vy = v0*Sin(hoek)
9	x = x + dx	x = 0
	"beweging in de y-richting"	y = 0
10	Fwy = Fw*(vy / v)	t = 0
11	FresY = m*g − Fwy	dt = 0,01
12	ay = FresY / m	
13	dvy = ay*dt	
14	vy = vy + dvy	
15	dy = vy*dt	
16	y = y + dy	
17	t = t + dt	
18	Als y < 0 Dan Stop EindAls	

TOELICHTING

Startwaarden in SI eenheden

cw = 1,0	de luchtweerstandscoëfficiënt
rho = 1,293 kg/m^3	de dichtheid van lucht bij het aardoppervlak
A = 0,005 m^2	het frontale oppervlakte
m = 2 kg	de massa
g = −9,81 m/s^2	de valversnelling heeft minteken, want is naar beneden gericht
hoek = 30	de hoek waarmee het projectiel wordt weggeschoten in graden
v0 = 300 m/s	de beginsnelheid
vx = v0·cos(hoek)	de beginsnelheid in de x-richting
vy = v0·sin(hoek)	de beginsnelheid in de y-richting
x = 0	de beginplaats in de x-richting
y = 0	de beginplaats in de y-richting
t = 0 s	het tijdstop waarop de beweging begint
dt = 0,02 s	de grootte van de tijdstap

Model

1 de waarde van v wordt uitgerekend $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

2 de waarde van F_w wordt uitgerekend

3 x-richting | de x-component van F_w wordt uitgerekend

4 x-richting | F_{res} in de x-richting (FresX) is de luchtweerstand
(het teken van F_Wx is tegengesteld aan het teken van v_x)

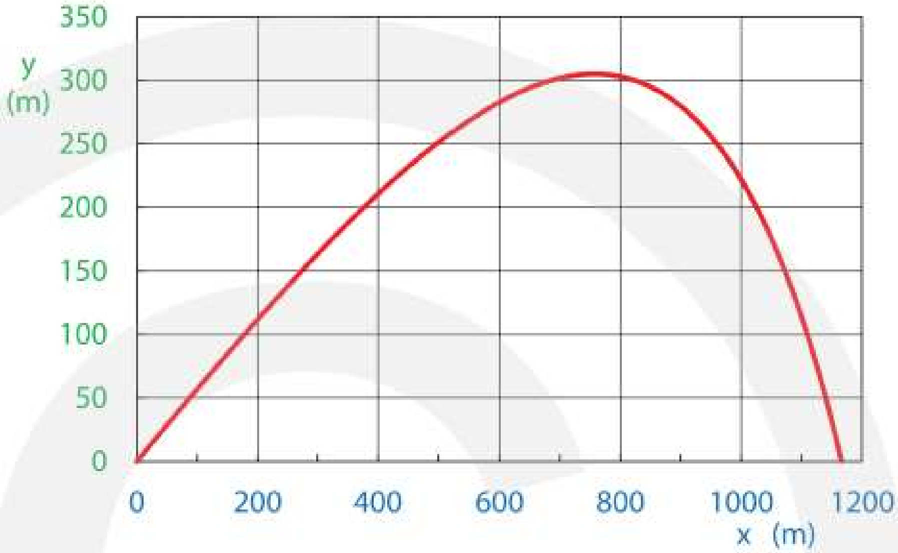
5 x-richting | de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$

6 – 9 x-richting | de plaats x wordt uitgerekend

10 y-richting | de y-component van F_w wordt uitgerekend

11 y-richting | F_{res} in de y-richting (FresY) is de zwaartekracht plus de luchtweerstand
(het teken van F_Wy is tegengesteld aan het teken van v_y)

12 y-richting | de versnelling volgt uit $F_{res} = m \cdot a$
13 – 16 y-richting | de plaats y wordt uitgerekend
17 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
18 de berekening stopt als $y < 0$



Figuur 10
Projectiel met luchtweerstand. (y, x)-diagram

Satellieten

Satellieten bewegen om de aarde in ellipsvormige banen. De gravitatiekracht zorgt ervoor dat zowel de richting als de grootte van de snelheid voortdurend verandert. Hiervan gaan we een model maken. Voor de gravitatiekracht geldt:

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

- F_G is de gravitatiekracht in newton (N)
- G is de gravitatieconstante $6{,}674 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²
- m is de massa van de satelliet in kilogram (kg)
- M is de massa van de aarde in kilogram (kg)
- r is de afstand tussen de zwaartepunten van de aarde en de satelliet (m)

We gaan een model maken voor het ruimtestation ISS die zich op 410 km boven het aardoppervlak bevindt. We zoeken op:

$m_{ISS} = 4{,}20 \cdot 10^5$ kg | $m_{aarde} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg | $r_{baan} = 6{,}371 \cdot 10^6 + 410 \cdot 10^3$ m

De ISS heeft een snelheid van $7{,}66 \cdot 10^3$ m/s. Dit gaan we als startwaarden in ons model invoeren.

De aarde bevindt zich in een brandpunt van de ellips. De gravitatiekracht op de ISS is gericht naar het middelpunt van de aarde. We gaan de beweging in de horizontale en in de verticale richting onafhankelijk van elkaar berekenen, met de tijd als verbindende factor. Hiervoor moeten we voor ieder tijdstip de horizontale en verticale component van de gravitatiekracht berekenen. Dat gaat als volgt.

Er geldt:

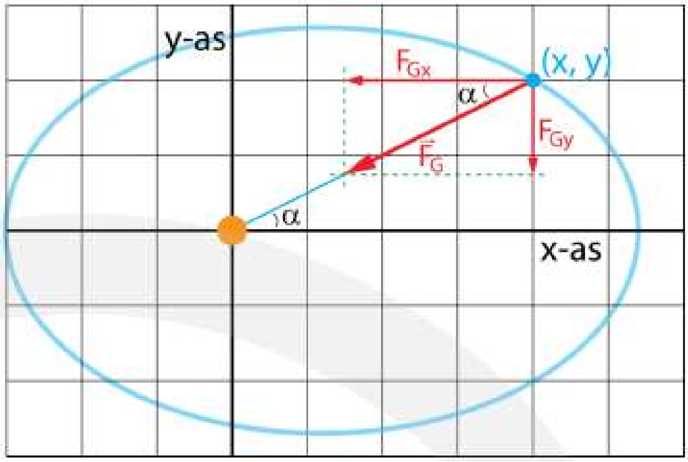
$F_{Gx} = F_G \cdot \cos\alpha$ | $F_{Gy} = F_G \cdot \sin\alpha$

Verder geldt:

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ | $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$

Hieruit volgt:

$F_{Gx} = F_G \cdot \dfrac{x}{r}$ | $F_{Gy} = F_G \cdot \dfrac{y}{r}$



Figuur 11 Berekening van de x- en de y component van de gravitatiekracht.

	model	startwaarden in SI eenheden
1	r = (x^2 + y^2)^0,5	$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$
2	Fg = G*m*M/r^2	$m = 4{,}2 \cdot 10^{5}$
	"beweging in de x-richting"	$M = 5{,}972 \cdot 10^{24}$
3	Fgx = Fg*(x / r)	
4	ax = (Fgx/m)	vx = 0
5	dvx = ax*dt	$vy = 7{,}66 \cdot 10^{3}$
6	vx = vx + dvx	$x = 6{,}781 \cdot 10^{6}$
7	dx = vx*dt	y = 0
8	x = x + dx	
	"beweging in de y-richting"	t = 0
9	Fgy = Fg*(y / r)	dt = 10
10	ay = (Fgy/m)	
11	dvy = ay*dt	
12	vy = vy + dvy	
13	dy = vy*dt	
14	y = y + dy	
15	t = t + dt	
16	Als t >1000 Dan Stop EindAls	

Model

1 de waarde van r wordt uitgerekend $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

2 de waarde van F_G wordt uitgerekend

3 x-richting | de x-component van F_G wordt uitgerekend

4 x-richting | de versnelling in de x-richting wordt uitgerekend, let op het minteken

5 – 8 x-richting | de plaats x wordt uitgerekend

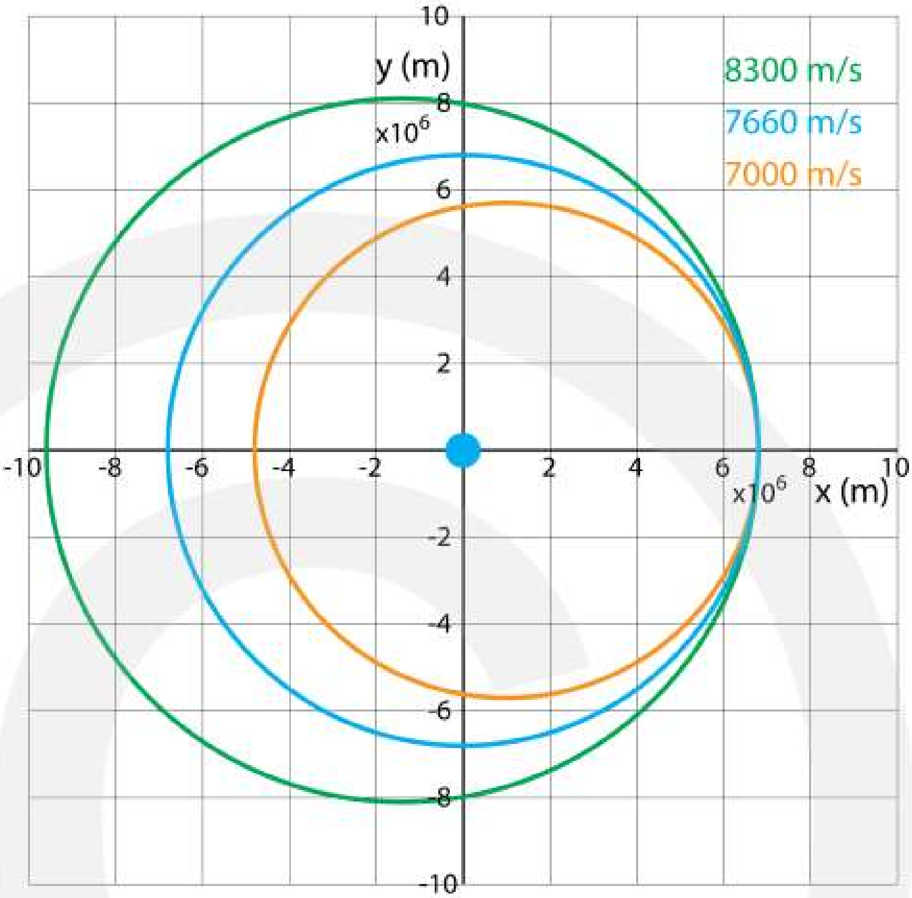
9 y-richting | de y-component van F_G wordt uitgerekend

10 y-richting | de versnelling in de y-richting wordt uitgerekend, let op het minteken

11 – 14 y-richting | de plaats y wordt uitgerekend

15 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd

16 de berekening wordt 1000 keer uitgevoerd



Figuur 12 Baan van de IIS met verschillende startwaarden van de snelheid. Bij 7660 m/s is de baan cirkelvormig.

OPMERKING

De straal van de aarde is $6{,}371 \cdot 10^6$ m. De oranje baan is dus onmogelijk, want dan stort de ISS op de aarde.

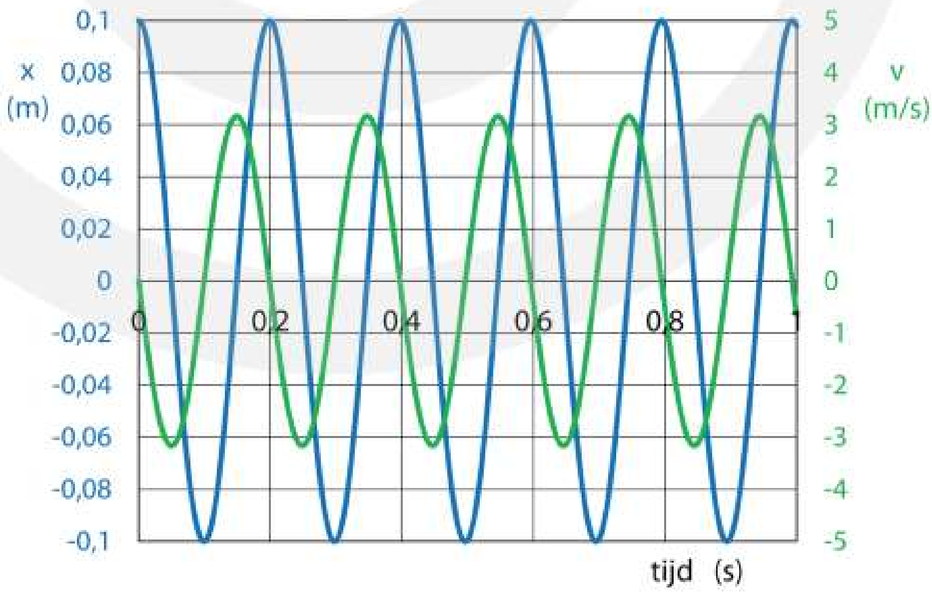
18.4 Trillingen

Harmonische trilling zonder demping

Voor een harmonische trilling is de resulterende kracht recht-evenredig met de uitwijking u: $\Sigma F = -C{\cdot}x$. Dit geeft sinusvormige (x, t)- , (v, t)- en (a, t)-grafieken.

model		startwaarden in SI eenheden
1	Fres = −C∗x	m = 0,1
2	a = Fres / m	C = 100
3	dv = a∗dt	v = 0
4	v = v + dv	x = 0,1
5	dx = v∗dt	t = 0
6	x = x + dx	dt = 0,0002
7	t = t + dt	
8	Als t >1 Dan Stop EindAls	

Model
1 de resulterende kracht wordt uitgerekend
2 de versnelling wordt uitgerekend
3 - 6 de plaats wordt uitgerekend (dit is de uitwijking)
7 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
8 de berekening wordt 1000 keer uitgevoerd



Figuur 13
Harmonische trilling zonder demping.

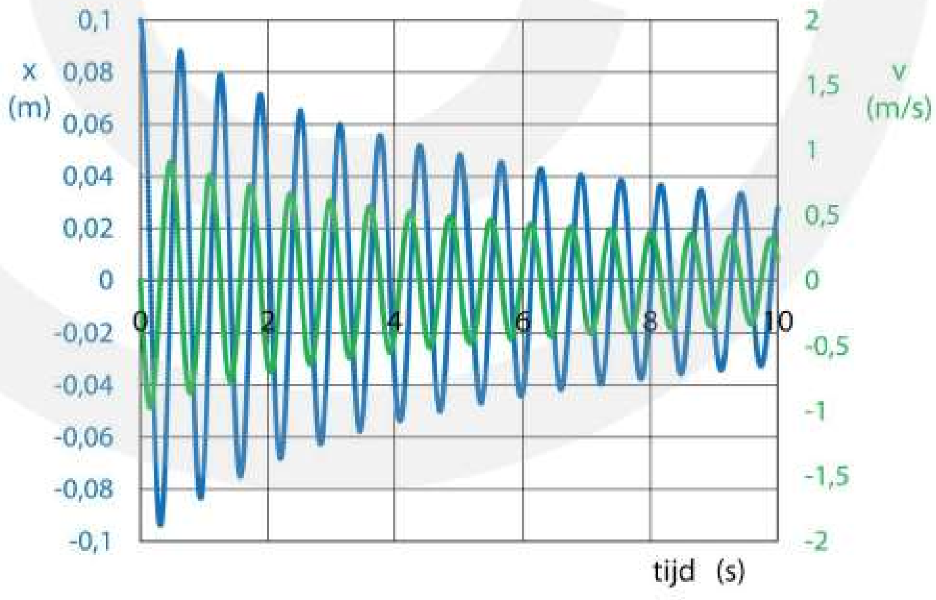
Harmonische trilling met demping

Voor een harmonische trilling is de resulterende kracht recht-evenredig met de uitwijking u: $F = -C \cdot x$. Voegen we luchtweerstand $F_W = k \cdot v^2$ toe dan wordt de trilling gedempt.

	model	startwaarden in SI eenheden
1	Als v > 0 Dan Fres = −C*x − k*v^2 Anders Fres = −C*x + k*v^2 EindAls	m = 0,1
2	a = Fres / m	C = 10
3	dv = a*dt	k = 0,05
4	v = v + dv	v = 0
5	du = v*dt	x = 0,1
6	x = x + dx	t = 0
7	t = t + dt	dt = 0,002
8	Als t >10 Dan Stop EindAls	

Model

1 de resulterende kracht wordt uitgerekend, F_W is tegengesteld gericht aan v
2 de versnelling wordt uitgerekend
3 - 6 de plaats wordt uitgerekend (dit is de uitwijking)
7 de nieuwe tijd is de oude tijd plus de verandering van de tijd
8 de berekening wordt 5000 keer uitgevoerd



Figuur 14
Harmonische trilling met demping.