9 Trillingen

vwo

9.0 Overzicht

9.1 Wat is een trilling?
– Wat is een periodieke beweging?
– Wat is de evenwichtsstand?
– Welke twee eigenschappen heeft een trilling?
– Wat de uitwijking, wat is het symbool van de uitwijking en wat is de eenheid?
– Wat is de amplitude, wat is het symbool van de amplitude en wat is de eenheid?
– Wat is de trillingstijd of periode, wat is het symbool en wat is de eenheid?
– Wat is de frequentie, wat is het symbool van frequentie en wat is de eenheid?
– Met welke formule bereken je de frequentie uit de trillingstijd?
– Wat is een (u, t)-diagram?
– Wat is demping?

9.2 Het meten van een trilling
– Wat is een oscilloscoop?
– Wat is de tijdbasis bij een oscilloscoop en wat is de eenheid?
– Wat is de gevoeligheid bij een oscilloscoop en wat is de eenheid?
– Waarvoor dient een elektrocardiogram (ECG)?
– Waarvoor dient een seismograaf?

9.3 Fase en gereduceerde fase
– Wat geeft de fase aan?
– Wat is het symbool voor fase?
– Waarom heeft de fase geen eenheid?
– Hoe bereken je de fase?
– Wat is de gereduceerde fase?
– Wat is het symbool voor de gereduceerde fase?
– Wat is het faseverschil en hoe bereken je het faseverschil?
– Wat betekent "in fase" en "in tegenfase"?
– Wanneer zijn twee trillingsbronnen coherent?

9.4 Harmonische trilling
– Wanneer is een trilling harmonisch?
– Welke vorm heeft het (u, t)-diagram bij een harmonische trilling?
– Hoe zien de (v, t)- en de (a, t)-diagrammen eruit bij een harmonische trilling?
– Wat is een massaveersysteem?
– Welke formule geldt voor een massaveersysteem?
– Wat is een slinger en welke formule geldt er voor een slinger?
– Wanneer mag je de formule van een slinger niet gebruiken?

9.5 De energie van een trillend voorwerp

- Welke twee soorten energie zijn er aanwezig in een trillend voorwerp?
- Met welke formule bereken je de totale energie?
- Hoe bereken je de totale energie in de uiterste stand?
- Hoe bereken je de totale energie in de evenwichtsstand?
- Wat gebeurt er als een wrijvingskracht aanwezig is?
- Met welke formule bereken je de maximale snelheid?

9.6 Resonantie

- Wat is de eigenfrequentie?
- Wat is aandrijven en wat is de aandrijffrequentie?
- Wat is resonantie en wanneer treedt resonantie op
- Wat gebeurt er met de amplitude als resonantie optreedt?

9.7 Wiskundige beschrijving

- Voor welke grootheid gebruik je de eenheid radiaal?
- Hoe bereken je de hoek in radiaal?
- Hoe reken je om van graden naar radialen en terug?
- Wat is een sinusfunctie en welke vorm heeft een sinusfunctie?
- Wat is een samengestelde trilling?
- Hoe bereken je de uitwijking bij een samengestelde trilling?
- Wat kun je bereiken met het optellen van harmonische trillingen?
- Wat is het voordeel als je veel harmonische trillingen optelt?

9.1 Wat is een trilling?

Een periodieke beweging

Een periodiek beweging is een beweging die zich herhaalt. Na tussentijd T begint de beweging opnieuw, met dezelfde waarden voor **plaats**, **snelheid** en **versnelling**.

Periodieke beweging: **op tijdstip t + T zijn plaats, snelheid en versnelling hetzelfde als op tijdstip t.**

VOORBEELD periodieke bewegingen

- De wijzers van een analoge klok:
  - secondewijzer: T = 60 seconden (1 minuut)
  - minutenwijzer: T = 3600 seconden (1 uur)
  - urenwijzer: T = 43200 seconden (12 uur)
- De maan die om de aarde draait: T = 27,322 dagen.
- De aarde die om de zon draait: T = 365,256 dagen.
- Een trillende snaar.
- Een schommel.

De evenwichtsstand

Het bewegen van voorwerpen wordt vaak tegengewerkt door wrijvingskrachten. Om zo'n beweging dan in stand te houden moet er een kracht worden uitgeoefend die de wrijvingskracht opheft. Stopt de aandrijvingskracht, dan zorgt de wrijvingskracht ervoor dat het voorwerp snelheid verliest en tot stilstand komt. Bij een periodieke beweging onderscheiden we twee situaties:

– stilstaan gebeurt op een willekeurige plaats → er is GEEN evenwichtsstand
– stilstaan gebeurt altijd op dezelfde plaats → er is WEL een evenwichtsstand

Alleen in de tweede situatie is er een **evenwichtsstand**.

De evenwichtsstand is de plaats waar het voorwerp tot stilstand komt als de aandrijvingskracht ophoudt.

De evenwichtsstand is de plaats van het voorwerp als het met rust wordt gelaten. Deze toestand nemen we als uitgangspunt. Vervolgens geven we het een duwtje, waardoor het in beweging komt. Daarna oefenen we geen kracht meer uit. Na T seconden is het voorwerp terug op het vertrekpunt met dezelfde snelheid en dezelfde versnelling. Het voorwerp voert een periodieke beweging uit, waarbij het steeds de evenwichtsstand passeert. Een zich herhalende beweging om een evenwichtsstand noemen we een trilling. Bij een trilling komt het voorwerp na een **vaste tijd** op **dezelfde plaats** met **dezelfde snelheid** en **dezelfde versnelling** terug.

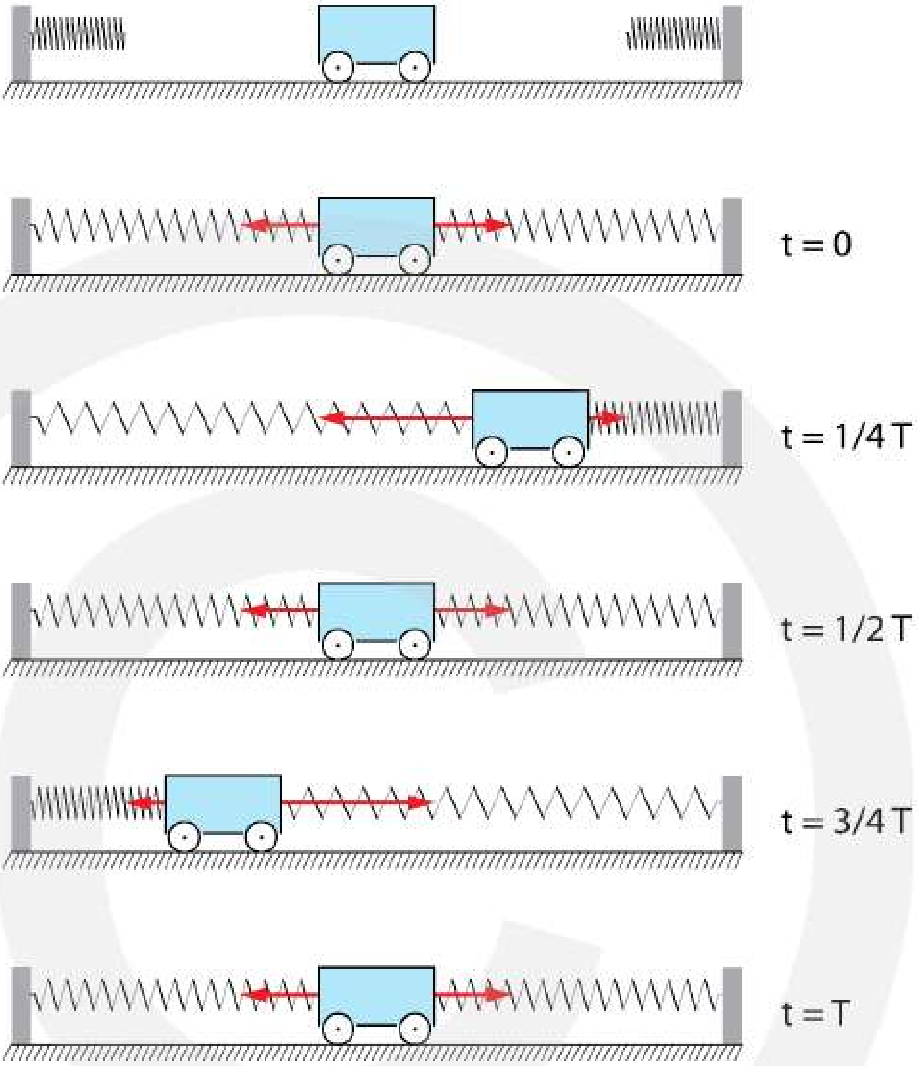
Een trilling is een periodieke beweging om een evenwichtsstand.

Als voorbeeld nemen we een kar die aan twee kanten met spiraalveren is vastgemaakt. Zie figuur 1. In het bovenste plaatje is de kar nog niet aan de veren bevestigd. Er werken dan geen horizontale krachten. We plaatsen de kar midden tussen de veren en maken de veren vast. De krachten waarmee de veren aan de kar trekken zijn even groot en tegengesteld gericht. Zie figuur 1, $t = 0$. De kar bevindt zich nu in de evenwichtsstand. Met een tijdelijke externe kracht (bijvoorbeeld duwen) verplaatsen we de kar naar rechts en laten hem los. We krijgen dan de situatie die is weergegeven in figuur 1, $t = ¼\ T$. De linker-veer, die verder is uitgerekt, oefent nu een grotere kracht uit op de kar dan de rechter-veer, die minder ver is uitgerekt. De resulterende kracht is naar het midden gericht, waardoor de kar gaat versnellen naar de evenwichtsstand. Als dit gebeurt wordt de kracht naar links steeds kleiner en de kracht naar rechts steeds groter.

Op een bepaald moment bevindt de kar zich in de evenwichtstand. Zie figuur 1, $t = ½\ T$. Op dit tijdstip zijn beide krachten weer gelijk en is de versnelling dus nul. De kar heeft nu zijn hoogste snelheid bereikt. De kar rijdt verder naar links en dan gebeurt het omgekeerde: de kracht naar rechts wordt groter dan de kracht naar links en de resulterende kracht is weer gericht naar de evenwichtsstand. Deze resulterende kracht is tegengesteld aan de bewegingsrichting en zorgt voor een vertraging. Op $t = ¾\ T$ bevindt de kar zich in de uiterste stand links en op $t = T$ bevindt de kar zich opnieuw in de evenwichtsstand. Dit proces herhaalt zich, waardoor de kar heen en weer gaat bewegen om de evenwichtsstand. De kar voert een trilling uit.

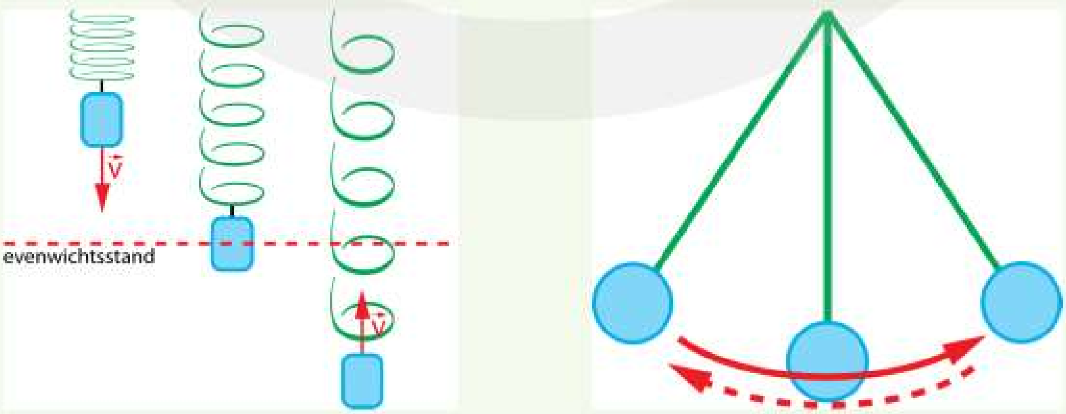
Bij een trillend voorwerp is de resulterende kracht steeds gericht naar de evenwichtsstand. In de evenwichtsstand geldt: $\Sigma F = 0$

Trillingen zijn overal te vinden. Ieder atoom en ieder elektron is voortdurend aan het trillen. De meeste trillingen houden na een tijdje op, doordat vanwege wrijving de beweging afremt. Hierdoor komt het voorwerp in de evenwichtsstand tot rust. Een externe kracht kan het voorwerp opnieuw uit de evenwichtsstand brengen, waarna het weer een tijdje trilt. Twee voorbeelden die je vaak tegenkomt zijn een massa aan een spiraalveer, en een slinger.



Figuur 1 Kar aan twee veren.

VOORBEELD massa aan een veer en een slinger



Figuur 2 Massa-veersysteem (links) en een slinger (rechts).

Om een trilling te kunnen beschrijven gaan we eerst een aantal grootheden en eenheden invoeren. In onderstaande tabel zijn ze te vinden.

Grootheid	Eenheid	Definitie
uitwijking u	meter (m)	u is de plaats van het voorwerp ten opzichte van de evenwichtsstand.
amplitude A	meter (m)	A is de maximale grootte van de uitwijking.
trillingstijd of periode T	seconde (s)	T is de tijd waarin één volledige trilling wordt uitgevoerd.
frequentie f	Hertz (Hz) $Hz = s^{-1}$	f is het aantal trillingen dat per seconde wordt uitgevoerd.

De **frequentie** is het omgekeerde van de trillingstijd.

$$f = \frac{1}{T} \qquad \leftrightarrow \qquad T = \frac{1}{f}$$

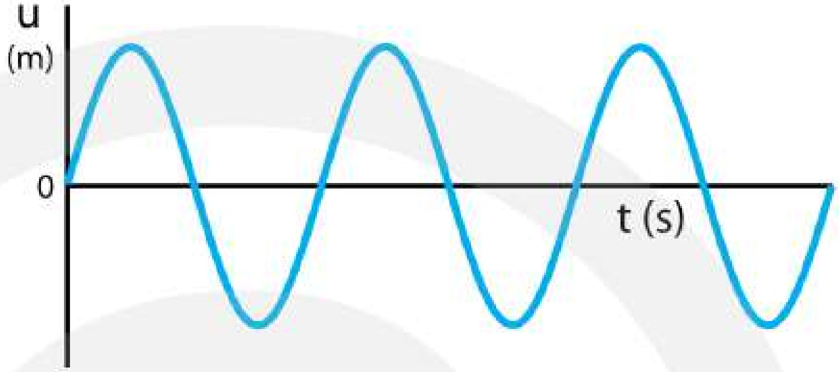
– T is de trillingstijd in seconde (s)
– f is de frequentie in Hertz (Hz)

Zoals je in figuur 1 kunt zien verandert de uitwijking voortdurend. Ook de snelheid en de versnelling veranderen tijdens een trilling.

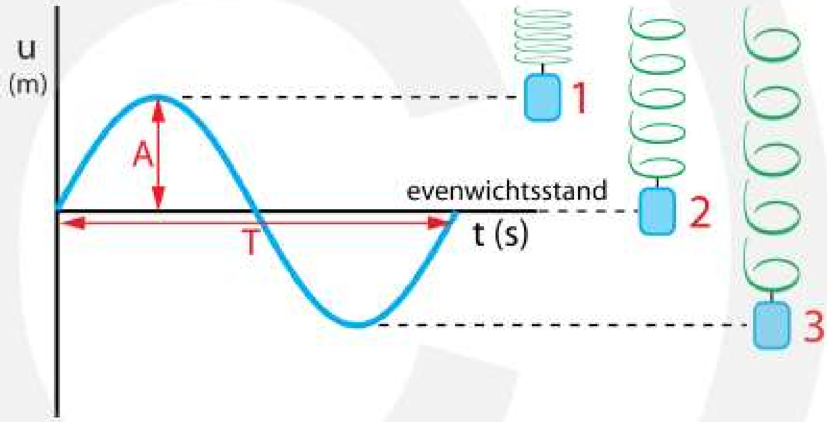
tijdsinterval of tijdstip	uitwijking	snelheid
0 – 1/4 T	wordt groter (u is positief)	wordt kleiner (v is positief)
1/4 T	is maximaal (u = A)	0
1/4 T – 1/2 T	wordt kleiner (u is positief)	wordt groter (v is negatief)
1/2 T	0	is maximaal (v is negatief)
1/2 T – 3/4 T	wordt kleiner (u is negatief)	wordt kleiner (v is negatief)
3/4 T	is minimaal (u = −A)	0
3/4 T – T	wordt groter (u is negatief)	wordt groter (v is positief)
T	0	is maximaal (v is positief)

Het (uitwijking, tijd)-diagram

Een (u, t)-diagram geeft op ieder tijdstip de uitwijking weer. Op de verticale as staat de uitwijking en op de horizontale as de tijd. In een (u, t)-diagram kun je de amplitude en de trillingstijd aflezen.



Figuur 3 (u, t)-diagram.



Figuur 4 (u, t)-diagram van een massa aan een veer. In de figuur zijn T en A aangegeven.

Nadat een massa-veersysteem in gang is gezet blijft het zonder verdere invloed van buiten trillen met een vaste frequentie. Dit is de **eigenfrequentie** van het massa-veersysteem.

In de **uiterste stand** (figuur 4, stand 1 en stand 3) is de grootte van de uitwijking maximaal, de snelheid nul en de versnelling maximaal. In de **evenwichtsstand** (figuur 4, stand 2) is de uitwijking is nul, de grootte van de snelheid maximaal en de versnelling nul.

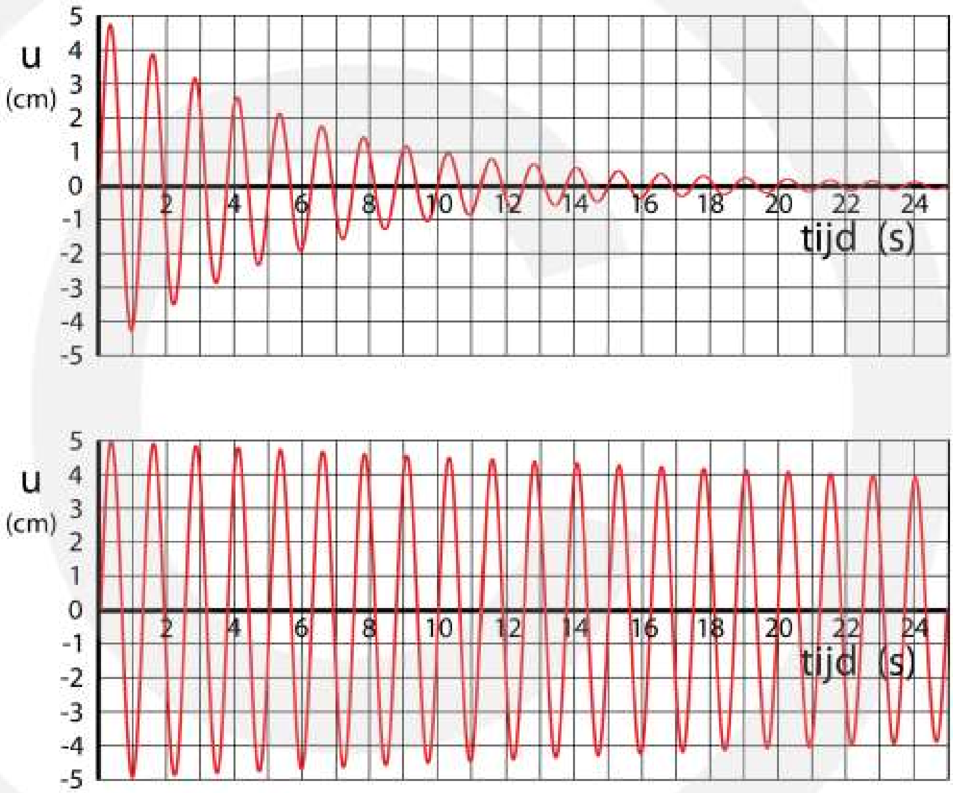
In onderstaande tabel zijn deze eigenschappen samengevat.

situatie	u (m)	v (m/s)	a (m/s²)
1	maximaal	0	maximaal
2	0	maximaal	0
3	maximaal	0	maximaal

Demping

Bij een **gedempte** trilling wordt door wrijving de beweging afgeremd. Er wordt energie omgezet in warmte. Hierdoor neemt de amplitude langzaam af en wordt uiteindelijk nul. Hoe groter de wrijving is hoe sneller de amplitude afneemt. Het is opvallend dat bij een gedempte trilling de frequentie niet verandert. Zie figuur 5.

Bij een gedempte trilling neemt de amplitude af en blijft de frequentie gelijk.



Figuur 5 (u, t)-diagram van een gedempte trilling. Boven: veel demping Onder: weinig demping

MERK OP

Als de demping klein is merk je er in één periode vrijwel niets van. Hoewel de beweging niet perfect periodiek is blijven we toch van een trilling spreken.

In figuur 5 is er een exponentiële afname van de amplitude. Zo'n demping komt het meeste voor. Op $t = t_{½}$ is de amplitude nog maar de helft van wat het was op $t = 0$. De tijd $t_{½}$ wordt de **halveringstijd** genoemd. Na twee keer de halveringstijd is de amplitude twee keer met de helft afgenomen, zodat er nog maar 25% van de oorspronkelijke amplitude aanwezig is. Na drie keer de halveringstijd is de amplitude drie keer met de helft afgenomen, zodat er nog maar 12,5% van de oorspronkelijke amplitude aanwezig is.

9.2 Het meten van een trilling

Om van een trilling het (u, t)-diagram te krijgen moet je snel achter elkaar de plaats meten. Hoe hoger de frequentie is hoe sneller je moet meten. In iedere periode moet je minimaal twee meting uitvoeren, omdat in één periode de trilling twee keer door de evenwichtsstand gaat.

– oscilloscoop –

Met een oscilloscoop kan snel achter elkaar een elektrische spanning worden gemeten. Het resultaat wordt op een beeldscherm weergegeven. Horizontaal staat de tijd en verticaal de spanning. De tijd waarin het scherm van links naar rechts wordt doorlopen kan worden aangepast. Is deze tijd gelijk aan de trillingstijd, dan zie je één trilling op het scherm. Met instelling van de verticale schaal kun je ervoor zorgen dat de trilling goed op het scherm past. Met een moderne oscilloscoop is het mogelijk om meer dan een miljard keer per seconde een meting te verrichten

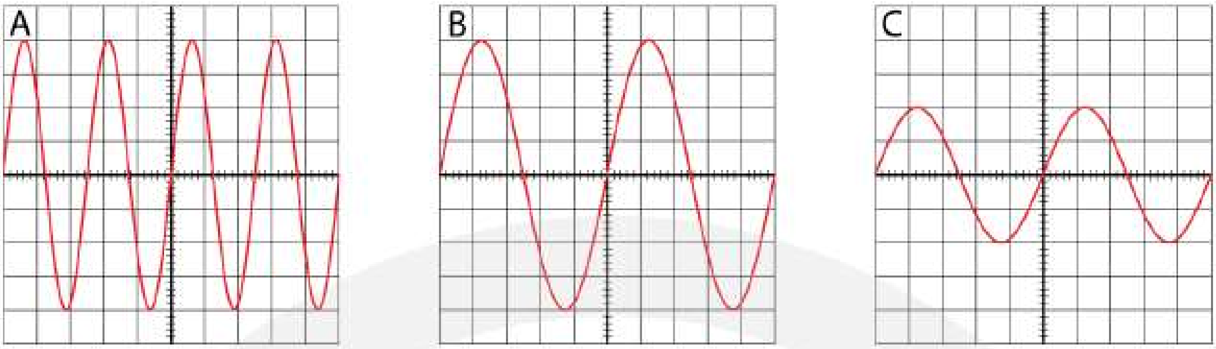
Figuur 6 Links: analoge oscilloscoop (schematisch), rechts: moderne digitale oscilloscoop

De **tijdbasis** staat horizontaal en wordt uitgedrukt in seconden per schaaldeel: **time / div**. Hierin is **div.** de afkorting van division (Engels: verdeling). Door het aantal schaaldelen te tellen en dit te vermenigvuldigen met de tijdbasis kan de tijd tussen twee tijdstippen worden bepaald.

De **gevoeligheid** staat verticaal en wordt uitgedrukt in volt per schaaldeel: **volt / div**. Door het aantal schaaldelen te tellen en dit te vermenigvuldigen met de gevoeligheid kan de spanning op ieder moment worden bepaald.

Tijdbasis (time / div)	**→**	**de tijdsduur van één hokje**	**(horizontaal)**
Gevoeligheid (volt / div)	**→**	**de spanning van één hokje**	**(verticaal)**

In figuur 7 zie je drie oscilloscoopbeelden van dezelfde trilling. Uitgaande van instelling A is de tijdbasis bij instelling B gehalveerd. De meting is twee keer zo snel en daarom zie je in plaats van 4 trillingen nog maar 2 trillingen op het scherm. Bij instelling C is de gevoeligheid gehalveerd, zodat de amplitude van 4 naar 2 hokjes is gegaan.



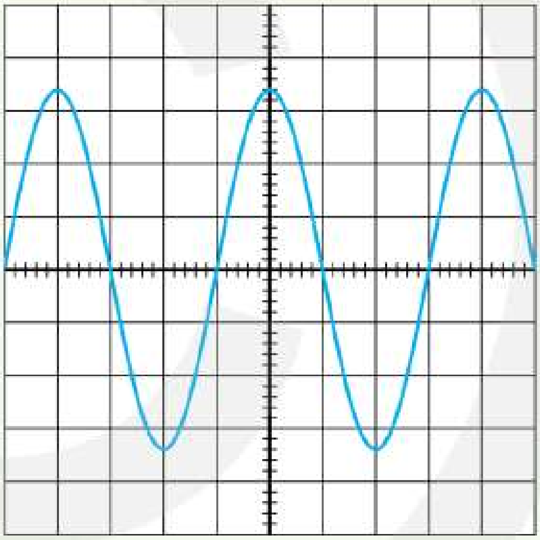
Figuur 7 Oscilloscoopbeeld met verschillende instellingen. Bij instelling B is de tijdbasis de helft van die van A. Bij instelling C is de gevoeligheid de helft van de van A en B.

VOORBEELD oscilloscoop

In figuur 8 is het (u, t)-diagram van een trilling weergegeven op een oscilloscoop. De instellingen van de oscilloscoop zijn:
– tijdbasis = 0,50 s / div
– gevoeligheid = 2,0 V / div

Bepaal de amplitude.
- amplitude = 3,4 hokjes
- $A = 3{,}4 \cdot 2 = 6{,}8$ V

Bepaal de frequentie.
- trillingstijd = 4 hokjes
- $T = 4 \cdot 0{,}5 = 2{,}0$ s
- $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{2{,}0} = 0{,}5$ Hz



Figuur 8

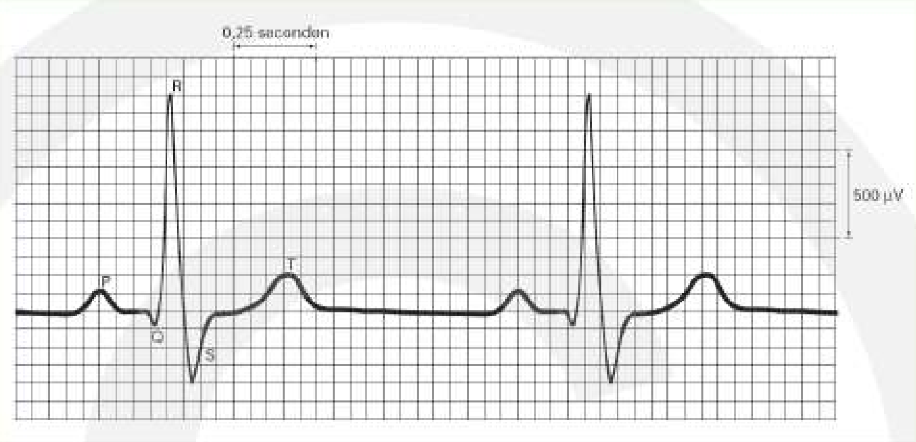
– elektrocardiogram (ECG) –

Een elektrocardiogram is een registratie van de spanningen die de hardspier laat samentrekken en ontspannen. Deze spanningen hebben een grootte van enkele millivolt. De ECG is in 1903 door Willen Einthoven (Nederland, 1860–1927) uitgevonden, waarvoor hij in 1924 de Nobelprijs voor geneeskunde krijgt.

Figuur 9 Links: apparaat voor ECG-meting. Rechts: patiënt monitor op een intensive care.

VOORBEELD elektrocardiogram (ECG)

Een kloppend hart kan worden opgevat als een trillend voorwerp. Bij een mens varieert de hartslag tussen 40 en 180 slagen per minuut. Om de hartspier te laten samentrekken worden elektrische spanningen in het hart opgewekt. Deze spanningen kunnen worden gemeten en geven een elektrocardiogram (ECG).



Figuur 10

Horizontaal: tijd met 0,05 s / div. Verticaal: spanning met 100 µV / div.

Bepaal de frequentie van het hart.
- tussen de maxima R zitten 25 hokjes
- 1 hokje correspondeert met 0,05 s
- trillingstijd (periode) is $25 \cdot 0{,}05 = 1{,}25$ s
- $f = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}80\ \text{Hz}$

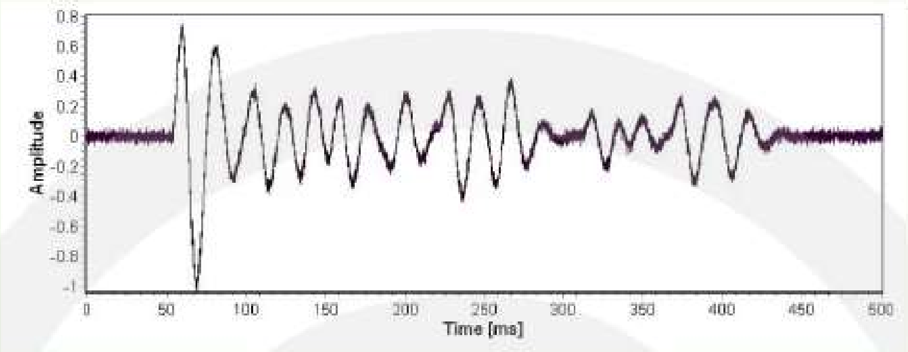
Bepaal het aantal hartslagen per minuut.
- $f = 0{,}80\ \text{Hz} \quad \rightarrow$ 0,80 slagen per seconde
- per minuut: $0{,}80 \cdot 60 = 48$ slagen per minuut

– seismograaf –
Trillingen van de aardkorst worden geregistreerd door een seismograaf.

Figuur 11 Een seismograaf waarmee trillingen van de aardkorst worden geregistreerd.

VOORBEELD seismogram

Met een seismograaf worden trillingen in de aardkorst gemeten.



Figuur 12 Seismogram. Horizontaal staat de tijd. Verticaal staat de uitslag van een detector (geen eenheid).

Bepaal de frequentie van de trillende aardkorst.

- 1e minimum is op $t = 70$ ms
- 11e minumum is op $t = 280$ ms
- tussen 1e en 11e minimum zitten 10 periodes
- trillingstijd is $\frac{280-70}{10} = 21\,\text{ms}$
- $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{21 \cdot 10^{-3}} = 47{,}6\ \text{Hz}$

9.3 Fase en gereduceerde fase

Fase

Om een periodieke beweging te beschrijven moet je een tijdstip kiezen waarop de tijdsmeting start. Dit moment noemen we t=0. Meestal wordt het moment waarop het voorwerp de evenwichtsstand in positieve richting passeert als t=0 gekozen. Noodzakelijk is dit niet, je mag ook een andere keuze maken.

Heb je het tijdstip t=0 vastgelegd dan kun je voor een willekeurig tijdstip t bepalen hoeveel trillingen er geheel of gedeeltelijk zijn uitgevoerd. Dit is de **fase** op tijdstip t.

De fase φ (fie) geeft aan hoeveel trillingen er geheel of gedeeltelijk zijn uitgevoerd vanaf t = 0.

$$\varphi = \frac{t}{T}$$

– φ is de fase (Griekse letter "fie") zonder eenheid (want een verhouding)
– t is het tijdstip waarop de fase wordt berekend in seconden (s)
– T is de trillingstijd in seconden (s)

Gereduceerde fase

De gereduceerde fase φ_r geeft aan hoeveel van de laatst begonnen trilling er op tijdstip t is uitgevoerd. Een gereduceerde fase van 0,75 geeft aan dat op tijdstip t driekwart van de laatst begonnen trilling is uitgevoerd.

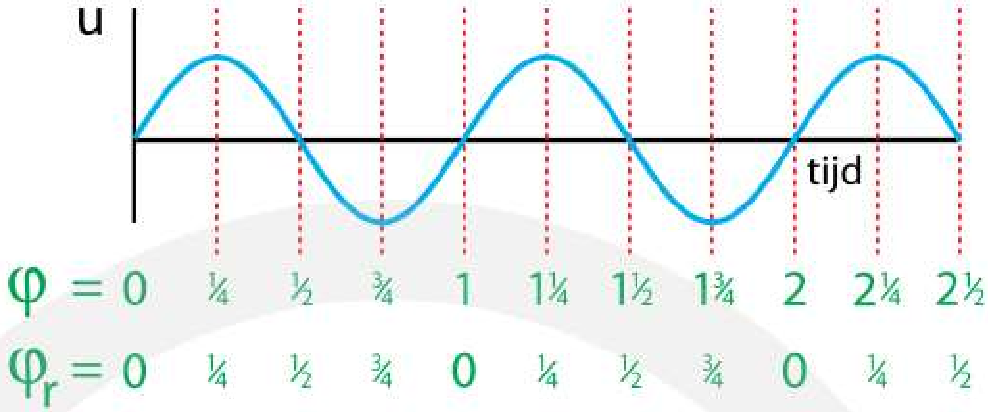
Om φ_r te berekenen moet je het aantal hele trillingen niet meetellen. Heeft een voorwerp bijvoorbeeld 7¾ trilling uitgevoerd dan is de fase 7¾ en de gereduceerde fase ¾.

φ_r = φ min het aantal volledig uitgevoerde trillingen

– φ_r heeft geen eenheid en is een getal tussen 0 en 1

De gereduceerde fase geeft aan in welk deel van de cyclus het trillende voorwerp zich bevindt. Zijn op tijdstippen t_1 en t_2 de gereduceerde fasen gelijk, dan heeft het voorwerp op t_1 en t_2 dezelfde plaats, dezelfde snelheid en dezelfde versnelling.

De gereduceerde fase is van belang als een voorwerp twee of meer trillingen tegelijkertijd uitvoert. Verderop in dit hoofdstuk en in het hoofdstuk Golven, ga je deze situatie tegenkomen.



Figuur 13
Fase φ en gereduceerde fase φ_r.

Faseverschil

Het faseverschil $\Delta\varphi$ is het verschil in fase op tijdstippen t_1 en t_2. De fase op t_1 is φ_1 en de fase op t_2 is φ_2. Voor het faseverschil $\Delta\varphi$ geldt:

$$\Delta\varphi = \frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{\Delta t}{T}$$

– $\Delta\varphi$ is het faseverschil (geen eenheid)
– Δt is het tijdverschil tussen t_1 en t_2 in seconden (s)
– T is de trillingstijd in seconden (s)

BEWIJS: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{t_2}{T} - \frac{t_1}{T} = \frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{\Delta t}{T}$

VOORBEELD getijden (eb en vloed)

Door de zwaartekracht van de maan zijn er getijden. Twee keer per dag is het hoogtij en twee keer per dag laagtij. Stel vandaag is hoogtij om 3,00 uur 's middags. Fase 0 is het moment waarop het water door de evenwichtsstand van eb naar vloed is gegaan.

Bereken het tijdstip waarop φ = 0.
- trillingstijd (periode) is 12,0 uur
- gerekend vanaf $\varphi = 0$ duurt het 1/4 periode = 3,0 uur voordat het hoogtij is
- $\varphi = 0$ vindt plaats om 12 uur 's middags

Bereken de fase van de zee de volgende dag om 8.00 uur 's avonds.
- tussen 12 uur 's middags en de volgende dag 8.00 uur 's avonds zitten $24 + 8 = 32$ uur
- $\varphi = \frac{t}{T} \rightarrow \varphi = \frac{32}{12} = 2{,}667$

Bereken de gereduceerde fase.

- $\varphi_r = \varphi$ min het aantal hele trillingen
- $\varphi_r = 2{,}667 - 2 = 0{,}667$

Bereken het faseverschil tussen 10 uur 's avonds en 2,0 uur 's nachts

- $\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T}$ | $T = 12\,h$
- tussen 10 uur 's avonds en 2,0 uur 's nachts zitten 4,0 uur $\rightarrow \Delta t = 4{,}0$ uur
- $\Delta\varphi = \frac{4{,}0}{12} = 0{,}33$

In fase en in tegenfase

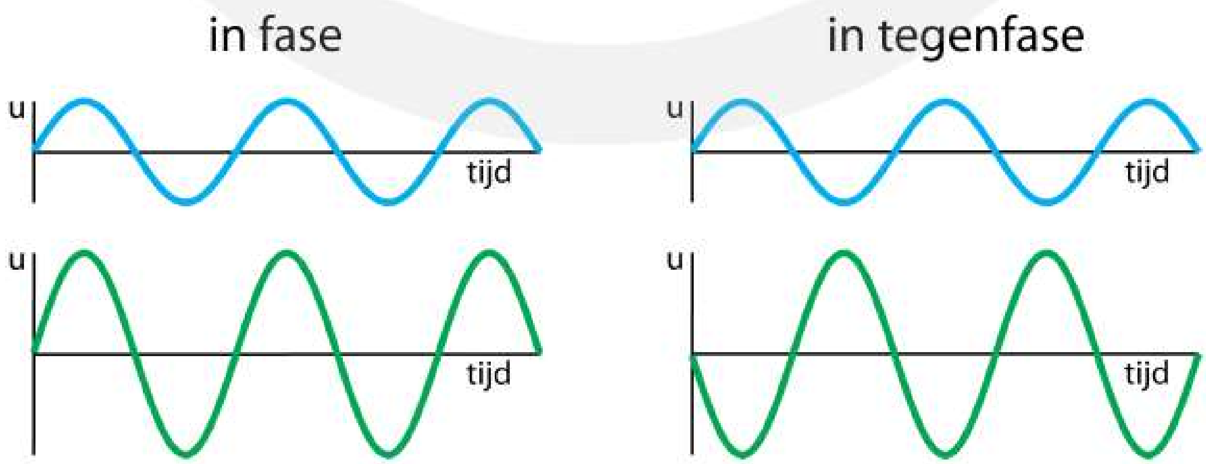
Twee trillende voorwerpen zijn **in fase** als ze op ieder moment dezelfde gereduceerde fase hebben. Twee trillende voorwerpen zijn **in tegenfase** als ze op ieder moment een gereduceerd faseverschil van 0,5 hebben.

In fase A en B hebben steeds dezelfde gereduceerde fase.

$$\varphi_{r\,A} = \varphi_{r\,B}$$

In tegenfase A en B hebben steeds een gereduceerd faseverschil van 1/2.

$$\varphi_{r\,A} = \varphi_{r\,B} \pm \frac{1}{2}$$

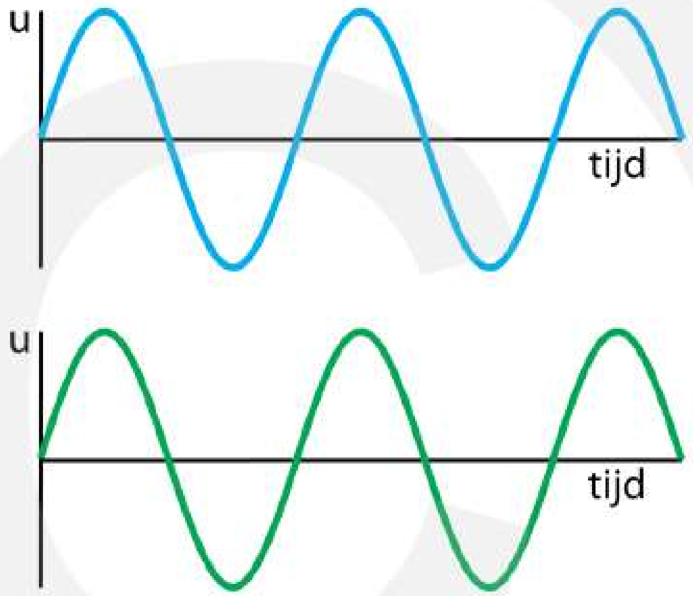


Figuur 14 Fase en tegenfase

Coherente trillingsbronnen

Twee trillingsbronnen kunnen wel of niet coherent zijn. Coherente trillingsbronnen hebben een constant faseverschil én hetzelfde tijdverloop (dezelfde vorm).

Coherente trillingsbronnen zijn trillingsbronnen met:
- een constant faseverschil (dus dezelfde frequentie)
- hetzelfde tijdverloop (dezelfde vorm)



Figuur 15 Coherente trillingsbronnen:
– constant faseverschil
– dezelfde vorm

9.4 Harmonische trilling

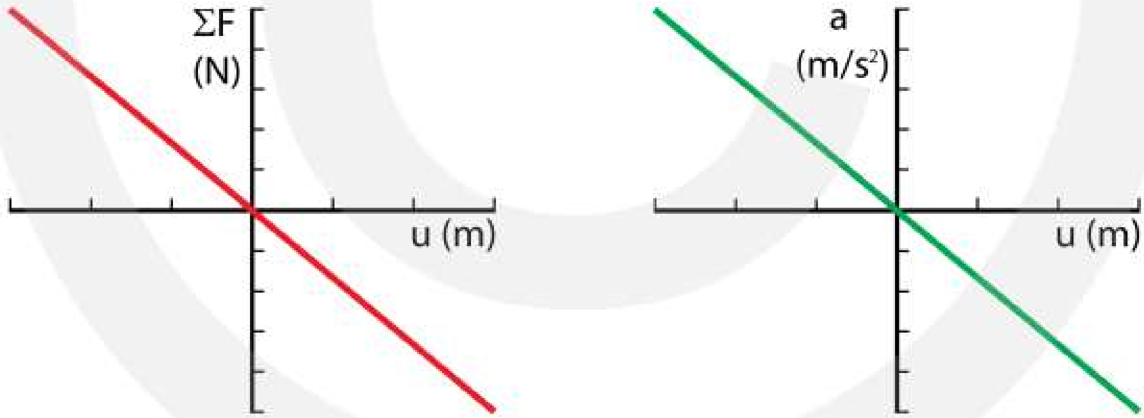
Een speciaal soort trilling die vaak voorkomt is de **harmonische** trilling. Bij een harmonische trilling is de resulterende kracht **recht evenredig** met de uitwijking. Omdat de richting van resulterende kracht tegenovergesteld is aan de uitwijking is er een **negatieve richtingscoëfficiënt**.

$$\Sigma F = -C \cdot u$$

- ΣF is de resulterende kracht in newton (N)
- C is de veerconstante in newton per meter (N/m)
- u is uitwijking in meter (m)

Omdat $\Sigma F = m \cdot a$ mogen we schrijven: $m \cdot a = -C \cdot u \;\rightarrow\; a = \frac{-C}{m} \cdot u$

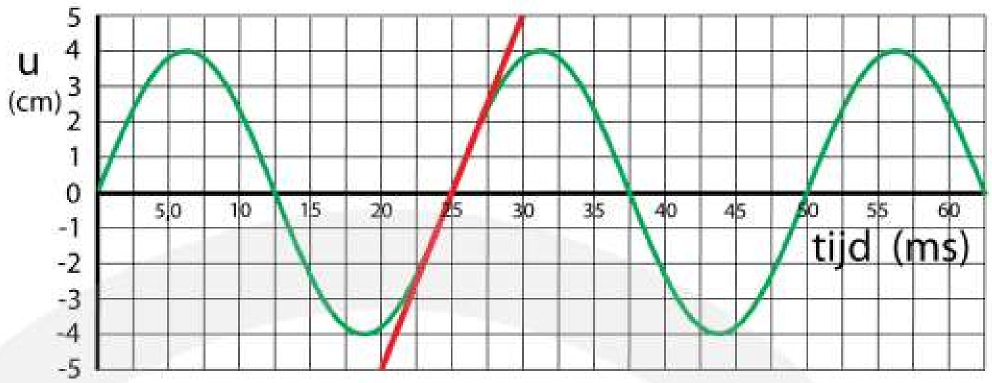
Hieraan zie je dat bij een harmonische trilling er ook een recht evenredig verband is tussen de versnelling en de uitwijking.



Figuur 16 (F, u)-diagram en (a, u)-diagram voor een harmonische trilling. Bij een (F, u)-diagram is de richtingscoëfficiënt gelijk aan -C. Bij een (a, u)-diagram is de richtingscoëfficiënt gelijk aan -C/m.

Bij een harmonische trilling trilt het voorwerp in een vloeiende beweging om de evenwichtsstand. De afstand van het voorwerp tot de evenwichtsstand verandert met een **sinusfunctie**. Later leer je hier meer over. In figuur 17 zie je het (u, t)-diagram van een harmonische trilling. Aan de (u, t)-grafiek is te zien dat de raaklijn het steilst is op de tijdstippen waarop het voorwerp door de evenwichtsstand gaat.

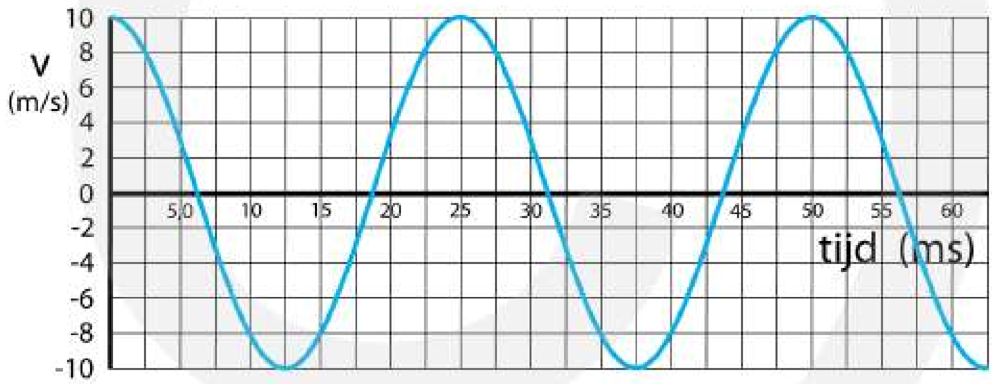
- evenwichtsstand: $v = v_{max} = \frac{dx}{dt}$ *(richtingscoëfficiënt van de raaklijn)*
- uiterste stand: $v = \frac{dx}{dt} = 0 \text{ m/s}$



Figuur 17
(u, t)-diagram van een harmonische trilling.

In dit geval vinden we voor de v_{max}: $v_{max} = \dfrac{0{,}05-(-0{,}05)}{0{,}03-0{,}02} = \dfrac{0{,}1}{0{,}01} = 10\ m/s$

Als we uit het (u, t)-diagram het (v, t)-diagram afleiden vinden we figuur 18. Zoals je ziet is dit ook een sinusvormige grafiek. Op de tijdstippen waarop u = 0 is de snelheid maximaal. Op de tijdstippen waarop u = maximaal is de snelheid nul.



Figuur 18
(v, t)-diagram van een harmonische trilling.

Uit het (v, t)-diagram kun je een (a, t)-diagram afgeleiden door steeds de raaklijn te nemen. Je vindt dan opnieuw een sinusvormige grafiek. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de (v, t)-grafiek is maximaal als v=0. Dit gebeurt op de tijdstippen waarop de bewegingsrichting omkeert. Op deze tijdstippen is de uitwijking maximaal.

Bij een harmonische trilling zijn de (u, t)-, (v, t)- en (a, t)- diagrammen sinusvormig.

Massaveersysteem

Hangen we een voorwerp aan een spiraalveer dan rekt de veer uit tot de evenwichtsstand u_0. Geven we het voorwerp vervolgens een uitwijking A dan gaat het voorwerp trillen met amplitude A. Er geldt: $\Sigma F = -C \cdot u$ en het voorwerp gaat dus een harmonische trilling uitvoeren. Voor de trillingstijd geldt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$$

- T is de trillingstijd in seconden (s)
- m is de massa van het voorwerp in kilogram (kg)
  (de massa van de veer wordt verwaarloosd)
- C is de veerconstante in newton per meter (N/m)

MERK OP

Zoals je aan de formule kunt zien is de trillingstijd niet afhankelijk van de amplitude.

BEWIJS

Het bewijs van deze formule vind je in paragraaf 9.7.

VOORBEELD dobber

Een dobber drijft in het water. De kracht die nodig is om een dobber dieper in het water te duwen of een stukje uit het water omhoog te trekken is recht evenredig met de uitwijking. Er geldt: $F = C \cdot u$.

Er is 0,20 N nodig om de dobber 5,0 cm dieper in het water te drukken.
De dobber heeft een massa van 80 gram.

Bereken de trillingstijd van de dobber.

- $F = C \cdot u \quad \rightarrow \quad C = \frac{F}{u}$
- $C = \frac{0{,}20}{5{,}0 \cdot 10^{-2}} = 4{,}0\ N/m$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{80 \cdot 10^{-3}}{4}} = 0{,}8886 = 0{,}89\ s$

Slinger

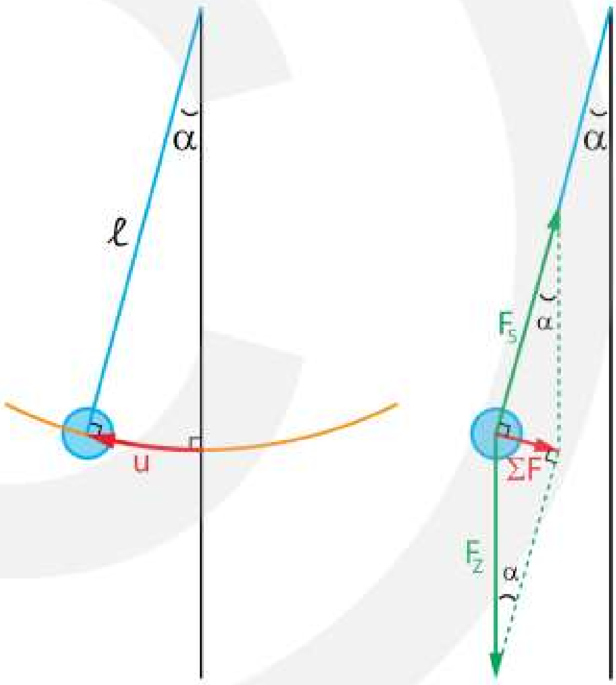
Een slinger is een gewicht dat vrij kan bewegen aan een koord. Als een slinger uit de evenwichtsstand wordt gebracht gaat hij heen-en-weer bewegen. Voor slingerhoeken die niet te groot zijn is ΣF vrijwel recht evenredig met de uitwijking. De slinger voert dan een harmonische trilling uit. Voor trillingstijd T van een harmonische slinger geldt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

– T is de trillingstijd in seconden (s)
– ℓ is lengte van de slinger in meter (m)
– g is valversnelling (m/s^2) (op aarde $g = 9{,}81\ m/s^2$)

MERK OP
– T is onafhankelijk van de massa
– ℓ is de afstand tussen het ophangpunt en het zwaartepunt
– de slingerhoek mag niet groter zijn dan ongeveer 15 graden

BEWIJS
- figuur 19 links: benader als rechthoekige driehoek → mag alleen voor kleine hoek α
- $\tan\alpha \approx \frac{u}{\ell}$ en $\sin\alpha \approx \frac{u}{\ell}$
- figuur 19 rechts: $\sin\alpha = \frac{\Sigma F}{F_z}$
- geeft $\frac{\Sigma F}{F_z} = \frac{u}{\ell}$
- ΣF en u tegengesteld gericht
- $\Sigma F = -F_z \cdot \frac{u}{\ell} \rightarrow \Sigma F = -m \cdot g \cdot \frac{u}{\ell}$
- harmonisch: $\Sigma F = -C \cdot u$
- $C = \frac{m \cdot g}{\ell} \rightarrow \frac{m}{C} = \frac{\ell}{g}$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$
- invullen: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$



Figuur 19

VOORBEELD secondeslinger

Om de tijd te meten wil je een slinger maken met een periode van 1,00 s

Bereken de lengte van de slinger.
- $T = 1{,}00\ s \;|\; g = 9{,}81\ m/s^2 \;|\; \ell = \ldots m$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \rightarrow 1{,}00 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9{,}81}} \rightarrow \ell = 0{,}24849 = 0{,}248\ m$

9.5 De energie van een trillend voorwerp

Een trillend voorwerp bevat energie. Deze energie bestaat uit **veerenergie** en **kinetische energie**. Als het voorwerp uit de evenwichtsstand is bevat het veerenergie. Heeft het voorwerp een snelheid dan bevat het kinetische energie. Op een willekeurig tijdstip heeft het voorwerp een uitwijking én een snelheid en bevat het dus veerenergie én kinetische energie.

$E_{veer} = \frac{1}{2}C \cdot u^2 \quad | \quad E_K = \frac{1}{2}m \cdot v^2 \quad \rightarrow \quad E_{tot} = \frac{1}{2}C \cdot u^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2$

Een trillend voorwerp bevat veerenergie én kinetische energie.

$$E_{tot} = \tfrac{1}{2}C \cdot u^2 + \tfrac{1}{2}m \cdot v^2$$

Om een voorwerp in trilling te brengen oefen je een kracht uit om het uit de evenwichtsstand te brengen. Deze kracht verricht arbeid die in het voorwerp wordt opgeslagen als veerenergie. Op het moment waarop je het voorwerp loslaat heeft het geen snelheid en dus ook geen kinetische energie. Nadat je hebt losgelaten heeft het voorwerp wél een snelheid en dus kinetische energie. Omdat er geen energie is toegevoegd is de toename van de kinetische energie ten koste gegaan van de veerenergie.

Kijken we naar de energie van een trillend voorwerp dan zien we het volgende:

- uiterste stand → $u = A$ én $v = 0$ → alleen veerenergie.
- evenwichtsstand → $u = 0$ én $v = v_{max}$ → alleen kinetische energie

Bij een trillend voorwerp worden de veerenergie en de kinetische energie voortdurend in elkaar omgezet. De totale energie verandert daarbij niet. Het verlies aan veerenergie wordt gecompenseerd door een toename van de kinetische energie.

uiterste stand	→	$u = A$	**én**	$v = 0$	→	$E_{tot} = \frac{1}{2}C \cdot A^2$
evenwichtsstand	→	$u = 0$	**én**	$v = v_{max}$	→	$E_{tot} = \frac{1}{2}m \cdot v_{max}^2$

Als er geen wrijving is verandert de totale energie niet. De omzetting van veerenergie in kinetische energie en terug houdt dan niet op. In de praktijk is er vaak wel wrijving, waardoor er energie in warmte wordt omgezet. Deze energie verdwijnt uit het trillende voorwerp. In de uiterste stand is er alleen veerenergie en de afname van de totale energie leidt daarom tot een afname van de amplitude. Dit kennen we als demping.

wrijving → $E_{tot} = \frac{1}{2}C \cdot A^2$ **neemt af** → **A wordt kleiner** → **demping**

VOORBEELD

Een voorwerp met een massa van 50 gram trilt met een amplitude van 2,0 cm. De totale energie is 10 J.

Bereken de veerconstante.

- $A = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \quad | \quad E_{tot} = 10\ \text{J} \quad | \quad C = \ldots \text{N/m}$
- uiterste stand: $E_{tot} = \frac{1}{2} C \cdot A^2$
- $10 = \frac{1}{2} C \cdot \left(2{,}0 \cdot 10^{-2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad C = 5{,}0 \cdot 10^4\ \text{N/m}$

Bereken de maximale snelheid.

- $m = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \quad | \quad E_{tot} = 10\ \text{J} \quad | \quad v_{max} = \ldots \text{m/s}$
- evenwichtsstand: $E_{tot} = \frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2$
- $10 = \frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot v_{max}^2 \quad \rightarrow \quad v_{max} = 20\ \text{m/s}$

Op een bepaald tijdstip is de uitwijking 1,0 cm.

Bereken de veerenergie op dit tijdstip.

- $u = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \quad | \quad C = 5{,}0 \cdot 10^4\ \text{N/m} \quad | \quad E_{veer} = \ldots \text{J}$
- $E_{veer} = \frac{1}{2} C \cdot u^2$
- $E_{veer} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^4 \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-2})^2 \quad \rightarrow \quad E_{veer} = 2{,}5\ \text{J}$

Bereken de kinetische energie op dit tijdstip.

- $E_{tot} = 10\ \text{J} \quad | \quad E_{veer} = 2{,}5\ \text{J} \quad | \quad E_K = \ldots \text{J}$
- $E_{tot} = E_{veer} + E_K$
- $10 = 2{,}5 + E_K \quad \rightarrow \quad E_K = 7{,}5\ \text{J}$

Bereken de snelheid op dit tijdstip.

- $m = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \quad | \quad E_K = 7{,}5\ \text{J} \quad | \quad v = \ldots \text{m/s}$
- $E_K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
- $7{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot v^2 \quad \rightarrow \quad v = 17{,}32 = 17\ \text{m/s}$

Aan dit voorbeeld zie je dat er geen recht evenredig verband is tussen de uitwijking en de snelheid. Als de uitwijking de helft is van zijn maximale waarde (zoals in het voorbeeld) heeft de snelheid niet de helft van zijn maximale waarde. Je mag dus geen kruistabel gebruiken. Alleen met de wet van behoud van energie kun je de snelheid uitrekenen.

Maximale snelheid v_{max} bij een harmonische trilling

Door de formule voor de energie van een harmonische trilling te gebruiken vind je:

$$v_{max} = \frac{2\pi \cdot A}{T}$$

- v_{max} is de maximale snelheid, dit is de snelheid in de evenwichtsstand (m/s)
- A is de amplitude in meter (m)
- T is de trillingstijd in seconde (s)

MERK OP

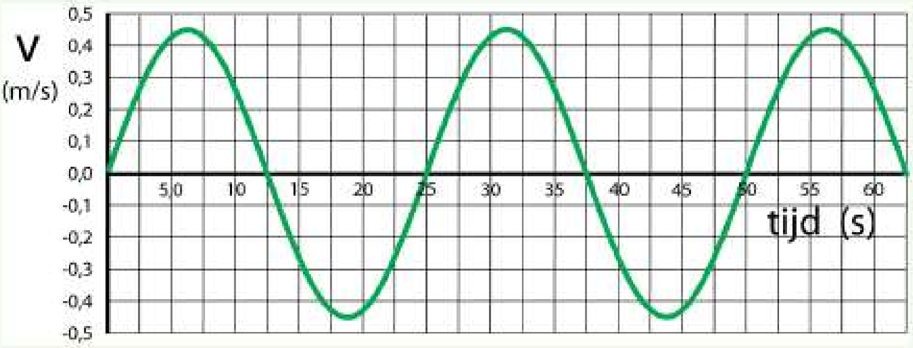
- omdat $f = \frac{1}{T}$ geldt ook: $v_{max} = 2\pi \cdot A \cdot f$

BEWIJS

- behoud van energie → E_{tot} evenwichtsstand = E_{tot} uiterste stand
- $\frac{1}{2}m \cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2}C \cdot A^2$
- $m \cdot v_{max}^2 = C \cdot A^2 \quad \rightarrow \quad v_{max}^2 = \frac{C \cdot A^2}{m}$
- $v_{max} = \sqrt{\frac{C \cdot A^2}{m}} \quad \rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot A$
- massaveersysteem: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{C}{m}} = \frac{2\pi}{T}$
- invullen $\rightarrow \quad v_{max} = \frac{2\pi}{T} \cdot A \quad \rightarrow \quad v_{max} = \frac{2\pi \cdot A}{T}$
- invullen $\rightarrow \quad v_{max} = \frac{2\pi \cdot A}{T} = 2\pi \cdot A \cdot f$

VOORBEELD

Figuur 20 is het (v, t)-diagram van een harmonische trilling.



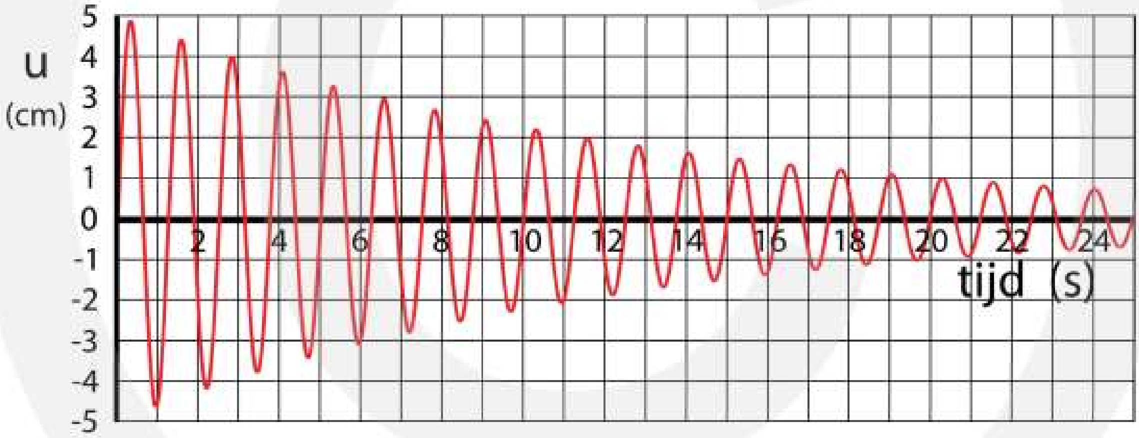
Figuur 20

Bepaal de amplitude van deze trilling.

- aflezen: $v_{max} = 0{,}45\,m/s$
- aflezen: $T = 25\,s$
- $v_{max} = \dfrac{2\pi \cdot A}{T}$
- $0{,}45 = \dfrac{2\pi \cdot A}{0{,}25} \quad \rightarrow \quad A = \dfrac{0{,}45 \cdot 25}{(2\pi)} = 1{,}79\,m$

Demping

Een trilling wordt gedempt als er energie wordt omgezet in warmte. Eerder hebben we gezien dat demping ervoor zorgt dat de amplitude afneemt. De frequentie verandert hierbij niet.



Figuur 21 Gedempte harmonische trilling. Omdat er energie verdwijnt neemt de amplitude af. De frequentie verandert niet.

VOORBEELD

Een voorwerp trilt met een frequentie van 5,0 Hz en een amplitude van 2,0 cm. In het begin is de totale energie 10 J. Vanwege wrijving wordt de trilling gedempt. Na een minuut is de amplitude twee keer zo klein geworden.

Hoeveel warmte is er in de eerste minuut is ontstaan?

- $E_{tot} = \frac{1}{2} C \cdot A^2$
- A is 2 keer zo klein geworden
- A^2 is 4 keer zo klein $\rightarrow$ E_{veer} is 4 keer zo klein
- E_{tot} was 10 J en is nu 10 / 4 = 2,5 J
- er is $10 - 2{,}5 = 7{,}5$ J aan energie in warmte omgezet

Met hoeveel procent neemt de amplitude gemiddeld in één periode af?
- in één minuut neemt de amplitude 50% af
- f = 5,0 Hz → in één minuut zijn er $5 \cdot 60 = 300$ perioden
- $\frac{1}{300} \cdot 50\% = 0{,}16667$
- per periode neemt de amplitude gemiddeld met 0,17% af

VOORBEELD

Bij een gedempte trilling met een energie van 50 J wordt in één periode steeds 1,0% van aanwezige energie omgezet in warmte.

Bereken hoeveel energie er na 100 trillingen in warmte is omgezet.
- per trilling is het energieverlies 1,0%
- na een trilling blijft er steeds 99% = 0,99 deel van de energie over
- 100 trillingen → $0{,}99^{100} = 0{,}366$
- 0,366ᵉ deel van de energie blijft aanwezig
- na 100 trillingen is er $50 \cdot 0{,}366 = 18{,}3$ J energie aanwezig
- na 100 trillingen is er energie omgezet in warmte

9.6 Resonantie

Eigenfrequentie en aandrijffrequentie

Een voorwerp wordt in trilling gebracht door het uit de evenwichtsstand te brengen en daarna los te laten. De amplitude is gelijk aan de uitwijking op het tijdstip van loslaten. Maar de frequentie waarmee het voorwerp gaat trillen is NIET afhankelijk van de uitwijking op het tijdstip van loslaten. De frequentie wordt niet door externe omstandigheden bepaald maar is een eigenschap van het systeem zelf. Het maakt niet uit hoe de trilling op gang wordt gebracht, steeds zal het voorwerp met dezelfde frequentie gaan trillen. De trillingsfrequentie is een **eigenschap** van het systeem en heet daarom de **eigenfrequentie**.

Een voorwerp kan ook aan het trillen worden gebracht door met een bepaalde frequentie een kracht uit te oefenen. In dat geval spreekt je van een **aangedreven trilling**. De frequentie waarmee het voorwerp wordt aangedreven heet de **aandrijf-frequentie**.

systeem trilt uit zichzelf	→	**eigenfrequentie**	→	f_{eigen}
systeem wordt aangedreven	→	**aandrijffrequentie**	→	$f_{aandrijf}$

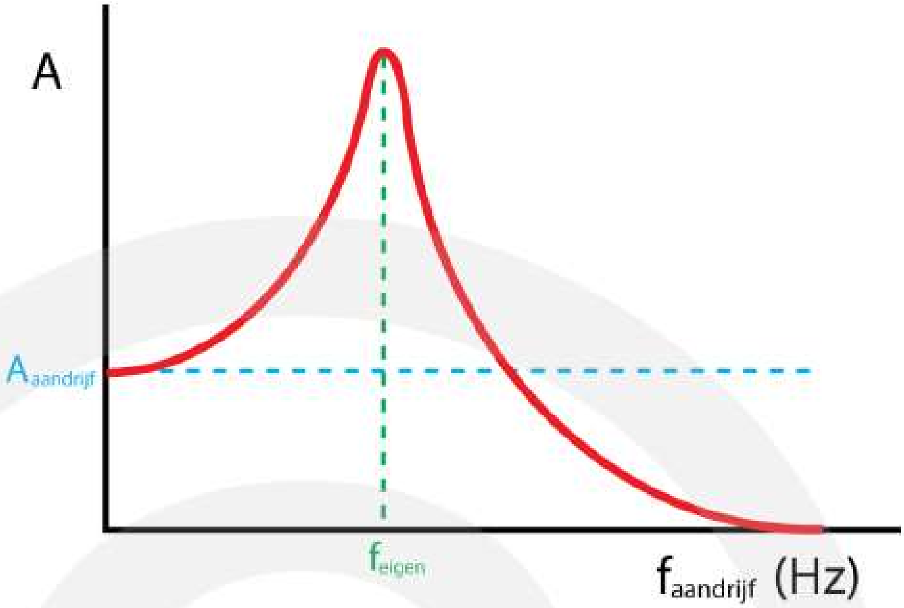
Resonantie

Bij een aangedreven trilling is de amplitude afhankelijk van het verschil tussen de aandrijffrequentie en de eigenfrequentie. Is het verschil tussen $f_{aandrijf}$ en f_{eigen} groot, dan is de amplitude klein. Maar als $f_{aandrijf}$ vrijwel gelijk is aan f_{eigen} dan is de amplitude groot. De oorzaak van deze grote amplitude is de voortdurende toevoeging van energie. Bij iedere trilling wordt er een beetje energie toegevoegd door de arbeid die de externe kracht levert. De totale energie wordt hierdoor steeds groter, waardoor de amplitude ook steeds groter wordt. In het theoretische geval dat er geen wrijving is wordt de amplitude oneindig groot.

$f_{aandrijf} \neq f_{eigen}$	→	**geen energie toegevoegd**	→	**A blijft klein**
$f_{aandrijf} = f_{eigen}$	→	**wél energie toegevoegd**	→	**A wordt groot**

Er treedt **resonantie** op als de aandrijffrequentie gelijk is aan de eigenfrequentie. Bij resonantie heeft het systeem veel energie en is de amplitude heel groot.

resonantie → $$f_{aandrijf} = f_{eigen}$$



Figuur 22
Toename van de amplitude bij een aangedreven trilling.

In figuur 22 zie je het verband tussen de amplitude en de aandrijffrequentie. Op de verticale as staat de amplitude en op de horizontale as de aandrijffrequentie. Bij een kleine $f_{aandrijf}$ is de amplitude gelijk aan de amplitude van de aandrijfkracht. Bij een grote $f_{aandrijf}$ is de amplitude vrijwel nul, omdat het systeem te traag is. Als $f_{aandrijf}$ gelijk is aan f_{eigen} treedt er resonantie op en is de amplitude maximaal.

aandrijfkracht	**amplitude**	**wat gebeurt er**
$f_{aandrijf} << f_{eigen}$	$\frac{A}{A_{aandrijf}} = 1$	de amplitude is gelijk aan de aandrijf-amplitude
$f_{aandrijf} >> f_{eigen}$	$A \rightarrow 0$	de amplitude wordt kleiner bij hogere aandrijffrequentie
$f_{aandrijf} = f_{eigen}$	$\frac{A}{A_{aandrijf}} \rightarrow \infty$	zonder demping wordt de amplitude oneindig groot

VOORBEELD schommelen

Een kleuter zit op een schommel. Opa moet duwen om de schommel een grote amplitude te geven. De schommel heeft een lengte van 2,0 m. Bij een schommel wordt de eigentrillingstijd gegeven door:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Bereken de frequentie waarmee opa moet duwen.

- om een grote amplitude te veroorzaken moet opa met de eigenfrequentie duwen
- $\ell = 2{,}0\,\text{m}$ | $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ | $T = \ldots\,\text{s}$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}0}{9{,}81}} \rightarrow T = 2{,}827\,\text{s}$
- $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{2{,}837} = 0{,}3525 = 0{,}35\,\text{Hz}$

Grote zus wil ook mee schommelen en wordt door opa achter de kleuter op de schommel gezet.

Leg uit of opa nu met een hogere, een lagere, of met dezelfde frequentie moet gaan duwen.

- als het zwaartepunt niet verandert blijft de slinger even lang
- de eigenfrequentie is niet afhankelijk van de massa
- opa moet met dezelfde frequentie blijven duwen
- gaat het zwaartepunt omhoog, waardoor de slinger korter wordt, dan moet opa met een hogere frequentie gaan duwen

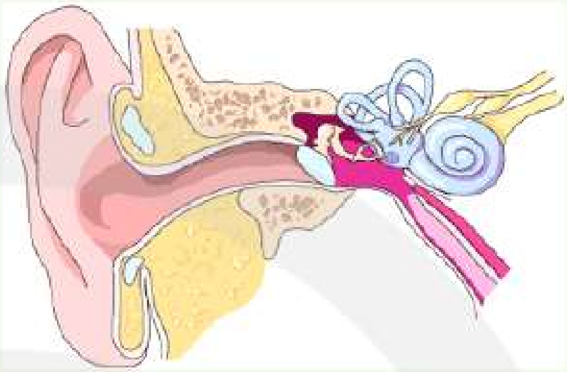
VOORBEELD een wijnglas laten springen met geluid

Geluid bestaat uit trillende lucht. Een zuivere muzieknoot bevat maar één frequentie. Zo heeft de noot c3 (hoge c) een frequentie van 1046,5 Hz. Dit is de aandrijffrequentie. Neem je een wijnglas waarvan de eigenfrequentie rond 1000 Hz ligt dan kan zo'n glas kapot worden gezongen. Dit gebeurt als $f_{aandrijf} = f_{eigen}$.

Is de frequentie waarmee je zingt te hoog of te laag dan is er geen resonantie en breekt het wijnglas niet.

VOORBEELD het gehoororgaan

Het gehoororgaan bestaat uit een buitenoor, een middenoor en een binnenoor. Het buitenoor vangt luchttrillingen op, het middenoor bevat gehoorbeentjes die het geluid versterken en doorgeven aan het binnenoor. In het binnenoor bevindt zich het slakkenhuis, waarin trilhaartjes geluidstrillingen omzetten naar zenuwimpulsen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van resonantie.



De trilhaartjes verschillen in lengte en dikte. Hierdoor hebben ze verschillende eigenfrequenties. Geluid bestaat uit luchttrillingen met verschillende frequenties. Dit zijn de aandrijffrequenties. Alleen de trilhaartjes waarvan $f_{eigen} = f_{aandrijf}$ gaan meetrillen met het geluid. Hoe harder het geluid hoe groter de amplitude. Trilhaartjes waarbij geen resonantie optreedt blijven stilstaan. Vanuit ieder trilhaartje gaat een zenuw naar de hersenen, zodat de hersenen weten uit welke frequenties het geluid bestaat en wat de amplitude van iedere frequentie is.

VOORBEELD hangbrug

Bij een hangbrug, zoals de Golden Gate brug in San Francisco, hangt het wegdek aan staalkabels en kan hierdoor gaan trillen. Als een militaire colonne over de brug gaat is het mogelijk dat de frequentie waarmee de voertuigen de brug in trilling brengen toevallig overeenkomt met de eigenfrequentie van de brug. Een gevaarlijke situatie ontstaat als $f_{aandrijf} = f_{eigen}$. De brug gaat dan meetrillen met een steeds grotere amplitude. De kans bestaat dat de brug uiteindelijk instort.

Dit is de reden waarom een bataljon marcherende soldaten uit de pas moeten lopen als ze een brug passeren.

VOORBEELD fietsen over een hobbelige weg

Je rijdt met je fiets over een hobbelige weg gemaakt van tegels. De tegels zijn 30 cm groot. Als je met 4,5 m/s fietst gaat je spatbord trillen. Bij een lagere en bij een hogere snelheid trilt je spatbord niet.

Waarom trilt je spatbord alleen bij 4,5 m/s?

- je fiets met een vaste snelheid over de stenen
- de frequentie waarmee de naden tussen de stenen je fiets laat trillen is de aandrijffrequentie
- als $f_{aandrijf} = f_{eigen}$ treedt er resonantie op
- bij resonantie wordt de amplitude heel groot

Bereken de eigenfrequentie van je spatbord.

- per seconde rijd je over 4,5 / 0,30 = 15 stenen $\rightarrow$ $f_{aandrijf} = 15$ Hz
- er is sprake van resonantie $\rightarrow$ $f_{eigen} = f_{aandrijf} = 15$ Hz

VOORBEELD autorijden over een hobbelige weg

Een jeep rijdt over een weg waarop om de 5,0 meter een hobbel is aangebracht. De jeep heeft een massa van 1200 kg en is geveerd met $C = 8{,}0 \cdot 10^4$ N/m. Bij een bepaalde snelheid trilt de jeep heftig op en neer vanwege resonantie.

Bereken bij welke snelheid dit gebeurt.

- de jeep is een massa-veersysteem
- $m = 1200\ \text{kg} \quad | \quad C = 8{,}0 \cdot 10^4\ \text{N/m} \quad | \quad T = \ldots \text{s}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1200}{8{,}0 \cdot 10^4}} \rightarrow T = 0{,}7695\ \text{s}$$

- er is resonantie $\rightarrow$ $f_{aandrijf} = f_{eigen}$
- iedere 0,7695 s rijdt de auto over een hobbel
- $s = v_{gem} \cdot t \rightarrow 5 = v_{gem} \cdot 0{,}7695 \rightarrow v_{gem} = 6{,}4975 = 6{,}5\ \text{m/s}$

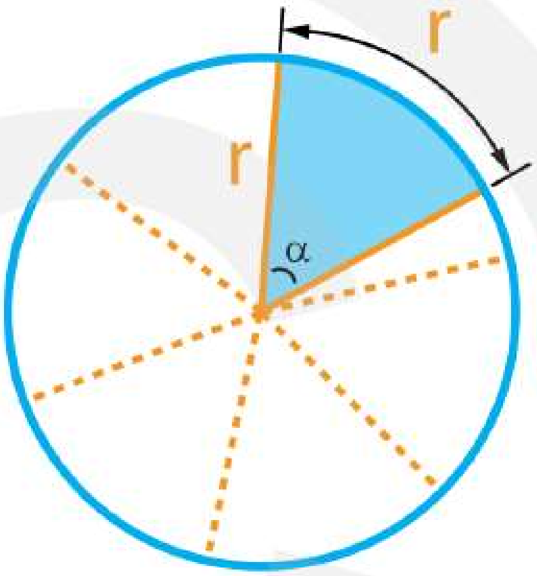
Treedt resonantie bij een hogere of bij een lagere snelheid op als er een passagier is uitgestapt?

- bij een kleinere massa wordt de eigentrillingstijd kleiner
- de eigenfrequentie neemt toe
- resonantie vindt plaats bij een hogere aandrijffrequentie
- de snelheid van de auto moet toenemen

9.7 Wiskundige beschrijving

Radiaal als eenheid van hoek

Om een harmonische trilling wiskundig te beschrijven maken we gebruik van de **radiaal** als eenheid van hoek. De afkorting van radiaal is **rad**. Een hoek is één radiaal als de booglengte gelijk is aan de straal. Om de hoek in radiaal uit te rekenen deel je de booglengte door de staal. Zie figuur 23.



Figuur 23 Radiaal als eenheid van hoek. Bij een hoek van één radiaal is de booglengte gelijk aan de straal.

Bij een hoek van één radiaal (rad) is de booglengte gelijk aan de straal.

Om de hoek in radiaal uit te rekenen deel je de booglengte door de staal.

De omtrek van een cirkel is $2\pi \cdot r$. Om de hoek in radiaal uit te rekenen van een volledige cirkel moet je de booglengte delen door de straal. Een volledige cirkel heeft dus een hoek van $\frac{2\pi \cdot r}{r} = 2\pi$ radialen. De hoek van een volledige cirkel is 360 graden en we zien dus dat 2π radialen gelijk is aan 360 graden.

2π radialen = 360 graden

Als je een hoek in graden wilt omrekenen gebruik je een verhoudingstabel.

graden	360	x
radialen	2π	1

Hieruit volgt: $1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} = 57{,}29578 \text{ graden}$.

Sinusfuncties

Bij een harmonische trilling is de (u, t)-grafiek sinusvormig met het volgende voorschrift:

$$u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

- u is de uitwijking in meter (m)
- A is de amplitude in meter (m)
- T is de trillingstijd in seconde (s)
- t is de tijd in seconde (s)

Aan deze functie zie je het volgende:

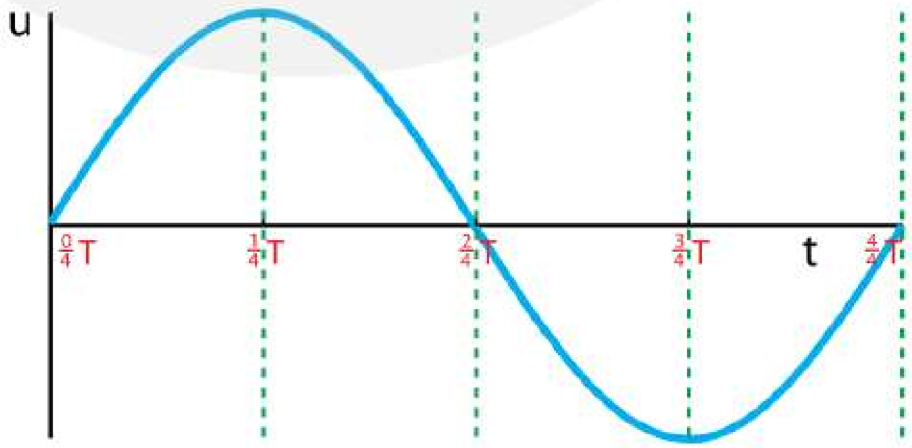
$t = 0 \cdot T \quad \rightarrow \quad u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = A \cdot \sin(0) = 0$ *(evenwichtsstand)*

$t = \frac{1}{4} \cdot T \quad \rightarrow \quad u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A$ *(uiterste stand boven)*

$t = \frac{2}{4} \cdot T \quad \rightarrow \quad u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2T}{4}\right) = A \cdot \sin(\pi) = 0$ *(evenwichtsstand)*

$t = \frac{3}{4} \cdot T \quad \rightarrow \quad u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -A$ *(uiterste stand onder)*

$t = \frac{4}{4} \cdot T \quad \rightarrow \quad u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{4T}{4}\right) = A \cdot \sin(2\pi) = 0$ *(evenwichtsstand)*



Figuur 24
Sinusfunctie.
$u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

BEWIJS (voor de liefhebber)

- harmonische trilling: $\Sigma F = m \cdot a = -C \cdot u \;\rightarrow\; a = \frac{-C}{m} \cdot u$
- differentiëren: $v = u'$ en $a = v' \;\rightarrow\; a = u''$
- harmonische trilling: twee keer differentiëren geeft dezelfde functie keer $\frac{-C}{m}$
- neem $u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
- $v = u' = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
- $a = v' = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \;\rightarrow\; a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
- $a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot u$ voldoet aan de eis dat $a = \frac{-C}{m} \cdot u$
- $\frac{C}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$
- u is een sinusvormige functie van de tijd

Ook de snelheid v en de versnelling a zijn sinusvormige functies van de tijd.

$$\mathbf{u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \qquad v = \frac{2\pi}{T} \cdot A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \qquad a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}$$

Massaveersysteem

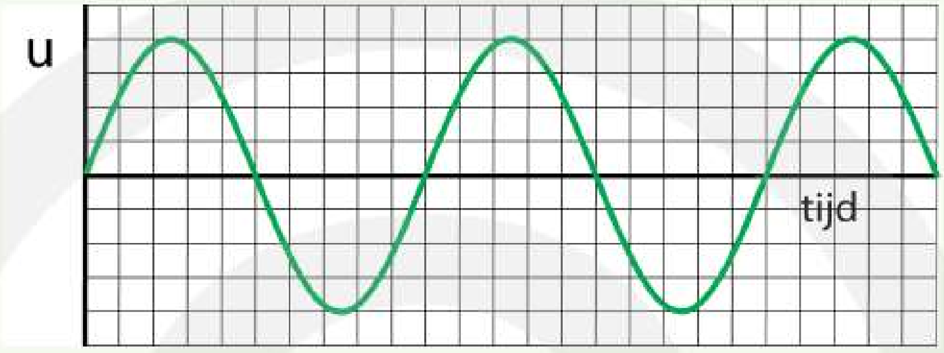
Nu we meer weten over de wiskundige beschrijving van een harmonische trilling kunnen we de formule voor de trillingstijd van een massaveersysteem bewijzen. Hieronder vind je dit bewijs.

BEWIJS (voor de liefhebber)

- $\Sigma F = m \cdot a = -C \cdot u \;\rightarrow\; a = \frac{-C}{m} \cdot u$
- $\frac{C}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ *(zie boven)*
- $\frac{C}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \;\rightarrow\; \frac{C}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2} \;\rightarrow\; T^2 \cdot C = 4\pi^2 \cdot m$ *(kruislings vermenigvuldigen)*
- $T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot m}{C} = 4\pi^2 \frac{m}{C} \;\rightarrow\; T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$

VOORBEELD

Een (u, t)-diagram van een trilling is gegeven in figuur 25.
- horizontaal staat de tijd met een tijdbasis van 10 ms / div.
- verticaal staat de uitwijking met een gevoeligheid van 5,0 cm / div



Figuur 25

Leg uit waaruit blijkt dat de trilling harmonisch is.
- het (u, t)-diagram is sinusvormig $\rightarrow$ harmonische trilling

Stel het functievoorschrift op van deze harmonische trilling.
- aflezen: 2,5 trillingen in 25 hokjes $\rightarrow$ 10 hokjes voor 1 trilling
- 1 hokje = 10 ms $\rightarrow$ $T = 10 \cdot 10 \text{ ms} = 0{,}10 \text{ s}$
- aflezen: amplitude is 4 hokjes
- 1 hokje = 5,0 cm $\rightarrow$ $A = 4 \cdot 5{,}0 = 20 \text{ cm} = 0{,}20 \text{ m}$
- $u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
- $u = 0{,}20 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0{,}10} \cdot t\right)$

Bereken de uitwijking op t = 3,21 s
- $u = 0{,}20 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0{,}10} \cdot 3{,}21\right)$
- rekenmachine op radialen
- $u = 0{,}20 \cdot \sin(201{,}69)$ $\rightarrow$ $u = 0{,}20 \cdot 0{,}587785 = 0{,}117557 = 0{,}12 \text{ m}$

Het uitrekenen van de tijd waarbij de uitwijking bijvoorbeeld 0,15 m is vergt meer rekenwerk en hoef je niet te kunnen. Het antwoord op deze vraag heeft oneindig veel oplossingen, want na iedere periode zal de uitwijking opnieuw 0,15 m zijn.

Samengestelde trillingen

Een voorwerp kan tegelijkertijd twee trillingen uitvoeren. In dat geval is de uitwijking de som van de uitwijkingen. Voor de duidelijkheid schrijven we $2\pi f$ in plaats van $\frac{2\pi}{T}$.

$$u_1 = A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 \cdot t)$$
$$u_2 = A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 \cdot t)$$

______________ +

$$u = A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 \cdot t) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 \cdot t)$$

Zijn de amplitudes A_1 en A_2 gelijk dan vereenvoudigt de optelling. In dat geval:

$$u = A \cdot \left(\sin(2\pi f_1 \cdot t) + \sin(2\pi f_2 \cdot t)\right)$$

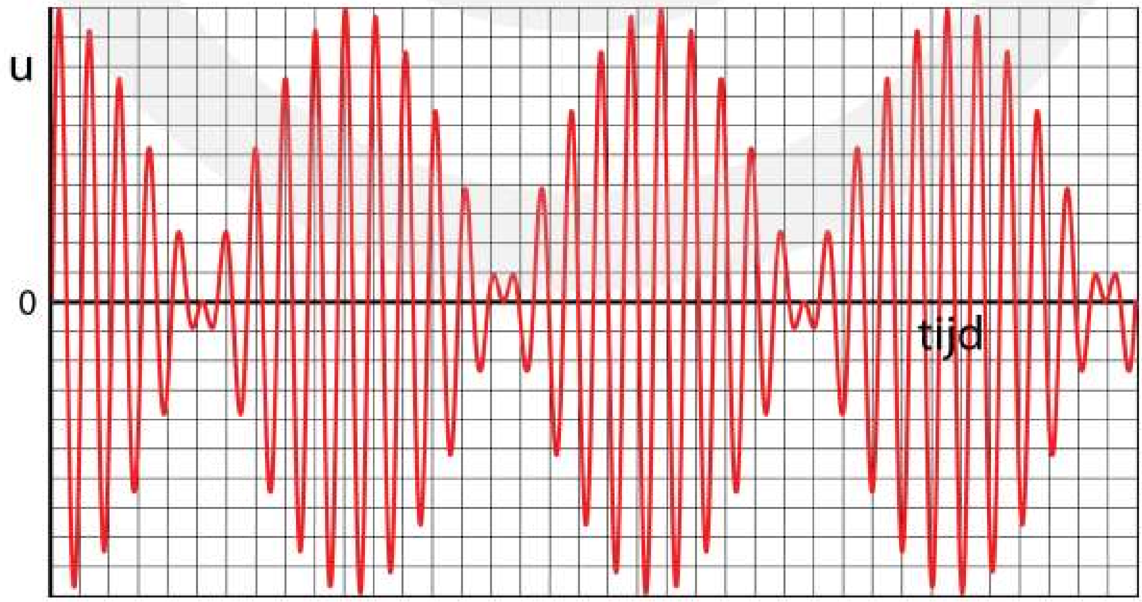
Om deze optelling uit te voeren gebruiken we de regel:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right) \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

Hieruit vinden we:

$$\mathbf{u = 2A \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2} \cdot (2\pi f_1 + 2\pi f_2) \cdot t\right) \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2} \cdot (2\pi f_1 - 2\pi f_2) \cdot t\right)}$$

We kunnen dit resultaat als volgt opvatten. Stel een voorwerp trilt tegelijkertijd met 9 Hz en met 11 Hz. Het voorwerp gaat dan trillen met 10 Hz waarbij de amplitude met een frequentie van 11 −9 = 2,0 Hz verandert. De maximale amplitude is twee keer zo groot als de amplitude van u_1 en u_2. In figuur 26 zie je het resultaat van zo'n samengestelde trilling, waarbij de twee frequenties vlak bij elkaar liggen.



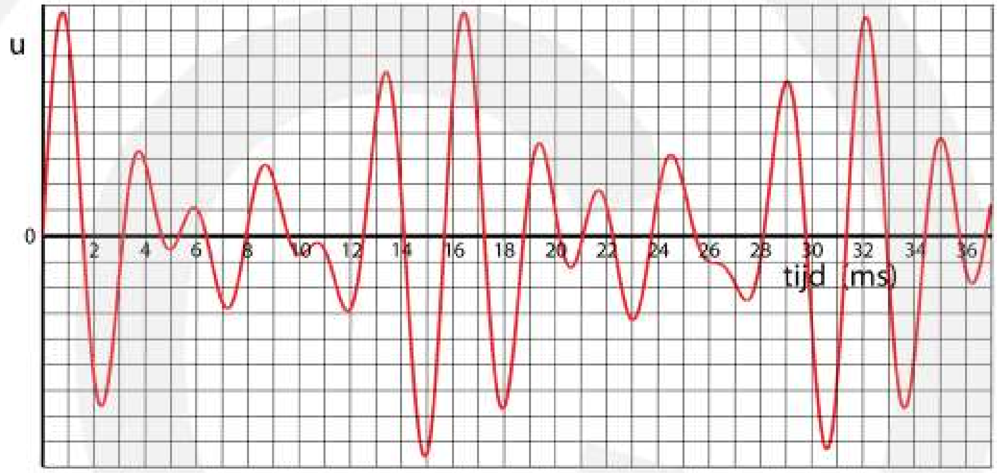
Figuur 26 (u, t)-diagram van een samengetelde trilling. De twee amplitudes A_1 en A_2 zijn gelijk. De frequenties verschillen 10% van elkaar.

Drieklanken in de muziek

In de muziek wordt veel gebruik gemaakt van samengestelde trillingen. Een drieklank bestaat uit een samengestelde trilling met drie frequenties: een grondtoon, een terts en een kwint. Zo bestaat het C-majeur akkoord uit de muzieknoten c, e en g.

c1 = 261,626 Hz
e1 = 329,628 Hz
g1 = 392,995 Hz

In figuur 27 zie je het resultaat voor het C-majeur akkoord, waarbij de amplitudes van de muzieknoten c1, e1 en g1 hetzelfde zijn.



Figuur 27
(u, t)-diagram van het C-majeur akkoord.

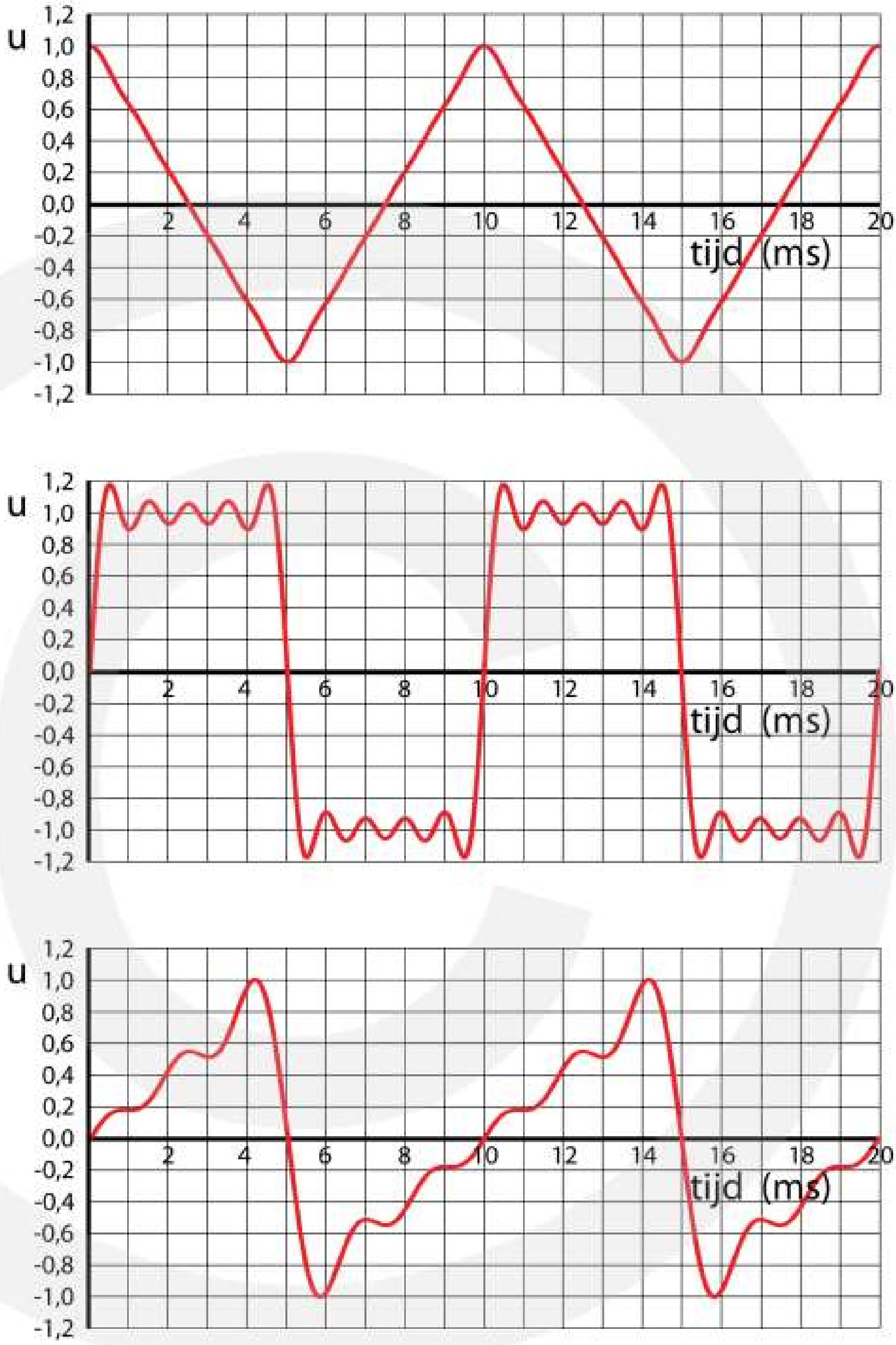
Een trilling opgevat als optelling van harmonische trillingen

Een niet-harmonische trilling heeft een (u, t)-diagram waarin het patroon niet sinusvormig is. Zo bestaan er trillingen met een driehoekige vorm, een blokvorm en een zaagtand vorm.

Joseph Fourier (Frankrijk, 1768 – 1830) heeft een wiskundige methode ontwikkeld waarmee het mogelijk is om een niet-harmonische trilling te beschrijven als som van harmonische trillingen. Met het voorschrift van Fourier tel je harmonische trillingen met verschillende amplitudes en verschillende frequenties bij elkaar op om een niet-harmonische trilling te benaderen. Het gaat dus om een benadering, die steeds beter wordt als je meer harmonische trillingen bij elkaar optelt.

In figuur 28 zie je toepassingen van de methode van Fourier. We hebben steeds vijf harmonische trillingen bij elkaar opgeteld. Het bovenste diagram is een benadering van een driehoekige trilling. In het middelste diagram wordt een blokvormige trilling benaderd en in het onderste diagram wordt een zaagtand trilling benaderd.

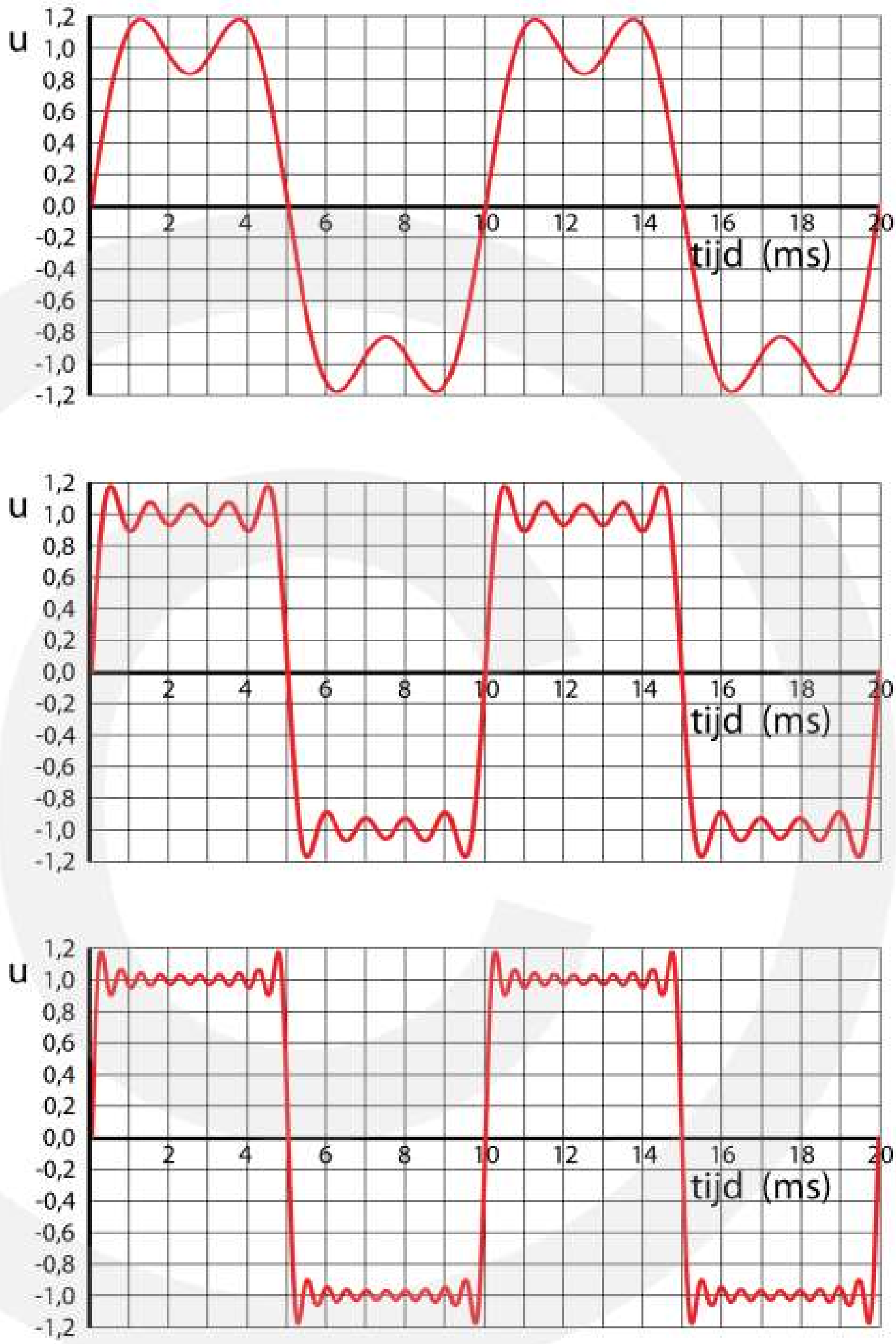
Zoals je ziet is niet iedere benadering even goed. De driehoekige vorm kan vrij goed worden benaderd met vijf sinusfuncties, maar bij de blokvorm en de zaagtand zijn de gebruikte sinusfuncties nog duidelijk te zien. Voor een betere benadering moet je dan meer dan 5 sinusfuncties optellen.



Figuur 28 (u, t)-diagram van benaderingen van een driehoekige trilling, een blokvormige trilling en een zaagtand trilling met steeds vijf sinusfuncties.

Hoe meer sinussen je gebruikt hoe beter de benadering is. Je start met een sinus waarvan de frequentie gelijk is aan de frequentie van de niet harmonische trilling. Hierbij tel je sinussen met hogere frequenties op. Iedere keer als je hierbij een sinus met een hogere frequentie optelt wordt de benadering beter.

In figuur 29 zie je een blokvormige trilling die wordt benaderd met sinussen. De blokvorm heeft een frequentie van 100 Hz. In het bovenste diagram zijn twee sinussen opgeteld met 100 en 300 Hz. In het middelste diagram zijn vijf sinussen opgeteld met 100, 300, 500, 700 en 900 Hz. In het onderste diagram zijn tien sinussen opgeteld met 100, 300, 500, 700, 900, 1100, 1300, 1500, 1700 en 1900 Hz.



Figuur 29 (u, t)-diagram van benaderingen van een brokvormige trilling die bestaat uit de som van twee sinussen (boven), vijf sinussen (midden) en tien sinussen (onder).

Fourier analyse en onbepaaldheid van tijd en frequentie

Hoe je kunt bepalen op welke manier je sinussen of cosinussen moet optellen om een bepaald patroon te krijgen vergt wiskunde die je op de middelbare school niet krijgt en staat bekend als **Fourier analyse**. Hieronder vind je de voorschriften voor een driehoek, een blokvorm en een zaagtand die gebruikt zijn in figuren 28 en 29. Wat je hieraan kunt aflezen is dat je de reeks net zo lang kunt maken als je wilt. Ben je tevreden over de nauwkeurigheid dan breek je de reeks af.

Driehoek: $$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\left\{\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \cdots\right\}$$

Blok: $$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots\right\}$$

Zaagtand: $$f(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \cdots\right\}$$

Fourier analyse laat zien dat als je een trilling hebt waarvan de uitwijking heel snel verandert, zoals bij een blokvorm, je niet goed meer kunt vaststellen wat de frequentie is. Je moet immers veel frequenties optellen om een snelle verandering met voldoende nauwkeurigheid te beschrijven. Bij een snelle gebeurtenis heb je dus weinig informatie over de frequentie. Het omgekeerde is ook waar, heb je een trilling die maar uit enkele frequenties bestaat, dan kan die trilling niet snel in de tijd veranderen.

Omdat de energie van een harmonische trilling afhangt van de frequentie mogen we concluderen dat er een relatie bestaat tussen de snelheid van een gebeurtenis en de energie van de trillingen die nodig zijn om deze verandering te beschrijven. Wil je exact weten wanneer iets gebeurt dan weet je niet exact hoeveel energie de trillingen hebben die hiermee gepaard gaan.

Het inzicht dat de nauwkeurigheid waarmee je gebeurtenissen in de tijd kunt vastleggen ten koste gaat van de nauwkeurigheid waarmee je de frequentie en daarmee de energie kunt bepalen gaat in de kwantummechanica een centrale rol spelen en staat bekend als de **onbepaaldheidsrelatie**. In het hoofdstuk over kwantummechanica komen we hier uitvoerig op terug.