15 Relativiteit

vwo

15.1 Relativiteit volgens Galileo Galilei

1* **a** Leg uit of deze vier beweringen alle vier tegelijkertijd waar kunnen zijn.
- eerste streepje: gezien vanuit Anna die vindt dat ze stilstaat → waar
- tweede streepje: gezien vanuit het referentiestelsel van Anna → waar
- derde streepje: gezien vanuit Bea die vindt dat ze stilstaat → waar
- vierde streepje: gezien vanuit het referentiestelsel van Bea → waar

2** **a** Bereken hoeveel procent deze afgeronde lichtsnelheid afwijkt van de werkelijke lichtsnelheid in vacuüm.
- werkelijke lichtsnelheid is 299.792.458 m/s
- $\dfrac{3{,}0\cdot10^8 - 299.792.458}{3{,}0\cdot10^8} = \dfrac{2{,}07542\cdot10^5}{3{,}0\cdot10^8} = 6{,}918\cdot10^{-4}$
- de afwijking is $6{,}918\cdot10^{-4}\cdot100\% = 6{,}9\cdot10^{-2}\%$

3*** **a** Beredeneer hoe de hoeken α en β aan elkaar zijn gerelateerd.
- HEEN: hoek in = hoek uit = i
- terwijl het licht heen en weer gaat draait de spiegel met hoek α
- TERUG: hoek in = hoek uit = i+α
- zowel hoek in als hoek uit neemt met α graden toe
- $\beta = 2\alpha$

b Bereken hoek β bij een lichtsnelheid van $3{,}0\cdot10^8$ m/s
- het licht legt 1000 meter af met v = $3{,}0\cdot10^8$ m/s
- $s = v_{gem}\cdot t \;\rightarrow\; 1000 = 3{,}0\cdot10^8\cdot t$
- $t = \dfrac{1000}{3{,}0\cdot10^8} = 3{,}333\cdot10^{-6}$ s
- $2{,}4\cdot10^4$ omwentelingen per minuut = 400 omwentelingen per seconde
- $400\cdot360 = 1{,}44\cdot10^5$ graden per seconde
- $t = 3{,}333\cdot10^{-6}$ s $\rightarrow$ $\alpha = 3{,}333\cdot10^{-6}\cdot1{,}44\cdot10^5 = 0{,}48$ graden
- $\beta = 2\alpha = 2\cdot0{,}48 = 0{,}96$ graden

4** **a** Leg uit waar de appel terecht komt:
- achter Bea's voeten, want Bea beweegt tijdens het vallen naar voren
- vóór Bea's voeten, want de appel beweegt tijdens het vallen naar voren
- op Bea's voeten

- in het referentiestelsel van Bea staat Bea stil en valt de appel recht naar beneden op haar voeten
- in het referentiestelsel van Anna op de grond beweegt tijdens het vallen zowel de trein als de appel over een afstand s
- ook volgens Anna valt de appel op Bea's voeten

b Volgens Bea beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
- in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
- in een kromme baan met een constante snelheid
- in een kromme baan met een constante versnelling
- anders, namelijk

- in het referentiestelsel van Bea staat Bea stil
- volgens Bea valt de appel recht naar beneden
- door de zwaartekracht heeft de appel een constante versnelling
- de bewering achter het tweede streepje is correct

c Volgens Anna beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
- in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
- in een kromme baan met een constante snelheid
- in een kromme baan met een constante versnelling
- anders, namelijk

- in het referentiestelsel van Anna heeft Bea een constante snelheid
- volgens Anna heeft de appel een beginsnelheid gelijk aan die van de trein
- door de zwaartekracht heeft de appel een constante versnelling naar beneden
- volgens Anna beweegt de appel in een kromme baan met horizontaal een constante snelheid en verticaal een constante versnelling
- de bewering achter het vijfde streepje is correct

d Zijn Anna en Bea het eens over de aard van de beweging?
- volgens Bea beweegt de appel in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
- volgens Anna beweegt de appel met een parabolische baan met horizontaal een constante snelheid en verticaal een constante versnelling
- Anna en Bea zijn het niet eens over de aard van de beweging

5** **a** Leg uit waar de appel terecht komt:
- achter Bea's voeten, want Bea beweegt tijdens het vallen naar voren
- vóór Bea's voeten, want tijdens het vallen remt Bea af
- op Bea's voeten

- op het moment van loslaten krijgt de appel een beginsnelheid in de rijrichting

- tijdens het vallen behoudt de appel deze snelheid
- tijdens het vallen neemt de snelheid van de trein af
- de appel valt vóór Bea's voeten, want tijdens het vallen remt Bea af

b Volgens Bea beweegt de appel:
- – in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
- – in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
- – in een kromme baan met een constante snelheid
- – in een kromme baan met een constante versnelling
- – anders, namelijk

- in het referentiestelsel van Bea staat Bea stil en werkt er een kracht naar voren
- volgens Bea wordt de appel naar voren versnelt door deze kracht
- door de zwaartekracht heeft de appel een constante versnelling naar beneden
- de appel wordt zowel naar voren als naar beneden versneld
- het vierde streepje is correct

c Volgens Anna beweegt de appel:
- – in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
- – in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
- – in een kromme baan met een constante snelheid
- – in een kromme baan met een constante versnelling
- – anders, namelijk

- in het referentiestelsel van Anna heeft Bea een constante vertraging
- volgens Anna heeft de appel een beginsnelheid gelijk aan die van de trein op het moment van loslaten
- door de zwaartekracht heeft de appel een constante versnelling naar beneden
- volgens Anna beweegt de appel in een kromme baan met horizontaal een constante snelheid en verticaal een constante versnelling naar beneden
- het vijfde streepje is correct

d Zijn Anna en Bea het eens over de aard van de beweging?
- volgens Bea heeft de appel een horizontale versnelling en een versnelling naar beneden
- volgens Anna beweegt de appel met een parabolische baan met horizontaal een constante snelheid en verticaal een constante versnelling
- Anna en Bea zijn het niet eens over de aard van de beweging

6*** **a** Leg uit waar de appel volgens Bea terecht komt:
- – achter Anna's voeten
- – vóór Anna's voeten
- – op Anna's voeten

- Anna ziet de appel naar beneden vallen op haar voeten
- Bea ziet dezelfde gebeurtenis
- ook voor Bea valt de appel op Anna's voeten

b Volgens Bea beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
- in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
- in een kromme baan met een constante snelheid
- in een kromme baan met een constante versnelling
- anders, namelijk

- volgens Bea hebben Anna en de appel een constante versnelling naar voren
- als de appel valt heeft hij ook een constante versnelling naar beneden
- de appel wordt zowel naar voren als naar beneden versneld
- het vierde streepje is correct

c Volgens Anna beweegt de appel:
- in een rechte lijn met een constante snelheid naar beneden
- in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
- in een kromme baan met een constante snelheid
- in een kromme baan met een constante versnelling
- anders, namelijk

- door de zwaartekracht versnelt de appel naar beneden
- het tweede streepje is correct

d Zijn Anna en Bea het eens over de aard van de beweging?
- volgens Bea heeft de appel een versnelling naar voren en een versnelling naar beneden
- volgens Anna beweegt de appel in een rechte lijn met een constante versnelling naar beneden
- Anna en Bea zijn het niet eens over de aard van de beweging

7* **a** Leg uit wat het verschil is tussen deze twee soorten stelsels.
- een inertiaal referentiestelsel beweegt met en constante snelheid in een rechte lijn
- een niet-inertiaal referentiestelsel heeft een versnelling of vertraging, of beweegt in een kromme baan

8* **a** Beschrijf deze postulaten in je eigen woorden.
- POSTULAAT 1
  - inertiaal referentiestelsels zijn natuurkundig aan elkaar gelijk
  - bij inertiaal referentiestelsels geven alle natuurkundige waarnemingen hetzelfde resultaat
- POSTULAAT 2
  - de lichtsnelheid in vacuüm heeft voor iedere waarnemer dezelfde waarde
  - het meten van de lichtsnelheid in vacuüm geeft geen informatie over de snelheid van de waarnemer of de snelheid van de lichtbron

9[**] **a** Zijn de drie wetten van Newton hiermee in overeenstemming?

- $\Sigma F = 0 \quad \leftrightarrow \quad a = 0$
  - is er geen versnelling dan is er ook geen resulterende kracht
  - de snelheid van het inertiaal referentiestelsel heeft geen invloed op de aanwezige krachten
- $\Sigma F = m \cdot a$
  - de versnelling van een voorwerp is onafhankelijk van de snelheid van het referentiestelsel
  - in ieder inertiaal referentiestelsel zijn de krachten op een voorwerp aan elkaar gelijk
- $F_{A \to B} = -F_{B \to A}$
  - de snelheid van het inertiaal referentiestelsel heeft geen invloed op de aanwezige krachten
- er is overeenstemming tussen het relativiteitsprincipe van Galileo en de wetten van Newton

b Bedenk een onrealistische gebeurtenis dat hiervan een consequentie zou zijn.
- als je iets in een vliegtuig laat vallen zou het met 1000 km/h naar achteren vliegen
- de aarde beweegt met 100.000 km/h om de zon → als je iets laat vallen vliegt het met 100.000 km/h van je vandaan

10[***] **a** Wat is de snelheid van schip A bezien vanuit schip B?
- iedere seconde neemt de afstand tussen A en B met 2 meter toe
- gezien vanuit B heeft schip A een constante snelheid van 2 m/s naar het Zuiden

b Wat is de snelheid van schip B bezien vanuit schip A?
- iedere seconde neemt de afstand tussen A en B met 2 meter toe
- gezien vanuit A heeft schip B een constante snelheid van 2 m/s naar het Noorden

c Hoe kan de stuurman van schip A weten dat hij met 3 m/s vaart?
- door zijn snelheid te meten ten opzichte van een vast punt op aarde zoals een vuurtoren
- door zijn snelheid te meten ten opzichte van het water en er van uitgaan dat het water stilstaat
- door zijn snelheid te meten ten opzichte van het water en daarna rekening houden met de stroomsnelheid van het water

d Kan de kapitein hierin gelijk hebben?
- dat kan omdat ze het niet eens hoeven te zijn over de snelheid van het referentiepunt, zoals de vuurtoren of het water

e Kan de matroos hierin gelijk hebben?
- dat kan omdat ze het niet eens hoeven te zijn over de snelheid van het referentiepunt, zoals de vuurtoren of het water

f Wat is de snelheid van de albatros volgens de bemanning van schip B.
- de snelheid van B ten opzichte van A is: $v_{AB} = 2$ m/s
- $v_B = v_A - v_{AB}$
- geef een snelheid naar het Zuiden een negatief teken
- $v_B = -12 - 2 = -14\ m/s$
- volgens B heeft de albatros een snelheid van 14 m/s naar het Zuiden

g Bereken de kinetische energie van de albatros volgens de bemanningen op de schepen A en B.
- $E_K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad$ met $\quad m = 3{,}0\ kg$
- schip A: $\quad E_K = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12^2 = 216\ J$
- schip B: $\quad E_K = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 14^2 = 294\ J$

h Hoeveel kinetische energie heeft de albatros in het echt?
- de waargenomen snelheid is afhankelijk van het gekozen referentiestelsel
- er bestaat geen objectieve "echte" snelheid
- deze vraag heeft geen antwoord

11** **a** Hoe snel gaan deze fotonen ten opzichte van elkaar volgens Newton.
- volgens Newton moeten de snelheden bij elkaar worden opgeteld
- volgens Newton hebben de fotonen een snelheid van $6{,}0 \cdot 10^8$ m/s ten opzichte van elkaar

b Hoe snel gaan deze fotonen ten opzichte van elkaar volgens Einstein.
- volgens Einstein is de lichtsnelheid voor iedere waarnemer hetzelfde
- volgens Einstein hebben de fotonen een snelheid van $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s ten opzichte van elkaar

Meten van de lichtsnelheid door Fizeau (aangepast)

3p **a** Bereken die afstand.
- de spiegel S wordt gedraaid over een hoek van 0,10°
- de gereflecteerde lichtbundel wordt teruggekaatst onder een hoek van $2 \cdot 0{,}10 = 0{,}20\ ^\circ$ 1
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{overstaand}}{\text{aanliggend}} \quad$ met $\quad s = \text{overstaand}$ 1
- $s = 8{,}633 \cdot 10^3 \cdot \tan 0{,}20 \quad \rightarrow \quad s = 30{,}135 = 30\ m$ 1

4p **b** Leid deze formule af.
- tijd waarin het licht heen en weer gaat: $t = \dfrac{2d}{c}$ 1
- tijd waarin het tandwiel één tand (of één opening) verder draait: $t = \dfrac{T}{2N}$ 1

- tijden zijn gelijk aan elkaar: $\frac{2d}{c} = \frac{T}{2N} \rightarrow cT = 4Nd$ 1
- $c = \frac{4Nd}{T}$ 1

3p **c** Bereken hoeveel procent de lichtsnelheid die Fizeau zo gemeten heeft, afwijkt van de waarde in Binas.

- $T = \frac{1}{f} \rightarrow T = \frac{1}{12{,}6} = 7{,}9365 \cdot 10^{-2}$ s 1
- $c = \frac{4Nd}{T} \rightarrow c = \frac{4 \cdot 720 \cdot 8{,}633 \cdot 10^{3}}{7{,}9365 \cdot 10^{-2}}$ 1
- $c = 3{,}13275 \cdot 10^{8}$ m/s
- afwijking: $\frac{c}{c_{Binas}} = \frac{3{,}13275 \cdot 10^{8} - 2{,}99792458 \cdot 10^{8}}{2{,}99792458 \cdot 10^{8}} \cdot 100\% = 44{,}97 = 45\%$ 1

15.2 Tijdrek, gelijktijdigheid en lengtekrimp

1[**] **a** Wat is de snelheid van dit stelsel?

- $\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$ met $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
- $\gamma = 2 \rightarrow 2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 4 = \dfrac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$
- $1-\dfrac{v^2}{c^2} = 0{,}25 \rightarrow \dfrac{v^2}{c^2} = 0{,}75 \rightarrow v^2 = 0{,}75 \cdot c^2 \rightarrow v = 0{,}866 \cdot c$

b Wat is de snelheid van dit stelsel?

- $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 10 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 100 = \dfrac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$
- $1-\dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{v^2}{c^2} = 1-0{,}01 = 0{,}99$
- $v^2 = \mathbf{0{,}99 \cdot c^2} \rightarrow v = \sqrt{0{,}99} \cdot \mathbf{c} \rightarrow v = \mathbf{0{,}995 \cdot c}$

2[***] **a** Hoeveel jaar duurt de reis volgens Anna?

- $s = 4{,}0 \cdot 10^{16}\ m \ \ | \ \ v_{gem} = 0{,}5 \cdot c = 1{,}5 \cdot 10^8\ m/s \ \ | \ \ t = \ldots s$
- $s = v_{gem} \cdot t \rightarrow 4{,}0 \cdot 10^{16} = 1{,}5 \cdot 10^8 \cdot t \rightarrow t = 2{,}66666 \cdot 10^8\ s$
- een jaar heeft $\mathbf{365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}15576 \cdot 10^7\ s}$
- $t = \dfrac{2{,}66666 \cdot 10^8}{3{,}15576 \cdot 10^7} = 8{,}45016 = 8{,}45$ jaar

b Hoeveel jaar verschil is er tussen de tijd volgens Anna en de tijd van Bea?

- $v = 0{,}1 \cdot c \ \ | \ \ \gamma = \ldots$
- $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}5c)^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}25}} \rightarrow \gamma = 1{,}1547$
- $\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$
- vanuit het stelsel van Bea $\rightarrow \Delta t_e = \dfrac{\Delta t_b}{\gamma} \rightarrow \Delta t_e = \dfrac{2{,}66666 \cdot 10^8}{1{,}1547} = 2{,}3094 \cdot 10^8\ s$
- $t = \dfrac{2{,}3094 \cdot 10^9}{3{,}15576 \cdot 10^7} = 7{,}31805$ jaar
- het verschil is $8{,}45 - 7{,}318 = 1{,}13$ jaar

c Leg uit waarom niet.
- bewegen is relatief (een relatie tussen twee voorwerpen)
- het standpunt dat Anna stilstaat en Bea beweegt is gelijkwaardig met het standpunt dat Bea stilstaat en Anna beweegt
- als er een snelheidsverschil zou zijn is het niet meer gelijkwaardig

d Welke conclusie trekt Bea?
- de snelheid van de raket is 0,5·c maar de tijd is minder dan de tijd volgens Anna
- conclusie → de afstand tot de exoplaneet is voor Bea minder dan $4{,}00 \cdot 10^{16}$ m

e Wat is de afstand tot de exoplaneet volgens Bea?
- gezien vanuit Bea is er lengtekrimp
- $L_b = \frac{L_e}{\gamma} \rightarrow L_b = \frac{4{,}00 \cdot 10^{16}}{1{,}1547} = 3{,}4641 \cdot 10^{16} = 3{,}46 \cdot 10^{16}$ m

3*** **a** Ben je het met Anna eens?
- nee, want Anna houdt geen rekening met de tijdrek
- bij voldoende grote snelheid kan Bea de afstand in een mensenleven overbruggen

b Welke snelheid heeft Bea gebruikt in haar berekening?
- Bea gaat uit van een tijdrek met een factor 1000
- $\gamma = 1000 \quad | \quad v = \ldots \text{m/s}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1000 \rightarrow \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 10^6$
- $1-\frac{v^2}{c^2} = 10^{-6} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-10^{-6} = 9{,}99999 \cdot 10^{-1}$
- $v^2 = 9{,}99999 \cdot 10^{-1} \cdot c^2 \rightarrow v = \sqrt{9{,}99999 \cdot 10^{-1}} \cdot c \rightarrow v = 0{,}9999995 \cdot c$

c Is Anna gerustgesteld met de belofte dat ze een bericht ontvangt van Bea?
- nee want voor Anna duurt de reis van Bea 25.900 jaar en heeft het bericht ook 25.900 jaar nodig om naar de aarde te reizen
- Anna kan pas na 51.800 jaar bericht verwachten en dan leeft ze allang niet meer

4** **a** Leg uit hoe ze dit kunnen doen.
- op t_0 stuurt Anna een lichtpuls naar een spiegel bij Bea
- Bea registreert op haar klok het tijdstip waarop de lichtpuls aankomt en wordt teruggekaatst
- Anna registreert op haar klok het tijdstip t_1 waarop de lichtpuls bij haar terug is
- het tijdstip halverwege t_0 en t_1 is gelijktijdig met het tijdstip dat door Bea is geregistreerd

b Leg uit wat je bedoelt met "klokken exact gelijk zetten".
- twee klokken zijn gelijk als een gebeurtenis op beide klokken op hetzelfde tijdstip worden geregistreerd

c Wie belt er als eerste Anna of Bea, of bellen ze op hetzelfde moment?

- we weten niet of Anna stilstaat en Bea beweegt of andersom
- Anna staat stil en Bea beweegt is identiek met Anna beweegt en Bea staat stil
- op grond van deze symmetrie bellen ze elkaar op hetzelfde moment op

5*** **a** Leg uit waarom dit het geval is.

- in de tijd dat de voorste flits naar Bea beweegt, is Bea naar voren verplaatst
- Bea reist de voorste flits tegemoet
- in de tijd dat de achterste flits naar Bea beweegt, is Bea naar voren verplaatst
- Bea reist van de achterste flits weg
- de voorste flits komt eerder bij Bea aan dan de achterste flits

b Bereken het tijdsverschil tussen de aankomt van de twee lichtflitsen bij Bea volgens de klok van Anna.

- Bea en de voorste lichtflits komen iedere seconde 299.792.458 + 100 = 299.792.558 meter dichter bij elkaar
- 100 meter wordt afgelegd in: $\dfrac{100}{299.792.558} = 3{,}33563984 \cdot 10^{-7}$ s
- Bea en de achterste lichtflits komen iedere seconde 299.792.458 – 100 = 299.792.358 meter dichter bij elkaar
- 100 meter wordt afgelegd in: $\dfrac{100}{299.792.358} = 3{,}33564206 \cdot 10^{-7}$ s
- verschil: $3{,}33564206 \cdot 10^{-7} - 3{,}33563984 \cdot 10^{-7} = 2{,}22463 \cdot 10^{-13} = \mathbf{2{,}22 \cdot 10^{-13}\ s}$

c Bereken het tijdsverschil tussen de aankomt van de twee lichtflitsen bij Bea volgens de klok van Bea.

- vanwege de lage snelheid van Bea mag je tijdrek en lengtekrimp verwaarlozen
- de flits van de voorkant komt volgens Anna $2{,}22 \cdot 10^{-13}$ s eerder aan dan de flits van de achterkant
- voor Bea is het tijdverschil ook $\mathbf{2{,}22 \cdot 10^{-13}\ s}$

d Slaan de bliksems volgens Bea ook tegelijkertijd in?

- volgens Bea komen de lichtflitsen van de voorkant en de achterkant niet tegelijkertijd aan, de flits van de voorkant komt eerder
- Bea concludeert dat de inslag voorin $\mathbf{2{,}22 \cdot 10^{-13}\ s}$ eerder plaatsvindt dan de inslag achterin

6** **a** Leg uit dat als v_{AB} veel kleiner is dan de lichtsnelheid de formule van Einstein hetzelfde resultaat geeft als de formule van Galileo.

- $v_{AB} << c \;\rightarrow\; v_B \cdot v_{AB} << c^2 \;\rightarrow\; \dfrac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2} << 1$

- $v_{AB} << c \quad \rightarrow \quad v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1+\frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}} \approx v_B + v_{AB}$

- $v_A = v_B + v_{AB}$

7** **a** Bereken de snelheid van de naar voren geschoten elektronen zoals waargenomen door Anna.

- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1+\frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- invullen: $v_B = 0{,}5c$ en $v_{AB} = 0{,}5c$
- $v_A = \dfrac{0{,}5c + 0{,}5c}{1+\frac{0{,}5c \cdot 0{,}5c}{c^2}} \quad \rightarrow \quad v_A = \dfrac{c}{1+\frac{0{,}25c^2}{c^2}} = \dfrac{c}{1+0{,}25} = \dfrac{c}{1{,}25}$
- $v_A = \dfrac{c}{1{,}25} = 0{,}8c$

b Bereken de snelheid van de naar achteren geschoten elektronen zoals waargenomen door Anna.

- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1+\frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- invullen: $v_B = -0{,}5c$ en $v_{AB} = 0{,}5c$
- $v_A = \dfrac{-0{,}5c + 0{,}5c}{1+\frac{-0{,}5c \cdot 0{,}5c}{c^2}} \quad \rightarrow \quad v_A = \dfrac{0}{1+\frac{-0{,}25c^2}{c^2}}$
- $v_A = 0$

8*** **a** Bereken de snelheid die Anna waarneemt.

- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1+\frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- invullen: $v_B = 0{,}8c$ en $v_{AB} = 0{,}5c$
- $v_A = \dfrac{0{,}8c + 0{,}5c}{1+\frac{0{,}8c \cdot 0{,}5c}{c^2}} \quad \rightarrow \quad v_A = \dfrac{1{,}3c}{1+\frac{0{,}4c^2}{c^2}} = \dfrac{1{,}3c}{1+0{,}4} = \dfrac{1{,}3c}{1{,}4}$
- $v_A = \dfrac{1{,}3}{1{,}4} \cdot c = 0{,}93c$

b Bereken de snelheid die Bea waarneemt.

- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1+\frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- invullen: $v_A = 0{,}8c$ en $v_{AB} = 0{,}5c$

- $0{,}8c = \dfrac{v_B + 0{,}5c}{1 + \frac{v_B \cdot (0{,}5c)}{c^2}} \quad \rightarrow \quad 0{,}8c \cdot \left(1 + \frac{v_B \cdot (0{,}5c)}{c^2}\right) = v_B + 0{,}5c$
- $0{,}8c + 0{,}8c \cdot \dfrac{0{,}5c \cdot v_B}{c^2} = v_B + 0{,}5c$
- $0{,}8c + 0{,}4v_B = v_B + 0{,}5c \quad \rightarrow \quad 0{,}6v_B = 0{,}3c$
- $v_B = \dfrac{0{,}3}{0{,}6}c = 0{,}5c$

c Bereken de snelheid die Bea waarneemt.

- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- invullen: $v_A = -0{,}8c$ en $v_{AB} = 0{,}5c$
  (minteken bij v_A vanwege tegengestelde richting)
- $-0{,}8c = \dfrac{v_B + 0{,}5c}{1 + \frac{v_B \cdot (+0{,}5c)}{c^2}} \quad \rightarrow \quad -0{,}8c \cdot \left(1 + \frac{v_B \cdot (0{,}5c)}{c^2}\right) = v_B + 0{,}5c$
- $-0{,}8c - 0{,}8c \cdot \dfrac{0{,}5c \cdot v_B}{c^2} = v_B + 0{,}5c$
- $-0{,}8c - 0{,}4v_B = v_B + 0{,}5c \quad \rightarrow \quad 1{,}4v_B = -1{,}3c$
- $v_B = \dfrac{-1{,}3}{1{,}4} \cdot c = -0{,}93c$ (minteken vanwege tegengestelde richting)

9** **a** In welke gevallen komen de uitkomsten van de twee formules overeen?

- combineer $v_A = v_B + v_{AB}$ met $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- $v_B + v_{AB} = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}} \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2} = 0$
- $\frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2} = 0 \quad \rightarrow \quad v_B = 0$ of $v_{AB} = 0$

b Stel $v_{AB} = c$, welke relatie geldt er dan tussen v_A en v_B?

- $v_A = \dfrac{v_B + c}{1 + \frac{v_B \cdot c}{c^2}} \quad \rightarrow \quad v_A = \dfrac{v_B + c}{1 + \frac{v_B}{c}}$
- vermenigvuldig teller en noemer met c: $v_A = \dfrac{c}{c} \cdot \dfrac{v_B + c}{1 + \frac{v_B}{c}}$
- $v_A = c \cdot \dfrac{v_B + c}{c + v_B} = c$
- vul in: $v_A = c \quad \rightarrow \quad c = \dfrac{v_B + c}{1 + \frac{v_B \cdot c}{c^2}} \quad \rightarrow \quad c = \dfrac{v_B + c}{1 + \frac{v_B}{c}}$
- kruislings vermenigvuldigen : $c \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = v_B + c$

- $c + v_B = v_B + c \quad \rightarrow \quad v_B = v_B$
- dit is waar voor iedere waarde van v_B
- als $v_{AB} = c \quad \rightarrow$ voor iedere snelheid v_B geldt $v_A = c$

10***

a Hoe groot is de snelheid van het licht ten opzichte van ons?

- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- invullen: $v_B = c$ en $v_{AB} = \frac{2}{3}c$
- $v_A = \dfrac{c + \frac{2}{3}c}{1 + \frac{c \cdot \frac{2}{3}c}{c^2}} \quad \rightarrow \quad v_A = \dfrac{1\frac{2}{3}c}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{1\frac{2}{3}c}{1\frac{2}{3}} = c$

b Kan het licht van het ene stelsel het andere stelsel ooit bereiken?

- ten opzichte van elkaar bewegen de sterrenstelsel met een snelheid kleiner dan de lichtsnelheid
- het licht van het ene stelsel kan het andere stelsel bereiken

c Bereken de onderlinge snelheid van de stelsels.

- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- invullen: $v_B = \frac{2}{3}c$ en $v_{AB} = \frac{2}{3}c$
- $v_A = \dfrac{\frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c}{1 + \frac{\frac{2}{3}c \cdot \frac{2}{3}c}{c^2}}$
- $v_A = \dfrac{\frac{4}{3}c}{1 + \frac{\frac{4}{9}c^2}{c^2}} = \dfrac{\frac{4}{3}c}{1 + \frac{4}{9}} = \dfrac{\frac{4}{3}c}{1\frac{4}{9}} = \dfrac{\frac{12}{9}c}{\frac{13}{9}} = \dfrac{12}{13} \cdot c$

11***

a Bereikt de kogel de boeven volgens Galileo?

- Galileo transformatie: $v_B = v_A - v_{AB} \quad \rightarrow \quad v_A = v_B + v_{AB}$
- $v_A = \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}c \quad \rightarrow \quad v_A = \frac{2}{6}c + \frac{3}{6}c = \frac{5}{6}c$
- $\frac{5}{6}c$ is groter dan $\frac{3}{4}c$, dus de kogel bereikt de boeven

b Bereikt de kogel de boeven volgens Einstein?

- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- invullen: $v_B = \frac{1}{3}c$ en $v_{AB} = \frac{1}{2}c$
- $v_A = \dfrac{\frac{1}{3}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{\frac{1}{3}c \cdot \frac{1}{2}c}{c^2}} \quad \rightarrow \quad v_A = \dfrac{\frac{2}{6}c + \frac{3}{6}c}{1 + \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{5}{6}c}{\frac{7}{6}} = \frac{5}{7}c$
- $\frac{5}{7}c$ is kleiner dan $\frac{3}{4}c$, dus de kogel zal de boeven niet bereiken

c Vul de lege cellen van onderstaande tabel.

boeven t.o.v. de politie

- v_B is de snelheid van de boeven t.o.v. de aarde → 3/4c
- v_{AB} is de snelheid van de aarde t.o.v. de politie → -1/2c
- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- $v_B = \frac{3}{4}c$ en $v_{AB} = -\frac{1}{2}c$
- $v_A = \dfrac{\frac{3}{4}c - \frac{1}{2}c}{1 - \frac{\frac{3}{4}c \cdot \frac{1}{2}c}{c^2}} \rightarrow v_A = \dfrac{\frac{1}{4}c}{1 - \frac{3}{8}} = \dfrac{\frac{2}{8}c}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}c$

kogel t.o.v. de boeven

- kogel t.o.v. de aarde → 5/7c
- boeven t.o.v. de aarde → 3/4c
- kogel t.o.v. de boeven $\left(\frac{5}{7} - \frac{3}{4}\right)c = \left(\frac{20}{28} - \frac{21}{28}\right)c = \frac{-1}{28} \cdot c$
- minteken → de afstand tussen de boeven en de kogel neemt toe

snelheid van → t.o.v. ↓	grond	politie	boeven	kogel
grond	0	$\frac{1}{2}c$	$\frac{3}{4}c$	$\frac{5}{7}c$
politie	$-\frac{1}{2}c$	0	$\frac{2}{5}c$	$\frac{1}{3}c$
boeven	$-\frac{3}{4}c$	$-\frac{2}{5}c$	0	$-\frac{1}{28}c$
kogel	$-\frac{5}{7}c$	$-\frac{1}{3}c$	$\frac{1}{28}c$	0

15.3 Ruimtetijd diagram

1* Hieronder lees je vier beweringen over ruimtetijddiagrammen:
- op de horizontale as staat de tijd en op de verticale as staat de ruimte
- op de horizontale as staat de ruimte en op de verticale as staat de tijd
- op de horizontale as staat de ruimte en op de verticale as staat ook de ruimte
- op de horizontale as staat de tijd en op de verticale as staat ook de tijd

- op de horizontale as staat afstand (ruimte)
- op de verticale as staat $c \cdot t$ en dit is ook afstand (ruimte)
- omdat c een constant getal is kan de verticale as ook als tijd-as worden opgevat
- de bewering achter het derde streepje is correct

2* **a** Wat is de betekenis van het snijpunt van twee wereldlijnen.
- snijpunt: ruimte-coördinaat is gelijk en tijd-coördinaat is gelijk
- twee voorwerpen bevinden zich op het zelfde moment op dezelfde plaats

b Kunnen twee wereldlijnen elkaar twee keer snijden?
- snijpunt: zelfde plaats en zelfde tijd
- twee voorwerpen kunnen elkaar twee keer tegenkomen
- dit geeft twee snijpunten van de wereldlijnen van deze voorwerpen

c Teken in een ruimtetijddiagram twee gelijktijdige gebeurtenissen.
- verticale as geeft de tijd aan
- lijn evenwijdig met de horizontale as verbindt gelijktijdige gebeurtenissen
- teken twee punten op een horizontale lijn

d Teken in hetzelfde ruimtetijddiagram twee gebeurtenissen op dezelfde plaats.
- horizontale as geeft de ruimte aan
- lijn evenwijdig met de verticale as verbindt gebeurtenissen op dezelfde plaats
- teken twee punten op een verticale lijn

3** **a** Teken het ruimtetijddiagram van een foton dat in vacuüm beweegt in positieve richting.
- teken een lijn schuin omhoog met een hoek van 45 graden
- positieve richtingscoëfficiënt
- zie RT-diagram bij vraag d

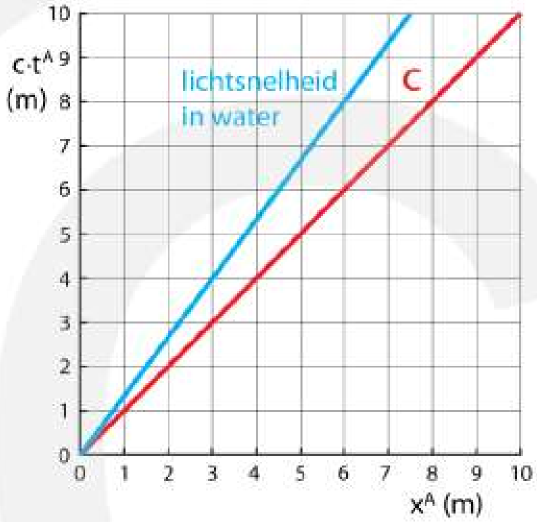
b Teken het ruimtetijddiagram van een foton dat in vacuüm beweegt in negatieve richting.
- teken een lijn schuin omhoog met een hoek van -45 graden
- negatieve richtingscoëfficiënt

c Bereken de snelheid van geel licht in water.

- $v_{licht} = \dfrac{c}{n}$ | $n = 1{,}333$
- $v_{licht} = \dfrac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}333} = 2{,}25 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

d Teken in het ruimtetijddiagram van vraag a de grafiek van dit foton.

- om 10 meter af te leggen heeft licht in vacuüm 10/c seconden nodig
- om 10 meter af te leggen heeft licht in vacuüm 1,333 · 10/c seconden nodig



4** **a** Bereken de lengte van de uitgezonden lichtstraal.

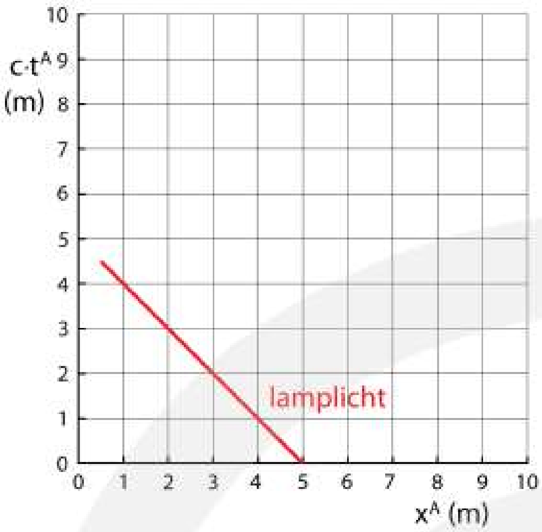
- $s = v_{gem} \cdot t$ met $v_{gem} = c$ en $t = 15 \cdot 10^{-9}$ s
- $s = 3{,}0 \cdot 10^8 \cdot 15 \cdot 10^{-9} = 4{,}5$ m

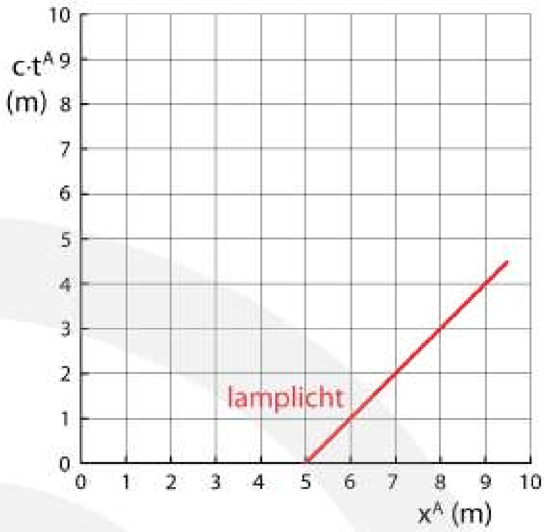
b Teken het ruimtetijddiagram voor de beweging van de voorkant van de uitgezonden lichtstraal.

- begint op t = 0 op x = 5,0 m
- legt in 5 ns 4,5 m af in de richting van de oorsprong
- zie RT-diagram onder vraag c

c Teken het ruimtetijddiagram als Johan de laserpen 15 ns in de tegenovergestelde richting laat schijnen.

- begint op t = 0 op x = 5,0 m
- legt in 15 ns 4,5 m af in tegenovergestelde richting





5***

a Bepaal de afstand in ruimte tussen de gebeurtenissen 1 en 2.
- aflezen coördinaten op de x-as
- $x_1 = 2$ m en $x_2 = 8$ m
- de afstand in ruimte is $8 - 2 = 6$ m

b Bepaal de afstand in tijd tussen de gebeurtenissen 1 en 2.
- aflezen coördinaten op de c·t-as
- $c \cdot t_1 = 4$ m en $c \cdot t_2 = 7$ m
- de afstand is $7 - 4 = 3$ m
- tijdafstand is $3 / 3{,}0 \cdot 10^8 = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ s

c Wat is de eenheid van s?
- c·t is afstand in meter en x is afstand in meter
- de eenheid van s^2 is dus m^2

d Bereken het ruimtetijdinterval van de gebeurtenissen 1 en 2.
- G1: $s^2 = (c \cdot t)^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad s^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12\, m^2$
- G2: $s^2 = (c \cdot t)^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad s^2 = 7^2 - 8^2 = 49 - 64 = -15\, m^2$

e Geef een verklaring voor de begrippen tijdachtig bij $s > 0$ en ruimteachtig bij $s < 0$.
- $s > 0 \quad \rightarrow \quad (c \cdot t)^2 > x^2$
- er wordt meer afstand in de tijd c·t afgelegd dan in de ruimte x
- $s < 0 \quad \rightarrow \quad (c \cdot t)^2 < x^2$
- er wordt meer afstand in de ruimte x afgelegd dan in de tijd c·t

6***

a Leg uit welke gebeurtenis volgens Bea als eerste plaatsvindt: 1 of 2.
- aflezen in het blauwe stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $c \cdot t^B = 5{,}5$
- gebeurtenis 2 ligt op $c \cdot t^B = 4$
- volgens B is gebeurtenis 2 eerder dan gebeurtenis 1

b Bepaal het tijdverschil tussen 1 en 2 volgens Bea.
- het tijdverschil is $c \cdot t^B = 5{,}5 - 4 = 1{,}5$
- $\Delta t^B = \dfrac{1{,}5}{c} = \dfrac{1{,}5}{3{,}0 \cdot 10^8} = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ s

c Bepaal het afstandsverschil tussen 1 en 2 volgens Anna.
- aflezen in het zwarte stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $x^A = 2{,}4$
- gebeurtenis 2 ligt op $x^A = 6$
- afstandsverschil is $6 - 2{,}4 = 3{,}6$ m

d Bepaal het afstandsverschil tussen 1 en 2 volgens Bea.
- aflezen in het blauwe stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $x^B = 0$
- gebeurtenis 2 ligt op $x^B = 4$
- afstandsverschil is $4 - 0 = 4$ m

7*** **a** Leg uit welke gebeurtenis volgens Anna als eerste plaatsvindt: 1 of 2.
- aflezen in het zwarte stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $c \cdot t^A = 6$
- gebeurtenis 2 ligt op $c \cdot t^A = 8$
- volgens A is gebeurtenis 1 eerder dan gebeurtenis 2

b Bepaal het tijdverschil tussen 1 en 2 volgens Anna.
- het tijdverschil is $c \cdot t^A = 8 - 6 = 2$
- $\Delta t^A = \dfrac{2{,}0}{c} = \dfrac{2{,}0}{3{,}0 \cdot 10^8} = 6{,}7 \cdot 10^{-9}$ s

c Bepaal het afstandsverschil tussen 1 en 2 volgens Bea.
- aflezen in het blauwe stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $x^B = 1{,}3$
- gebeurtenis 2 ligt op $x^B = 6$
- afstandsverschil is $6 - 1{,}3 = 4{,}7$ m

d Bepaal het afstandsverschil tussen 1 en 2 volgens Anna.
- aflezen in het zwarte stelsel:
- gebeurtenis 1 ligt op $x^A = 3{,}8$
- gebeurtenis 2 ligt op $x^A = 8{,}8$
- afstandsverschil is $8{,}8 - 3{,}8 = 5{,}0$ m

8* a** Leg uit waarom dit het geval is.

- voor de hoek tussen de ruimte-assen en tussen de tijd-assen geldt:

$$\tan\alpha = \frac{v_{AB}}{c} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_{AB}}{c}\right) \quad \text{(zie leerboek)}$$

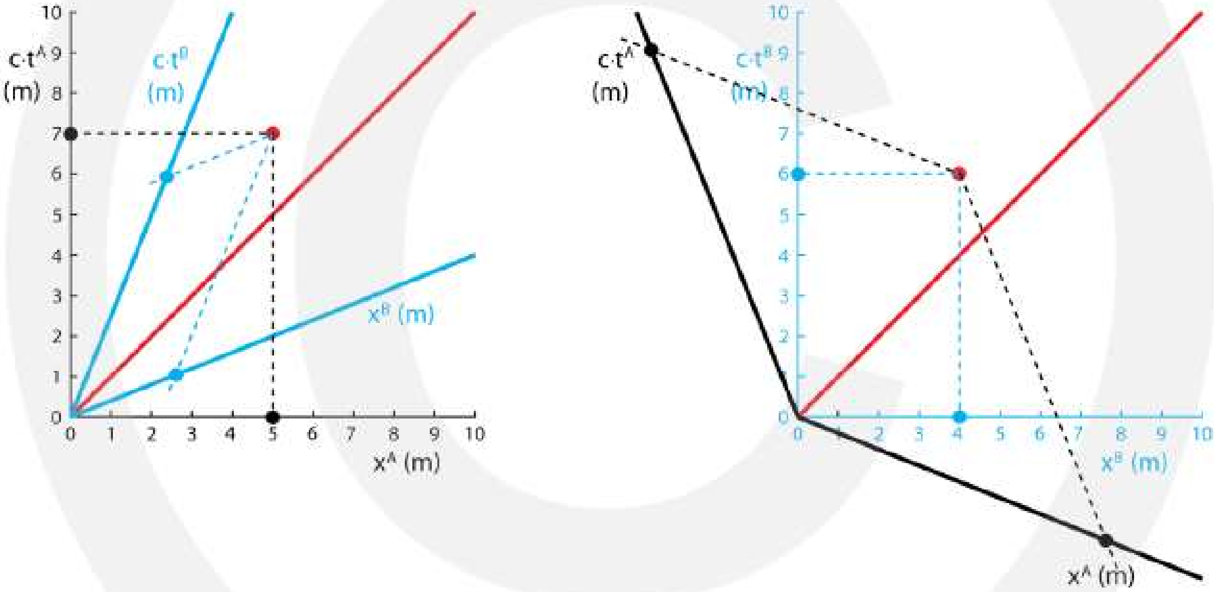
- v_{AB} is gelijk voor Anna en Bea
- α is gelijk voor Anna en Bea

b Geef in de figuur links de coördinaten van de gebeurtenis aan in beide stelsels.

- bepaal de afsneden met de assen
- uitwerking onder vraag c

c Geef in de figuur rechts de coördinaten van de gebeurtenis aan in beide stelsels.

- bepaal de afsneden met de assen



9* a** Bepaal de snelheid van stelsel B ten opzichte van stelsel A.

- opmeten $\alpha = 22\,^{o}$
- $\tan\alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \tan 22 = \frac{v}{c} \rightarrow 0{,}404 = \frac{v}{c} \rightarrow v = 0{,}40 \cdot c$

OOK GOED

- $\Delta x^A = 4\text{ m} \quad | \quad \Delta t^A = \frac{10}{c}\text{ s} \quad | \quad v_{gem} = \ldots\text{ m/s}$
- $v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- $v_{gem} = \frac{4}{10/c} \rightarrow v_{gem} = \frac{4}{10}\cdot c = 0{,}4\cdot c$

b Welke van de lijnen 1 t/m 6 is de ruimte-as van het blauwe stelsel?

- voor de hoek tussen de ruimte-assen en tussen de tijd-assen geldt:

$$\tan\alpha = \frac{v_{AB}}{c} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_{AB}}{c}\right) \quad \text{(zie leerboek)}$$

- blauwe lijn: $\tan\alpha = \frac{4}{10} = 0{,}4$
- lijn 3: $\tan\alpha = \frac{4}{10} = 0{,}4$
- lijn 3 is de ruimte as van het blauwe stelsel

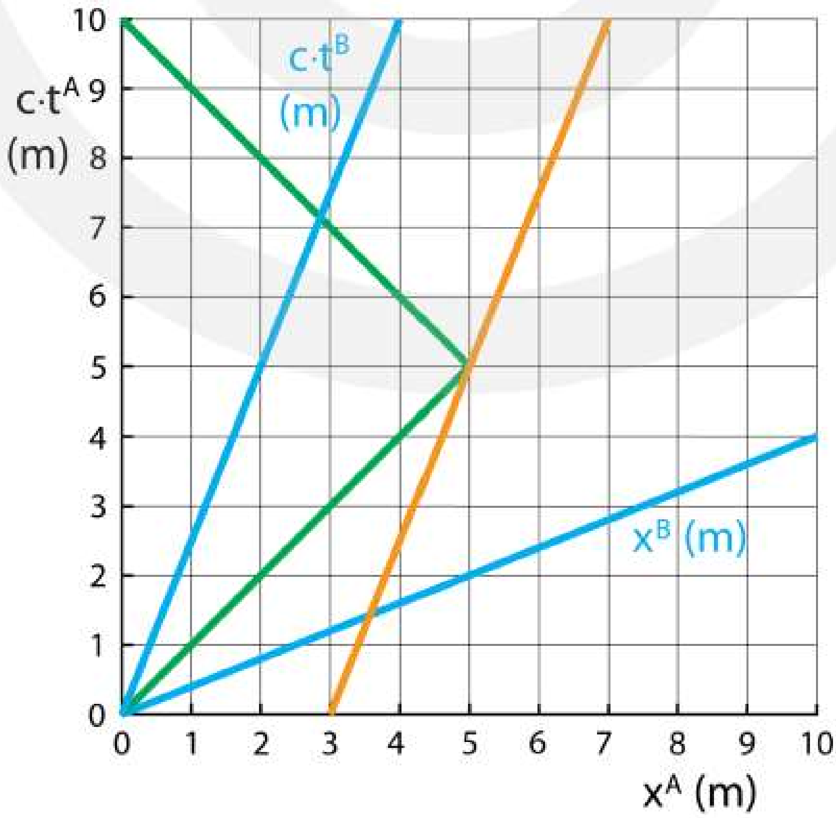
c Welke van de lijnen 1 t/m 6 is de ruimte-as van het blauwe stelsel volgens Galileo?
- volgens Galileo is de tijd voor beide waarnemers gelijk $t^A = t^B$
- volgens Galileo is lijn 5 de ruimte as

10*** **a** Leg dit uit.
- na ct = 10 seconde heeft Bea 4 meter afgelegd
- $s = v_{gem} \cdot t \;\rightarrow\; 4 = v_{gem} \cdot \frac{10}{c} \;\rightarrow\; v_{gem} = \frac{4c}{10} = 0{,}4c$

OOK GOED
- $\tan\alpha = \frac{v}{c} \;\rightarrow\; \frac{4}{10} = \frac{v}{c} \;\rightarrow\; v = 0{,}4c$

b Teken de wereldlijn van de lichtpuls heen en terug.
- groene lijnen in onderstaande figuur

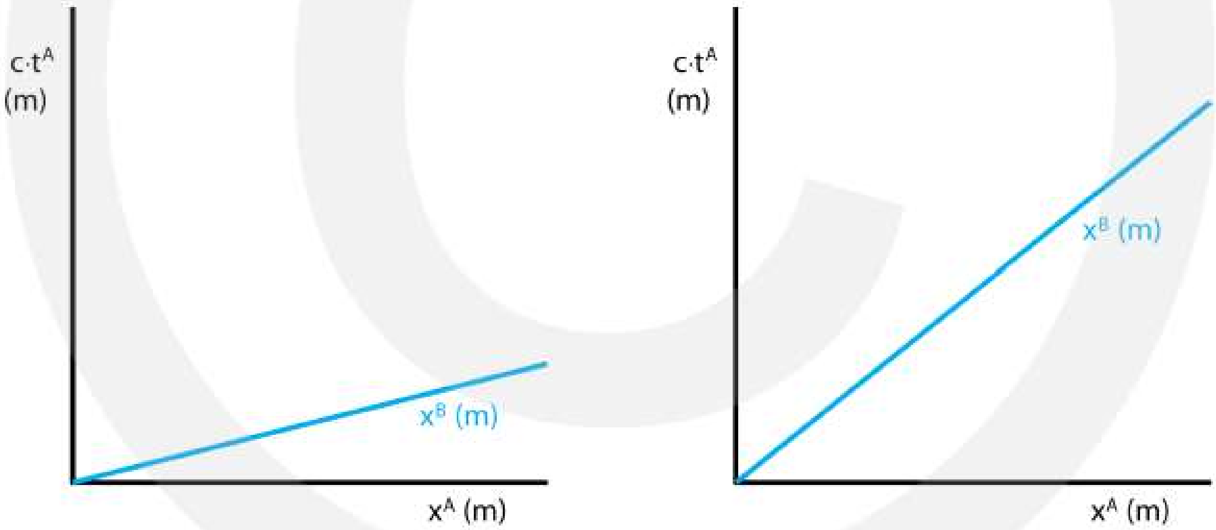
c Teken de wereldlijn van de spiegel in het stelsel van Bea.
- oranje lijn in onderstaande figuur



d Hoe groot is de afstand tussen Bea en de spiegel volgens Anna?
- op $t = 0$ bevindt Bea zich op $x = 0$ en de spiegel op $x = 3$ m
- volgens Anna is de afstand tussen Bea en de spiegel 3,0 m

e Hoe groot is de afstand tussen Bea en de spiegel volgens Bea?
- $v = 0{,}4c \quad | \quad \gamma = \ldots$
- $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}4c)^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}4^2}} \rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}16}} = 1{,}091$
- volgens Anna is de afstand tussen Bea en de spiegel 3,0 m
- in het stelsel van Bea: $L_b = \dfrac{L_e}{\gamma} \rightarrow 3 = \dfrac{L_e}{1{,}091} \rightarrow L_e = 3{,}27327 = 3{,}3\text{ m}$

11[****] In de figuur zie je de x-as van het ruimtetijddiagram van bewegende stelsels (blauw) en de assen van het ruimtetijddiagram van een stilstaand stelsel (zwart).



a Welk stelsel heeft de grootste snelheid?
- de hoek met de x-as is bij het rechterdiagram het grootst
- de stelsel dat hoor bij het rechterdiagram heeft de grootste snelheid

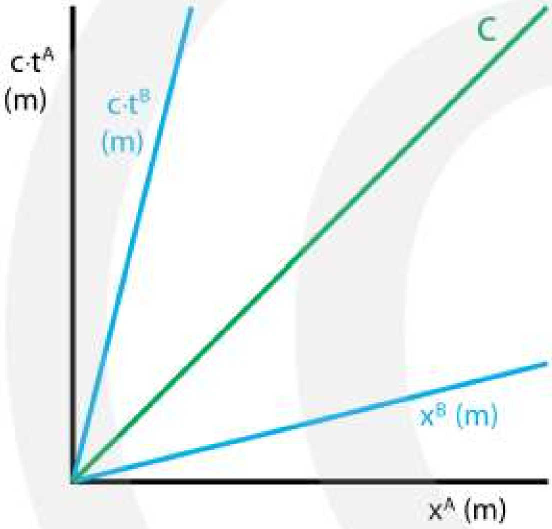
b Bepaal de snelheid van de bewegende stelsels.
LINKS
- opmeten $\alpha = 14\,^{\circ}$
- $\tan\alpha = \dfrac{v}{c} \rightarrow \tan 14 = \dfrac{v}{c} \rightarrow 0{,}2493 = \dfrac{v}{c} \rightarrow v = 0{,}2493 \cdot c = 0{,}25 \cdot c$

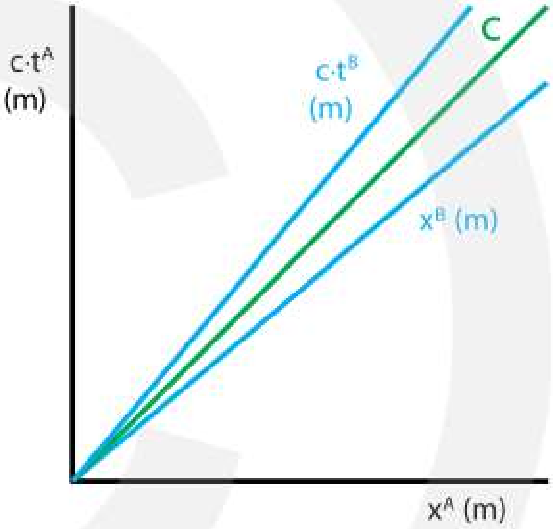
RECHTS
- opmeten $\alpha = 40\,^{\circ}$
- $\tan\alpha = \dfrac{v}{c} \rightarrow \tan 40 = \dfrac{v}{c} \rightarrow 0{,}839 = \dfrac{v}{c} \rightarrow v = 0{,}839 \cdot c = 0{,}84 \cdot c$

c Teken de tijd-as van de bewegende stelsels.
- zie figuur

d Teken de wereldlijn van een lichtstraal die op t=0 door x=0 gaat.
- zie figuur

e Is het mogelijk om een ruimtetijddiagram te tekenen van een stelsel met een snelheid groter dan de lichtsnelheid?
- bij v = c is vallen de x-as en de ct-as samen
- je kunt dan geen onderscheid meer maken tussen ruimte en tijd
- een ruimtetijddiagram voor een stelsel met een snelheid groter dan c kan niet worden getekend

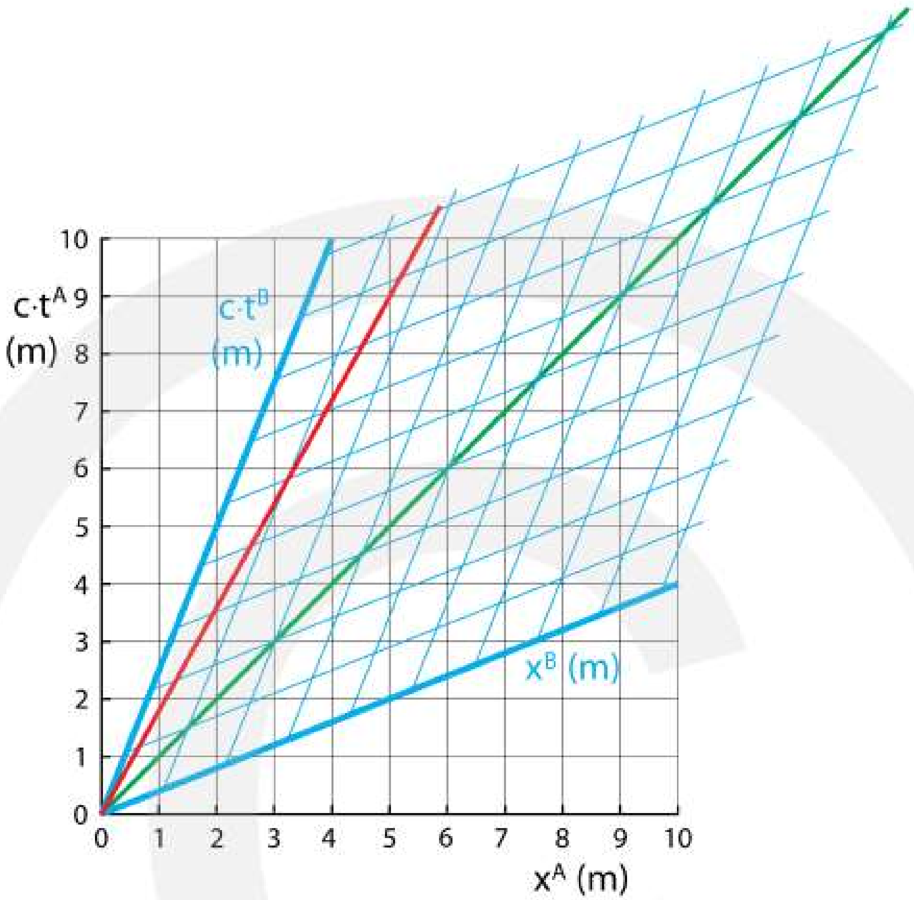




12**** **a** Welke snelheid heeft de raket?
- opmeten $\alpha = 21{,}8\,^\circ$
- $\tan\alpha = \dfrac{v}{c} \;\rightarrow\; \tan 21{,}8 = \dfrac{v}{c} \;\rightarrow\; 0{,}4 = \dfrac{v}{c} \;\rightarrow\; v = 0{,}4 \cdot c$

OOK GOED
- $\Delta x^A = 4\text{ m} \;\mid\; \Delta t^A = \dfrac{10}{c}\text{ s} \;\mid\; v_{gem} = \ldots\text{ m/s}$
- $v_{gem} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
- $v_{gem} = \dfrac{4}{10/c} \;\rightarrow\; v_{gem} = \dfrac{4}{10} \cdot c = 0{,}4 \cdot c$

b Teken de wereldlijn van de kogel.
- $v_{gem} = 0{,}2c \;\mid\; \Delta x = 1 \;\mid\; \Delta t = \ldots\text{ s}$
- $v_{gem} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \;\rightarrow\; 0{,}2c = \dfrac{1}{\Delta t} \;\rightarrow\; \Delta t = \dfrac{1}{0{,}2c} = \dfrac{5}{c} \;\rightarrow\; ct = 5$
- de wereldlijn gaat door het punt (x = 1 , ct = 5) in het blauwe stelsel



c Bepaal uit het RT-diagram de snelheid van de kogel volgens Anna?

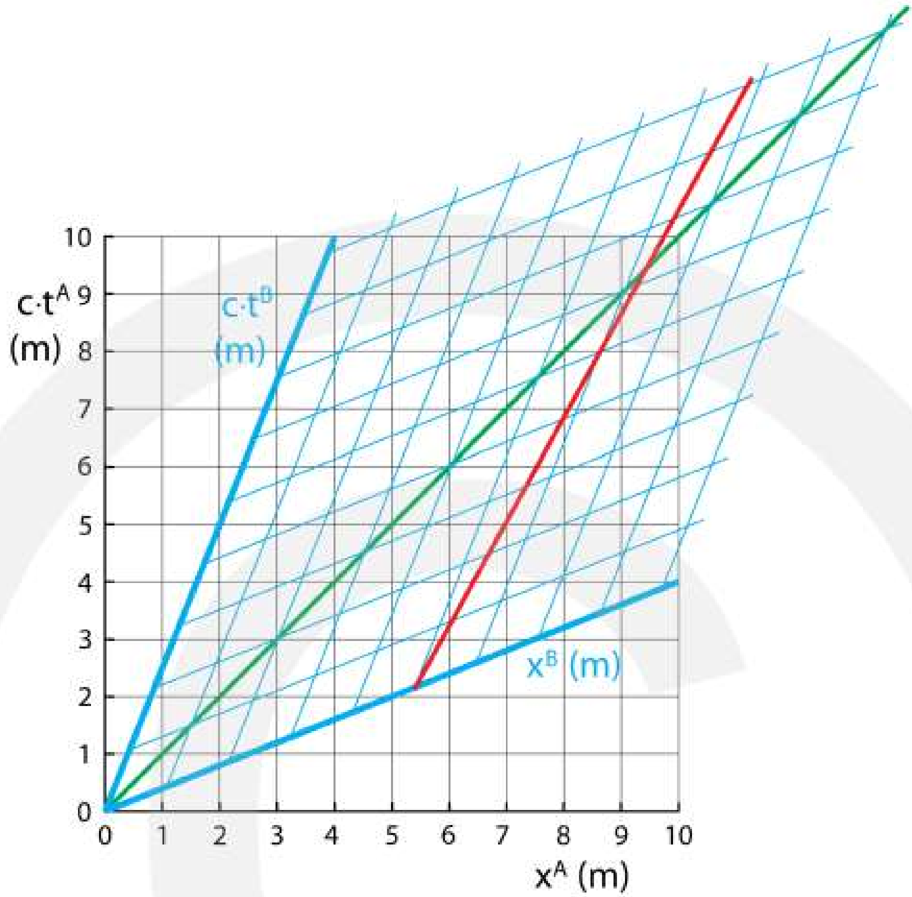
- aflezen in het zwarte stelsel → de wereldlijn gaat door (x=5 , ct = 9)
- $v_{gem} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v_{gem} = \dfrac{5 \cdot c}{9} \rightarrow v_{gem} = 0{,}55555c = 0{,}56c$

d Controleer met $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$ of je bepaling klopt.

- $v_B = 0{,}2c \quad | \quad v_{AB} = 0{,}4c \quad | \quad v_A = \ldots m/s$
- $v_A = \dfrac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}} \rightarrow v_A = \dfrac{0{,}2c + 0{,}4c}{1 + \frac{0{,}2c \cdot 0{,}4c}{c^2}} \rightarrow v_A = \dfrac{0{,}6c}{1 + \frac{0{,}08c^2}{c^2}} \rightarrow v_A = \dfrac{0{,}6c}{1 + 0{,}08}$
- $v_A = \dfrac{0{,}6c}{1{,}08} = 0{,}55555c = 0{,}56c \rightarrow$ klopt

e Teken de wereldlijn van de kogel.

- $v_{gem} = 0{,}2c \quad | \quad \Delta x = 1 \quad | \quad \Delta t = \ldots s$
- $v_{gem} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow 0{,}2c = \dfrac{1}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \dfrac{1}{0{,}2c} = \dfrac{5}{c} \rightarrow ct = 5$
- de wereldlijn gaat door het punt (x = 6 , ct = 5) in het blauwe stelsel



f Bereken (zonder het RT-diagram te gebruiken) de plaats en het tijdstip waarop volgens Bea de kogel wordt ingehaald door een lichtstraal die op t=0 in de oorsprong is vertrokken?

- blauwe stelsel: lichtstraal $x_{licht} = c \cdot t$ | $x_{kogel} = 5 + 0{,}2c \cdot t$
- inhalen $x_{licht} = x_{kogel}$
- $c \cdot t = 5 + 0{,}2c \cdot t \;\rightarrow\; 0{,}8c \cdot t = 5 \;\rightarrow\; t = \dfrac{5}{0{,}8 \cdot c} = \dfrac{6{,}25}{c}\,\text{s} \;\rightarrow\; ct_{inhalen} = 6{,}25$
- $x_{licht} = c \cdot t \;\rightarrow\; x_{inhalen} = c \cdot \dfrac{6{,}25}{c} = 6{,}25\,\text{m}$

g Klopt je berekening met je antwoord op vraag e?

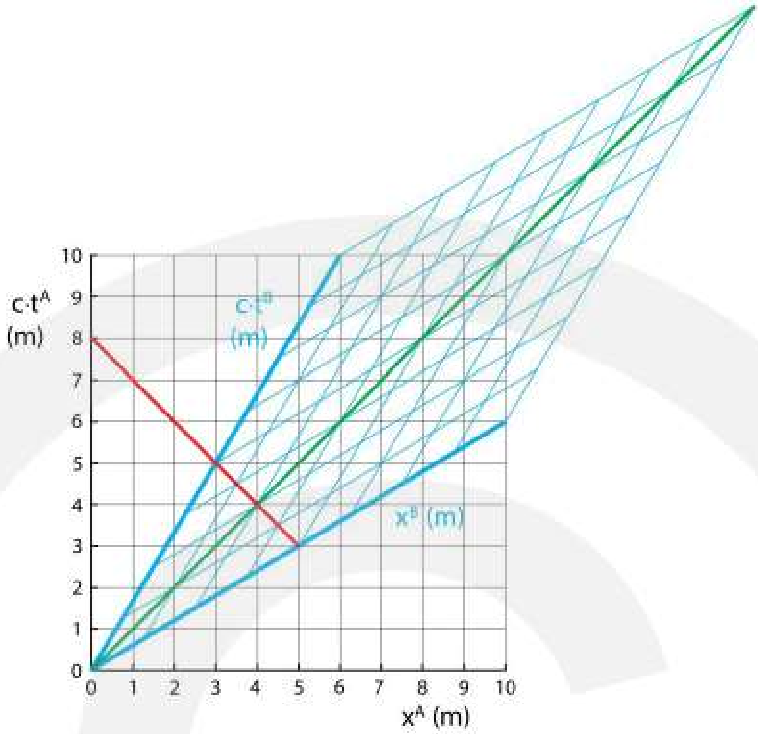
- aflezen in het blauwe stelsel het snijpunt van de groene en de rode wereldlijn
- (x=6,25 , ct = 6,25) → klopt

h Bepaal uit het RT-diagram de plaats en het tijdstip waarop volgens Anna de kogel wordt ingehaald door een lichtstraal die op t=0 in de oorsprong is vertrokken?

- aflezen in het zwarte stelsel het snijpunt van de groene en de rode wereldlijn
- (x = 9,4 , ct = 9,4)

13* a** Waar en wanneer gaat deze schemerlamp aan volgens Anna?

- teken de wereldlijn van de lichtstraal vanuit het blauwe stelsel
- aflezen in het zwarte stelsel → gebeurtenis waarbij de lichtstraal vertrekt
- (x = 5 , ct = 3)

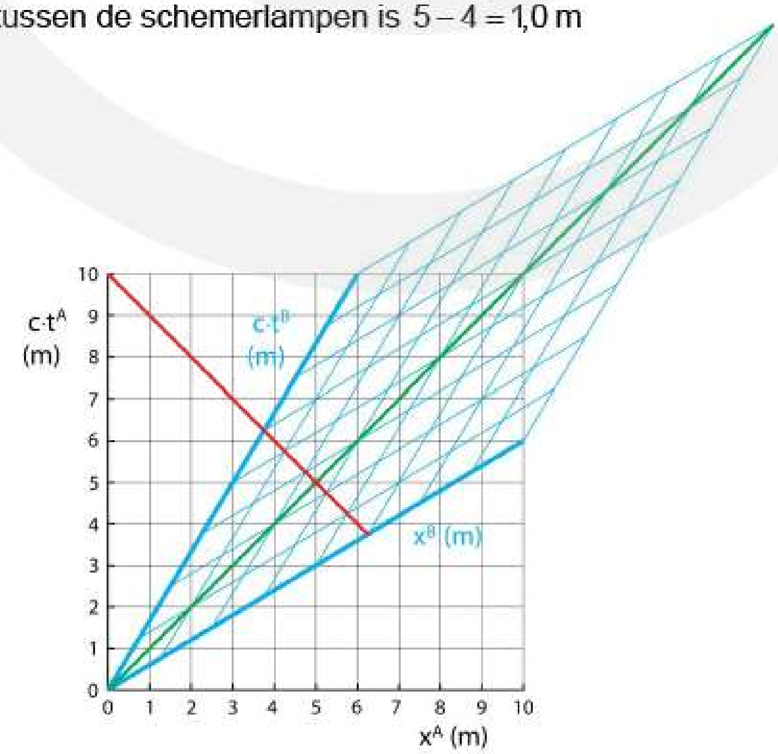


b Op welk tijdstip ziet Anna voor het eerst het licht van deze schemerlamp?

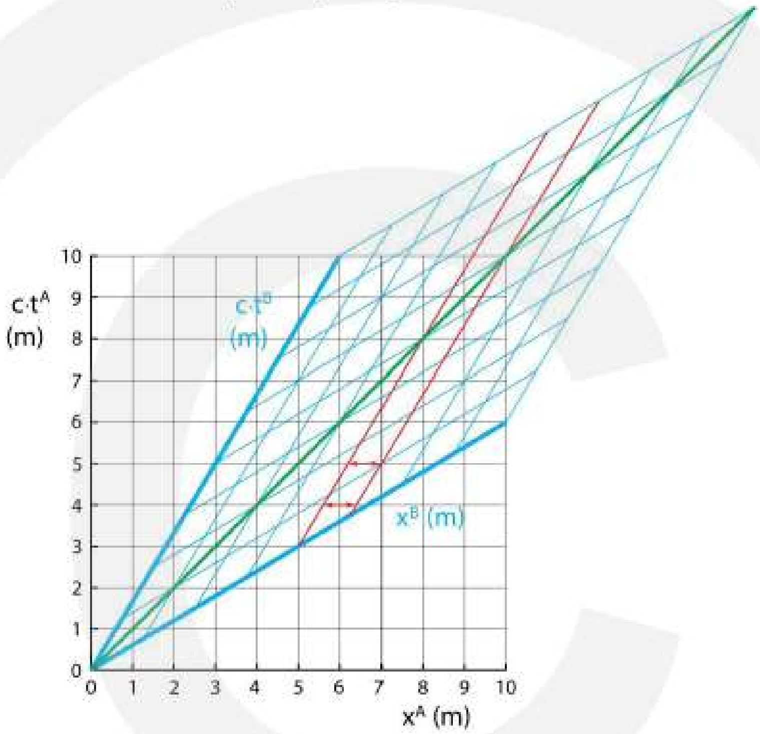
- aflezen in zwarte stelsel → de lichtstraal komt in de oorsprong op ct = 8
- Anna ziet de lichtstraal op $t = \dfrac{8}{c}$ s

c Wat is volgens Bea de afstand tussen de twee schemerlampen?

- teken de wereldlijn van de lichtstraal vanuit het zwarte stelsel
- aflezen in het blauwe stelsel → snijpunt van deze wereldlijn met de x-as
- ($x = 5$, $ct = 0$)
- schemerlamp 2 staat op 5 m van de oorsprong
- de afstand tussen de schemerlampen is $5 - 4 = 1{,}0$ m



d Wat is volgens Anna de afstand tussen de twee schemerlampen?
- de wereldlijnen van de schemerlampen vanaf het tijdstip waarop ze aangaan zijn aangegeven in rood
- in het stelsel van Anna (zwart) moet de plaatsen van de schemerlampen op hetzelfde tijdstip worden afgelezen
- de rode pijl geeft de afstand op hetzelfde tijdstip in het stelsel van Anna
- aflezen op ct = 5 → lamp 1 op 6,2 meter en lamp 2 op 7,0 meter
- volgens Anna is de afstand 7,0 − 6,2 = 0,8 m



e Zijn je antwoorden op c en d in overeenstemming met de lengtekrimp?
- $v = 0{,}6c \quad | \quad \gamma = \ldots$
- $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}6c)^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}6^2}} \rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}36}} = 1{,}25$
- in het stelsel van Bea staan de schemerlampen op 1,0 m
- gezien vanuit het stelsel van Bea: $L_b = \dfrac{L_e}{\gamma} \rightarrow L_b = \dfrac{1{,}0}{1{,}25} = 0{,}8\text{ m}$

OOK GOED
- Anna neemt de bewegende schemerlampen waar met afstand 0,8 m
- gezien vanuit het stelsel van Anna: $L_b = \dfrac{L_e}{\gamma} \rightarrow 0{,}8 = \dfrac{L_e}{1{,}25} \rightarrow L_e = 1{,}0\text{ m}$

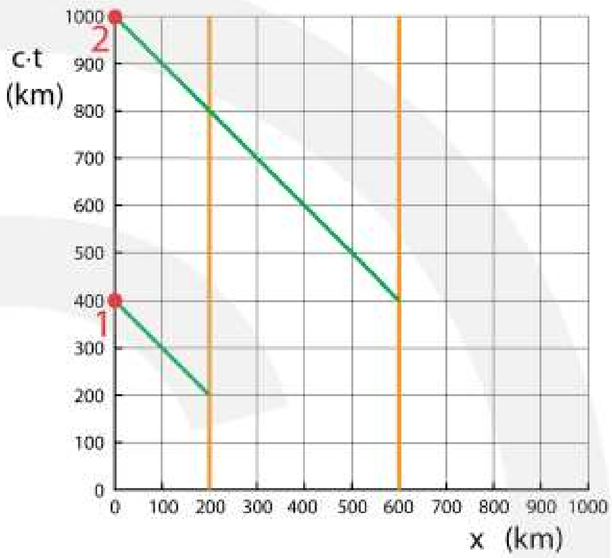
14**** **a** Teken de wereldlijnen van de Eiffeltoren en van de basiliek Notre-Dame de Fourvière.
- oranje lijnen in onderstaande figuur

b Is het werkelijke tijdverschil van aanzetten volgens Anna groter, kleiner of gelijk aan deze waarneming?

- het licht heeft meer tijd nodig om van Lyon naar Anna te reizen dan het licht uit Parijs
- het tijdverschil dat Anna waarneemt is groter dan het werkelijke tijdverschil waarmee de verlichting wordt aangezet

c Bepaal de tijdstippen waarop de verlichting van de Eiffeltoren en van de Notre Dame de Fourvière volgens Anna worden aangezet.

- teken de wereldlijnen van het licht van de Eiffeltoren en van het licht van de Notre-Dame de Fourvière (groene lijnen in onderstaande figuur)
- bepaal de snijpunten van de oranje wereldlijnen (gebouwen) en de groene wereldlijnen (licht)
- aflezen: het licht van de Eiffeltoren gaat aan op $ct = 200 \cdot 10^3$
het licht van de Notre-Dame de Fourvière gaat aan op $ct = 400 \cdot 10^3$



d Bepaal de snelheid van de TGV.

- opmeten $\alpha = 26{,}5\,°$
- $\tan\alpha = \dfrac{v}{c} \;\rightarrow\; \tan 26{,}5 = \dfrac{v}{c} \;\rightarrow\; 0{,}5 = \dfrac{v}{c} \;\rightarrow\; v = 0{,}5 \cdot c$

OOK GOED

- $\Delta x^A = 500 \cdot 10^3\ \text{m} \;\;|\;\; \Delta t^A = \dfrac{1000 \cdot 10^3}{c}\ \text{s} \;\;|\;\; v_{gem} = \ldots\ \text{m/s}$
- $v_{gem} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
- $v_{gem} = \dfrac{500 \cdot 10^3}{1000 \cdot 10^3 / c} \;\rightarrow\; v_{gem} = \dfrac{500}{1000} \cdot c \;\rightarrow\; v_{gem} = 0{,}5 \cdot c$

e Bepaal het tijdstip waarop Bea de verlichting van de Eiffeltoren ziet aangaan.

- teken de wereldlijn van de Eiffeltoren (oranje)
- teken de wereldlijnen van het licht van de Eiffeltoren (groen)
- bepaal het snijpunt van de oranje en de groene wereldlijn
- lees af in het blauwe stelsel op $x' = 0 \;\rightarrow\; c \cdot t' = 220 \cdot 10^3$
- $t' = \dfrac{220 \cdot 10^3}{c} = 7{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{s}$

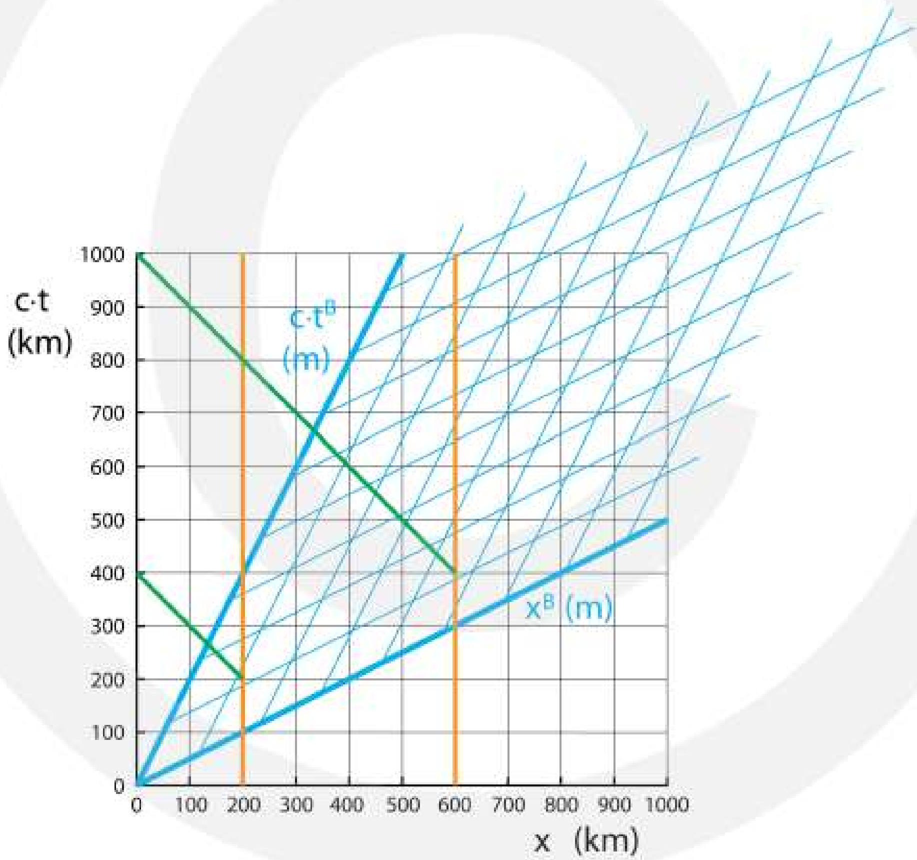
f Bepaal het tijdstip waarop Bea de verlichting van de Notre-Dame de Fourvière. ziet aangaan.

- teken de wereldlijn van de Notre-Dame de Fourvière (oranje)
- teken de wereldlijnen van het licht van de Notre-Dame de Fourvière (groen)

- bepaal het snijpunt van de oranje en de groene wereldlijn
- lees af in het blauwe stelsel op $x' = 0 \quad \rightarrow \quad c \cdot t' = 560 \cdot 10^3$
- $t' = \dfrac{560 \cdot 10^3}{c} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ s

g Bepaal de tijdstippen waarop de verlichting van de Eiffeltoren en van de Notre-Dame de Fourvière volgens Bea worden aangezet.

- aflezen in het blauwe stelsel → de wereldlijnen van de Eifeltoren en van de lichtstraal snijden elkaar op $c \cdot t' = 120 \cdot 10^3 \quad \rightarrow \quad t' = 4{,}0 \cdot 10^{-4}$ s
- aflezen in het blauwe stelsel → de wereldlijnen van de Notre- Dame de Fourvière en van de lichtstraal snijden elkaar op $c \cdot t' = 120 \cdot 10^3 \quad \rightarrow \quad t' = 4{,}0 \cdot 10^{-4}$ s
- Bea concludeert dat de verlichting tegelijkertijd wordt aangezet



15**** **a** Hoe oud is Charlotte als Bea arriveert?

- Anna en Charlotte bevinden zich steeds in hetzelfde referentiestelsel
- om 4 lichtjaar te overbruggen met een snelheid van 0,8c heeft Bea volgens Anna en Charlotte $\dfrac{4}{0{,}8} = 5$ jaar nodig
- Anna en Charlotte zijn beiden 21 jaar oud als Bea bij Charlotte arriveert

b Hoe oud is Anna als Bea thuiskomt?

- om 4 lichtjaar te overbruggen met een snelheid van 0,8c heeft Bea volgens Anna en Charlotte $\frac{4}{0{,}8} = 5$ jaar nodig
- volgens Anna is Bea $5 + 1 + 5 = 11$ jaar weggewest
- Anna is $16 + 11 = 27$ jaar oud als Bea arriveert

c Hoe oud Bea als ze thuiskomt?
- volgens Bea is de afstand tussen de aarde en de planeet minder dan 4 lichtjaar
- lengtekrimp: $L^B = L^A \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$
- $L^B = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}8 \cdot c)^2}{c^2}} \quad \rightarrow \quad L^B = 4 \cdot \sqrt{1 - 0{,}8^2} \quad \rightarrow \quad L^B = 4 \cdot \sqrt{1 - 0{,}64}$
- $L^B = 4 \cdot \sqrt{0{,}36} = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ lichtjaar
- Bea reist met 0,8c $\rightarrow t = \frac{s}{v_{gem}}$ $\rightarrow$ ze heeft $\frac{2{,}4}{0{,}8} = 3$ jaar nodig
- Bea heeft 3 jaar nodig op de heenreis, blijft 1 jaar bij Charlotte en heeft 3 jaar nodig voor de terugreis
- volgens Bea is ze $3 + 1 + 3 = 7$ jaar weggeweest
- Bea is $16 + 7 = 23$ jaar oud als ze thuiskomt

d Is het niet in tegenspraak met het feit dat niets sneller beweegt dan licht terwijl 4 lichtjaar door Bea in 3 jaar kan worden afgelegd?
- nee, want vanwege lengtekrimp is de afstand volgens Bea geen 4 lichtjaar maar slechts 2,4 lichtjaar (zie vraag c)
- met een snelheid van 0,8c doe je 3 jaar over deze afstand

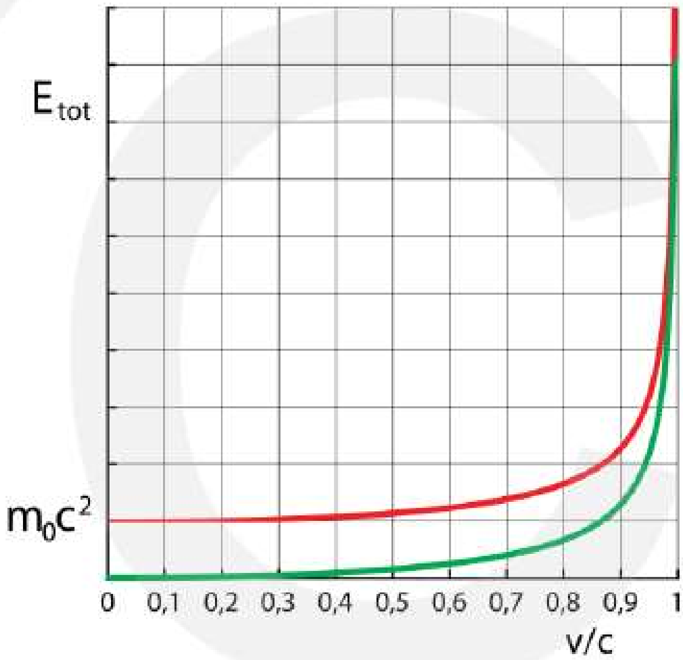
16*** **a** Is het mogelijk dat Bea terugkeert voordat Anna wordt geboren?
- in de relativiteitstheorie is de volgorde van gebeurtenissen onafhankelijk van de snelheid tussen referentiestelsels
- Bea kan niet eerder thuiskomen dan dat ze vertrekt
- Bea kan niet vertrekken voor haar geboorte
- Bea kan niet terugkeren voordat Anna wordt geboren

b Is het mogelijk dat de ouders jonger zijn dan Anna en Bea als ze weer thuis komen?
- tijdens de ruimtereis van de ouders is er tijdrek
- de klok van de ouders loopt langzamer dan de klok van Ann a en Bea
- het is mogelijk dat de ouders jonger zijn dan Anna en Bea als ze weer thuiskomen

15.4 Massa en energie

1[**] **a** Schets in de figuur hoe de kinetische energie afhangt van de snelheid.

- voor de totale energie geldt: $E_{totaal} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2$
- de kinetische energie is het verschil: $E_K = E_{totaal} - E_{rust}$
- $E_K = E_{totaal} - m_0 \cdot c^2$
- de grafiek voor E_K is verschoven met $E_{rust} = m_0 \cdot c^2$



b Bereken de snelheid waarbij de kinetische energie gelijk is aan de rustenergie.

- $E_K = E_{totaal} - E_{rust}$ en $E_K = E_{rust}$
- $E_{rust} = E_{totaal} - E_{rust} \rightarrow E_{totaal} = 2\,E_{rust}$
- $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = 2 \cdot m_0 \cdot c^2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2$
- $\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4 \rightarrow 1 = 4 \cdot (1-\frac{v^2}{c^2}) \rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$
- $v^2 = \frac{3}{4}c^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c \rightarrow v = 0{,}866 \cdot c$

2[**] **a** Leg uit dat bij deze formule de massa toeneemt als de snelheid groter wordt.

- als v groter wordt neemt $1-\frac{v^2}{c^2}$ af
- $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ wordt kleiner
- de noemer van de breuk wordt kleiner → de breuk wordt groter

b Bereken de massa van Bea gezien vanuit het referentiestelsel van Anna.

- $m^B = \dfrac{m^A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
- $m^B = \dfrac{m^A}{\sqrt{1-\frac{(0{,}6c)^2}{c^2}}} \rightarrow m^B = \dfrac{m^A}{\sqrt{1-\frac{0{,}36c^2}{c^2}}} = \dfrac{m^A}{\sqrt{1-0{,}36}} = \dfrac{m^A}{\sqrt{0{,}64}} = \dfrac{m^A}{0{,}8}$
- $m^B = \dfrac{m^A}{0{,}8} = 1{,}25 \cdot m^A$
- $m^B = 1{,}25 \cdot 50 = 62{,}5\ \text{kg}$

c Bereken de massa van Anna gezien vanuit het referentiestelsel van Bea.

- gezien vanuit Bea heeft Anna een snelheid van 0,6c
- gezien vanuit Bea heeft Anna een massa van 62,5 kg

d Bereken bij welke snelheid Bea 100 kg weegt volgens Anna.

- $m^B = \dfrac{m^A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
- $100 = \dfrac{50}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2$
- $\dfrac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4 \rightarrow 1 = 4 \cdot (1-\frac{v^2}{c^2}) \rightarrow 1-\dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{4} \rightarrow \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{3}{4}$
- $v^2 = \frac{3}{4}c^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c$
- $v = 0{,}866 \cdot c$

3*** **a** Bereken met de klassieke formule de kinetische energie van een voorwerp met een rustmassa van 2,0 kg en een snelheid van 0,8c.

- $E_K = \frac{1}{2}m_0 \cdot v^2$
- $E_K = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0{,}8c)^2 = 0{,}64 \cdot c^2$
- $E_K = 0{,}64 \cdot (3{,}00 \cdot 10^8)^2 = 5{,}76 \cdot 10^{16}\ \text{J}$

b Bereken met $E_K = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$ de kinetische energie van een voorwerp met een rustmassa van 2,0 kg en een snelheid van 0,8c.

- $E_K = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$
- $E_K = \dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{(0{,}8c)^2}{c^2}}} \cdot c^2 - 2 \cdot c^2 \rightarrow E_K = \dfrac{2}{\sqrt{1-0{,}64}} \cdot c^2 - 2 \cdot c^2$

- $E_K = \frac{2}{0,6} \cdot c^2 - 2 \cdot c^2 = 3,33 \cdot c^2 - 2 \cdot c^2 = 1,33 \cdot c^2$
- $E_K = 1,33 \cdot (3,00 \cdot 10^8)^2 = 1,2 \cdot 10^{17}$ J

c Hoeveel procent verschil is er tussen de klassieke en de relativistische kinetische energie?
- klassiek: $E_K = 0,64 \cdot c^2$
- relativistisch: $E_K = 1,33 \cdot c^2$
- procent verschil: $\frac{1,33 - 0,64}{0,64} \cdot 100\% = 108\%$

4*** **a** Bereken de rustenergie van een heliumkern.
- rustmassa is 4u = $4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 6,64 \cdot 10^{-27}$ kg

b Bereken de snelheid van de heliumkernen met $E_K = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2$
- $E_K = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2$
- $3,5 \cdot 10^{-9} = \frac{1}{2} \cdot 6,64 \cdot 10^{-27} \cdot v^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 1,054 \cdot 10^{18}$
- $v = 1,0 \cdot 10^9$ m/s

c Leg uit waarom deze formule voor de kinetische energie niet gebruikt mag worden.
- de berekende snelheid is groter dan de lichtsnelheid
- deze snelheid is onmogelijk

d Bereken de snelheid van de heliumkernen met $E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2$
- $3,5 \cdot 10^{-9} = \frac{6,64 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{6,64 \cdot 10^{-27}}{3,5 \cdot 10^{-9}} \cdot c^2 = 0,170743$
- $1 - \frac{v^2}{c^2} = 2,9153 \cdot 10^{-2} \quad \rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 0,97085 \quad \rightarrow \quad v^2 = 8,7376 \cdot 10^{16}$
- $v = 8,7376 \cdot 10^{16} = 2,96 \cdot 10^8$ m/s

5*** **a** Bereken met hoeveel procent de totale energie van het ruimteschip toeneemt.
- $E_{totaal} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \quad | \quad E_{rust} = m_0 \cdot c^2$
- $\frac{E_{totaal}}{E_{rust}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ met $v = \frac{1}{3} c$

- $\frac{E_{totaal}}{E_{rust}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(\frac{1}{3}c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = \frac{1}{0{,}9428} = 1{,}06066$
- $\frac{E_{totaal}}{E_{rust}} = 1{,}06066 \quad \rightarrow \quad$ toename is 6,0%

b Bereken de snelheid van het ruimteschip bij deze energie.
- $E_{totaal} = 2\,E_{rust}$
- $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = 2 \cdot m_0 \cdot c^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2$
- $\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4 \quad \rightarrow \quad 1 = 4 \cdot (1-\frac{v^2}{c^2}) \quad \rightarrow \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$
- $v^2 = \frac{3}{4}c^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c$
- $v = 0{,}866 \cdot c$

6* a** Toon aan dat bij deze reactie 23,8 MeV energie vrijkomt.
- voor de reactie: $2 \cdot \text{massa}\,^2_1H - 2 \cdot m_e$
- na de reactie: $\text{massa}\,^4_2He - 2 \cdot m_e$
- verschil = $2 \cdot 2{,}014102 - 4{,}002603 = 2{,}5601 \cdot 10^{-2}$ u
- $1u = 931{,}49$ MeV
- $2{,}5601 \cdot 10^{-2} \cdot 931{,}49 = 23{,}847 = 23{,}8$ MeV

b Bereken hoeveel ^2_1H kernen er jaarlijks nodig zijn om Nederland van energie te voorzien.
- 1 MeV $= 1{,}6022 \cdot 10^{-13}$ J $\quad \rightarrow \quad$ 23,847 MeV $= 3{,}820778 \cdot 10^{-12}$ J
- nodig: $30\text{ PJ} = 30 \cdot 10^{15}$ J
- twee ^2_1H kernen geven $3{,}820778 \cdot 10^{-12}$ J $\quad \rightarrow \quad$ één kern geeft $1{,}910389 \cdot 10^{-12}$ J
- aantal kernen nodig per jaar: $\frac{30 \cdot 10^{15}}{1{,}910389 \cdot 10^{-12}} = 1{,}57036 \cdot 10^{28} = 1{,}57 \cdot 10^{28}$ kernen

c Bereken hoeveel ^2_1H kernen er gemiddeld in een kilogram water zitten.
- de molecuulmassa van water is $18\,u = 18 \cdot 1{,}66054 \cdot 10^{-27} = 2{,}988972 \cdot 10^{-26}$ kg
- aantal H_2O moleculen per kg $= \frac{1}{2{,}988972 \cdot 10^{-26}} = 3{,}34563 \cdot 10^{25}$
- 0,0115 % hiervan bevat $^2_1H \quad \rightarrow \quad 0{,}0115 \cdot 3{,}34563 \cdot 10^{25} = 3{,}84748 \cdot 10^{23}$

d Bereken hoeveel kilogram water er jaarlijks nodig is om Nederland van energie te voorzien.
- aantal ^2_1H kernen nodig per jaar: $1{,}57036 \cdot 10^{28}$

- aantal ${}^{2}_{1}H$ kernen per kg water: $3{,}84748 \cdot 10^{23}$
- aantal kg water nodig per jaar: $\dfrac{1{,}57036 \cdot 10^{28}}{3{,}84748 \cdot 10^{23}} = 4{,}08153 \cdot 10^{4}$ kg
- (dit is ongeveer 41 m^3 water per jaar)

De formule van Einstein

2p **a** Leg uit waarom de baan van de ionen cirkelvormig is.

- de lorentzkracht staat voortdurend loodrecht op de richting van de snelheid 1
- de lorentzkracht is constant 1
- een constante kracht loodrecht op de richting van de snelheid geeft een cirkelvormige baan

3p **b** Leid deze formule af uit formules in Binas.

- omlooptijd: $T = \dfrac{2\pi \cdot r}{v} \quad \rightarrow \quad f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{v}{2\pi \cdot r}$ 1
- $\Sigma F = F_{mpz} = F_L \quad \rightarrow \quad \dfrac{m \cdot v^2}{r} = B \cdot q \cdot v \quad \rightarrow \quad v = \dfrac{B \cdot q \cdot r}{m}$ 1
- $f = \dfrac{1}{2\pi \cdot r} \cdot \dfrac{B \cdot q \cdot r}{m} \quad \rightarrow \quad f = \dfrac{Bq}{2\pi m}$ 1

2p **c** Bereken voor één van de ionen de frequentie waarmee hij ronddraaide.

- gebruik $f = \dfrac{Bq}{2\pi m}$ met massa in kilogram 1
- voor Si–28: $f = \dfrac{8{,}5 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{2\pi \cdot 28 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} = 4{,}66 \cdot 10^{6} = 4{,}7 \cdot 10^{6}$ Hz 1
- voor Si–29: $f = \dfrac{8{,}5 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{2\pi \cdot 29 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} = 4{,}50 \cdot 10^{6} = 4{,}5 \cdot 10^{6}$ Hz

3p **d** Laat zien dat de berekende energie E_1 van het eerste gamma-foton γ_1 overeenkomt met de gemeten golflengte λ_1.
Hint: bereken eerst de frequentie van het foton.

- $f = \dfrac{c}{\lambda} \quad \rightarrow \quad f = \dfrac{2{,}9979246 \cdot 10^{8}}{3{,}5031716 \cdot 10^{-13}} = 8{,}5577441 \cdot 10^{20}$ Hz 1
- $E = h \cdot f \quad \rightarrow \quad E = 6{,}6260690 \cdot 10^{-34} \cdot 8{,}5577441 \cdot 10^{20} = 5{,}6704203 \cdot 10^{-13}$ J 1
- $5{,}6704203 \cdot 10^{-13}\ J = \dfrac{5{,}6704203 \cdot 10^{-13}}{1{,}6021765 \cdot 10^{-19}} = 3539198{,}3\ eV \rightarrow$ komt overeen 1

3p **e** Ga met een berekening uitgaande van de gegevens in de figuren 1 en 2 na of met de experimenten de formule van Einstein met een nauwkeurigheid van één op tien miljoen is aangetoond.

- gebruik $E = m \cdot c^2$; massa aflezen uit figuur 1
  $m = 9{,}0967794 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}6605388 \cdot 10^{-27} \cdot (2{,}9979246 \cdot 10^{8})^2 = 1{,}35761961 \cdot 10^{-12}$ J 1

- $1{,}35761961 \cdot 10^{-12}\ \text{J} = \dfrac{1{,}35761961 \cdot 10^{-12}}{1{,}6021765 \cdot 10^{-19}} = 8473595{,}8\ \text{eV}$ 1
- de eerste 7 significante cijfers komen overeen nauwkeurigheid van 1 op 10 miljoen 1

2p **f** Leg uit in welk instituut dat was.
- in Grenoble wordt de golflente van de γ-fotonen gemeten
- de γ-fotonen ontstaan bij het verval van Si–29 1
- neutronen zijn nodig om Si–28 om te zetten naar Si–28
- in Grenoble is een neutronenbron nodig om Si–29 te maken 1

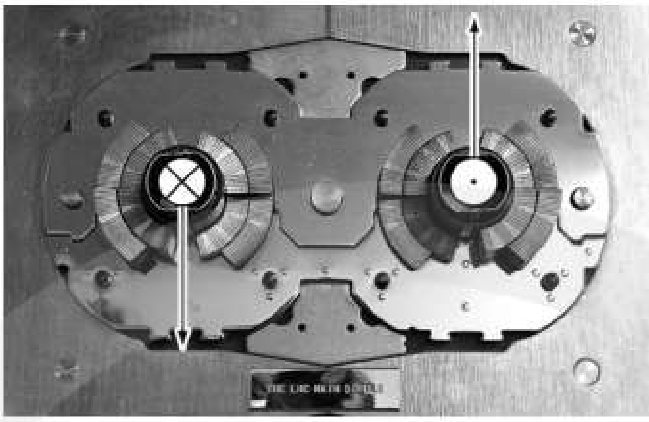
LHC

4p **a** Bereken hoe vaak de protonen deze spanning moeten doorlopen om een snelheid van $1{,}2 \cdot 10^7$ m/s te krijgen als ze vanuit stilstand versneld worden.
- elektrische energie wordt kinetische energie $\rightarrow$ $q \cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ 1
- $E_K = \frac{1}{2} \cdot 1{,}67262 \cdot 10^{-27} \cdot (1{,}2 \cdot 10^7)^2 \rightarrow E_K = 1{,}204286 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$ 1
- energie per rondje: $E_{el} = q \cdot U \rightarrow E_{el} = 1{,}6022 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}0 \cdot 10^3 = 8{,}011 \cdot 10^{-16}\ \text{J}$ 1
- $\text{aantal rondjes} = \dfrac{\text{totale energie}}{\text{energie per rondje}}$
- $\text{aantal rondjes} = \dfrac{1{,}204286 \cdot 10^{-13}}{8{,}011 \cdot 10^{-16}} = 150{,}33 = 150\ \text{rondjes}$ 1

3p **b** Bereken hoeveel procent de snelheid van de protonen dan verschilt van de lichtsnelheid.
- $s = v_{gem} \cdot t$
- $s = 2\pi \cdot r = \pi \cdot 8{,}4858 \cdot 10^3 = 2{,}66589269 \cdot 10^4\ \text{m}$ (niet afronden) 1
- omlooptijd: $T = \dfrac{1}{f} \rightarrow T = \dfrac{1}{11245} = 8{,}89284126 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$ (niet afronden) 1
- $v_{gem} = \dfrac{s}{t} \rightarrow v_{gem} = \dfrac{2{,}66589269 \cdot 10^4}{8{,}89284126 \cdot 10^{-5}} = 2{,}99779633 \cdot 10^8\ \text{m/s}$
- procent verschil: $\dfrac{2{,}99792458 \cdot 10^8 - 2{,}99779633 \cdot 10^8}{2{,}99792458 \cdot 10^8} \cdot 100\% = 0{,}0043\%$ 1

2p **c** Leg uit aan de hand van figuur 1 dat een proton nooit de lichtsnelheid bereikt, hoe groot de kinetische energie ook is.
- als de snelheid van het proton de lichtsnelheid nadert wordt de massa van het proton erg groot 1
- bij de lichtsnelheid is de massa oneindig groot en is er dus oneindig veel energie nodig om de snelheid te laten toenemen 1

2p **d** Teken in het rechterdeel van figuur 2 de richtingen van de magneetvelden in elke buis afzonderlijk.
- één pijl naar boven en één pijl naar beneden 1
- richting van beide pijlen juist 1



4p **e** Bereken de sterkte van het magneetveld.

- $F_{mpz} = \frac{E}{r}$ met $r = \frac{d}{2} = \frac{8{,}4858 \cdot 10^3}{2} = 4{,}2429 \cdot 10^3$ m 1
- $F_{mpz} = \frac{7{,}0 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}}{4{,}2429 \cdot 10^3} = 2{,}64333 \cdot 10^{-10}$ N 1
- $F_{mpz} = F_L = B \cdot q \cdot v$ 1
- $B \cdot q \cdot v = 2{,}64333 \cdot 10^{-10} \quad \rightarrow \quad B = \frac{2{,}64333 \cdot 10^{-10}}{1{,}6022 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8} = 5{,}5$ T 1

4p **f** Bereken hoeveel protonen er in één groepje zitten.

- $I = \frac{Q}{t} \quad \rightarrow \quad Q = I \cdot t$
- omlooptijd: $T = \frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{11245} = 8{,}89284126 \cdot 10^{-5}$ s (niet afronden) 1
- $Q = 0{,}582 \cdot 8{,}89284 \cdot 10^{-5} = 5{,}17563 \cdot 10^{-5}$ C 1
- aantal protonen: $n = \frac{5{,}17563 \cdot 10^{-5}}{1{,}6022 \cdot 10^{-19}} = 3{,}23033 \cdot 10^{14}$ 1
- aantal protonen per groepje: $n = \frac{3{,}23033 \cdot 10^{14}}{2808} = 1{,}15 \cdot 10^{11}$ protonen 1

3p **g** Laat met een berekening zien of de energie van de twee botsende protonen genoeg is om een Higgs-deeltje te laten ontstaan.

- Higgs deeltje maken: $E = m \cdot c^2$ met $m = 1{,}0 \cdot 10^{-25}$ kg
- $E = 1{,}0 \cdot 10^{-25} \cdot (3{,}0 \cdot 10^8)^2 = 9{,}0 \cdot 10^{-9}$ J 1
- $9{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{J} = \frac{9{,}0 \cdot 10^{-9}}{1{,}6022 \cdot 10^{-19}} = 5{,}617 \cdot 10^{10}$ eV $= 0{,}0056$ TeV 1
- 7,0 TeV is ruim voldoende om een Higgs deeltje te maken 1

15.5 Algemene relativiteitstheorie

1** **a** Beschrijf het equivalentieprincipe met eigen woorden.
- je kunt geen natuurkundig onderscheid maken tussen een referentiestelsel dat versnelt en een referentiestelsel waarin zwaartekracht werkt
- experimenten die je uitvoert in een referentiestelsel dat versnelt geven dezelfde resultaten dan dezelfde experimenten uitgevoerd in een referentiestelsel waarin zwaartekracht aanwezig is

b Leg uit wat Vincent met deze stelling bedoelt.
- Vincent doelt op de invloed die massa heeft op de kromming van de ruimte
- een voorwerp valt niet vanwege een kracht (de zwaartekracht) maar beweegt in een rechte lijn in een ruimte die gekromd is

c Ben je het met Vincent eens?
- kracht is de oorzaak van een versnelling of vertraging
- bij het vallen is er sprake van een versnelling en er moet dus een kracht werken
- Vincent hanteert de relativiteitstheorie maar gaat voorbij aan de definitie van kracht

2** **a** Welke twee manieren zijn dit?
- trage massa, afkomstig uit de 2e wet: $\Sigma F = m \cdot a \quad \rightarrow \quad m = \dfrac{\Sigma F}{a}$
- zware massa, afkomstig uit de gravitatiewet: $F_{grav} = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

b Leg uit hoe de grootheid massa in de theorie van Newton wordt gebruikt.
- trage massa: de hoeveelheid kracht die nodig is om een voorwerp een bepaalde versnelling te geven is afhankelijk van de massa
- er is een recht-evenredig verband tussen de resulterende kracht en de versnelling
- zware massa: massa's oefenen krachten op elkaar uit
- er is een recht-evenredig verband tussen de massa en de kracht die het uitoefent op andere massa's

3*** **a** Leg uit waarom licht door de zwaartekracht afbuigt. Maak bij je uitleg gebruik van een tekening.
- versnelt het voorwerp en gaat het licht in een rechte lijn dan ziet de waarnemer in het referentiestelsel van het versnelde voorwerp dat licht afbuigt
- zwaartekracht is equivalent met een versnelling
- bij aanwezigheid van zwaartekracht buigt het licht af

b Leg uit hoe je met E = mc² kunt concluderen dat licht afbuigt door de zwaartekracht.

- licht bestaat uit fotonen met energie: $E_{foton} = h \cdot f$
- de foton-energie correspondeert met massa
- deze massa ingevuld in de gravitatiewet van Newton geeft een zwaartekracht
- door de zwaartekracht buigt het foton af

c Bereken de massa van een foton met en golflengte van 500 nm.

- $h \cdot f = h \cdot \dfrac{c}{\lambda} = m \cdot c^2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{h}{\lambda} = m \cdot c$
- $\dfrac{h}{\lambda} = m \cdot c \quad \rightarrow \quad m = \dfrac{h}{\lambda \cdot c}$
- $m = \dfrac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{500 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}} = 4{,}42 \cdot 10^{-36}$

d Bereken de zwaartekracht op dit foton bij de oppervlakte van de aarde.

- $F_Z = m \cdot g \quad \text{met} \quad g = 9{,}81\, m/s^2$
- $F_z = 4{,}42 \cdot 10^{-36} \cdot 9{,}81 = 4{,}33 \cdot 10^{-35}$ N

Vallend foton

2p **a** Geef de reactievergelijking van het ontstaan van ${}^{57}_{26}Fe$.

- ${}^{57}_{27}Co + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{57}_{26}Fe$
- ${}^{57}_{27}Co$ en elektron aan linkerkant 1
- massagetal en atoomnummer klopt 1

2p **b** Leg uit dat de korte halveringstijd geen probleem is voor deze voortdurende stroom γ-fotonen.

- de halveringstijd van ${}^{57}_{27}Co$ is groot (270 dagen) 1
- tijdens het experiment wordt steeds nieuw ${}^{57}_{26}Fe$ aangemaakt 1

3p **c** Leid de uitdrukking voor E_Z af.

- $E = mc^2 = hf \quad \rightarrow \quad m = \dfrac{hf}{c^2}$ 1
- $E_z = m \cdot g \cdot h \quad \rightarrow \quad E_Z = \dfrac{hf_h}{c^2} \cdot g \cdot H$ 1
- completeren (afleiding helemaal correct) 1

3p **d** Bereken deze verhouding bij dit experiment.

- gebruik $E_{foton} = h \cdot f$ 1
- $E_Z = \dfrac{hf_h}{c^2} gH \quad \rightarrow \quad \dfrac{E_Z}{E_{foton}} = \dfrac{gH}{c^2}$ 1
- $\dfrac{E_Z}{E_{foton}} = \dfrac{9{,}81 \cdot 22{,}6}{(2{,}9979 \cdot 10^{8})^2} = 2{,}47 \cdot 10^{-15}$ 1

15.6 Gekromde ruimte

1[**] **a** Bereken de dichtheid van Europa.

- inhoud van een bol is $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
- $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \rho = \frac{4{,}8 \cdot 10^{22}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (1{,}568 \cdot 10^6)^3} = 2{,}97 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

b Breken de ontsnappingssnelheid van Europa.

- $v^2_{ontsnap} = 2 \cdot G \cdot \frac{m}{r}$
- $v^2_{ontsnap} = 2 \cdot 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4{,}8 \cdot 10^{22}}{1{,}568 \cdot 10^6} = 4{,}086 \cdot 10^6$
- $v_{ontsnap} = 2{,}02 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

c Bereken de schwarzschildstraal van Europa.

- $R_S = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$
- $R_S = \frac{2 \cdot 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{22}}{(2{,}9979 \cdot 10^8)^2} = 7{,}1287 \cdot 10^{-5} = 7{,}13 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
- (een bol met een straal van 0,0713 mm is nauwelijks zichtbaar)

2[**] **a** Verandert de schwarzschildstraal van de zon als ze een rode reus is geworden?

- de schwarzschildstraal bereken je met $R_S = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$
- G en c zijn constant
- de schwarzschildstraal is alleen afhankelijk van de massa
- als de zon een rode reus is geworden maar nog geen massa heeft verloren blijft de schwarzschildstraal hetzelfde

3[**] **a** Leg uit waarom neutronenster met een straal van 10 km geen zwart gat is.

- de schwarzschildstraal van de zon is 2,95 km $\rightarrow$ dit is minder dan 10 km
- licht aan het oppervlak kan ontsnappen aan de gravitatiekracht
- een neutronenster met een straal van 10 km is geen zwart gat

b Bereken de dichtheid van een neutronenster. Gebruik de massa van de zon.

- opzoeken: de massa van de zon is $m_{zon} = 1{,}9884 \cdot 10^{30}$ kg
- bol met een straal van 10 km: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot (1{,}0 \cdot 10^4)^3 = 4{,}1888 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$
- $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \rho = \frac{1{,}9884 \cdot 10^{30}}{4{,}18879 \cdot 10^{12}} = 4{,}747 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$

c Leid deze formule af.

- $R_S = \dfrac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$ en $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \left\{\dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3\right\}$
- stel gelijk: $R_S = r$
- $r = \dfrac{2 \cdot G}{c^2} \cdot \rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 \rightarrow 1 = \dfrac{8\pi \cdot G \cdot \rho}{3c^2} \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}$
- $r = \sqrt{\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}}$

d Bereken bij welke straal een neutronenster een zwart gat wordt.

- $r = \sqrt{\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}}$
- $r = \sqrt{\dfrac{3 \cdot (3{,}0 \cdot 10^8)^2}{8\pi \cdot 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}747 \cdot 10^{17}}} = \sqrt{3{,}3916 \cdot 10^8} = 1{,}84 \cdot 10^4 \text{ m} = 18{,}4 \text{ km}$

e Bereken de massa van deze neutronenster uitgedrukt in zonmassa's.

- de zon als neutronenster heeft een straal van 10 km
- een neutronenster die nét een zwart gat is geworden heeft een straal van 18,4 km
- de straal is: 18,4 / 10 = 1,84 groter geworden
- het volume is $1{,}84^3 = 6{,}23$ keer zo groot geworden
- de massa van de neutronenster is 6,23 keer de zonmassa.

4++ **a** Leid deze formule af.

- $r = \sqrt{\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}} \rightarrow r^3 = \left(\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}\right)^{3/2}$ (zie vorige vraag)
- $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}\right)^{3/2}$
- $m = \rho \cdot V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \rho \cdot \left(\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}\right)^{3/2} \rightarrow m = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G}\right)^{3/2} \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$
- $\sqrt{\rho} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G}\right)^{3/2} \dfrac{1}{m} \rightarrow$
- $\rho = \dfrac{4^2}{3^2}\pi^2 \cdot \left(\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{m^2} \rightarrow \rho = \dfrac{4^2}{3^2}\pi^2 \cdot \dfrac{3^3 \cdot c^6}{8^3\pi^3 \cdot G^3 \cdot m^2}$
- $\rho = \dfrac{4^2 \cdot 3 \cdot c^6}{8^3\pi \cdot G^3 \cdot m^2} = \dfrac{3 \cdot c^6}{32\pi \cdot G^3 \cdot m^2}$

b Bereken de minimale dichtheid van een zwart gat met een schwarzschildstraal van 1,0 mm.

- gebruik: $r = \sqrt{\dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}} \rightarrow r^2 = \dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot \rho}$
- $\rho = \dfrac{3c^2}{8\pi \cdot G \cdot r^2}$ | $r = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ m
- $\rho = \dfrac{3 \cdot (3{,}0 \cdot 10^8)^2}{8\pi \cdot 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-3})^2} \rightarrow \rho = 1{,}61 \cdot 10^{32}\ \text{kg/m}^3$

5*** **a** Beredeneer of de speciale relativiteit ervoor zorgt dat de GPS-klok voorloopt of achterloopt met een klok op aarde.

- speciale relativiteit: de GPS-klok heeft een snelheid
- de GPS-klok loopt achter

b Beredeneer of de algemene relativiteit ervoor zorgt dat de GPS-klok voorloopt of achterloopt met een klok op aarde.

- algemene relativiteit: de zwaartekracht is kleiner bij de GPS-klok
- de GPS-klok loopt voor

c Bereken de dagelijkse afwijking van de GPS-klok vanwege zijn snelheid (speciale relativiteit).

- $\dfrac{\Delta t_{\text{klok B}}}{\Delta t_{\text{klok A}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- $\dfrac{\Delta t_{\text{klok B}}}{\Delta t_{\text{klok A}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{(4{,}0 \cdot 10^3)^2}{(3{,}0 \cdot 10^8)^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 1{,}778 \cdot 10^{-10}}}$

d Leg uit waarom je rekenmachine dit niet kan uitrekenen.

- je rekenmachine rekent maar met 9 cijfers
- dit is niet genoeg voor deze berekening

e Vul de formule in waarmee je de dagelijkse afwijking van de GPS-klok vanwege zijn hoogte (algemene relativiteit) kunt uitrekenen.

- $R_{\text{S aarde}} = 8{,}86 \cdot 10^{-3}$ m | $r_{\text{aarde}} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m | $\dfrac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \ldots$
- $\dfrac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \dfrac{R_S}{r}}$
- $\dfrac{\Delta t_{\text{aarde}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \dfrac{8{,}86 \cdot 10^{-3}}{6{,}371 \cdot 10^6}} \rightarrow \dfrac{\Delta t_{\text{aarde}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - 1{,}39 \cdot 10^{-9}}$

f Leg uit waarom je rekenmachine dit niet kan uitrekenen.

- je rekenmachine rekent maar met 9 cijfers
- dit is niet genoeg voor deze berekening