

15 Relativiteit

vwo

15.0 Overzicht

15.1 Relativiteitsbeginsel

- Wat is het relativiteitsbeginsel van Galileo Galilei?
- Wat is een inertiaal referentiestelsel?
- Wat kun je met een Galileo transformatie berekenen?
- Mag je de Galileo transformatie ook toepassen voor licht?
- Wat probeerden Michelson en Morley met hun interferometer de meten?
- Welke bijzondere eigenschap heeft de lichtsnelheid?
- Op welke twee postulaten baseert Einstein zijn relativiteitstheorie?

15.2 Tijdrek, gelijktijdigheid en lengtekrimp

- Hoe ziet een lichtklok eruit?
- Waarom gedragen alle ander klokken zich hetzelfde als een lichtklok?
- Waarom loopt een lichtklok langzamer in een bewegend referentiestelsel?
- Wat is de gamma-factor en welke formule hoort hierbij?
- Waarom is de γ -factor altijd groter of gelijk aan 1?
- Wat is tijdrek en hoe bereken je dit?
- Zijn gelijktijdige gebeurtenissen voor iedereen gelijktijdig?
- Wat is lengtekrimp en hoe bereken je dit?
- Op welke manier moet je snelheden bij elkaar optellen?

15.3 Ruimtetijd diagram

- Wat staat er op de horizontale as en op de verticale as bij een ruimtetijd diagram?
- Waarom is het beter om een as met $c \cdot t$ te gebruiken dan een tijd-as met t ?
- Hoe geef je de lichtsnelheid aan in een ruimtetijd diagram?
- Wat is een wereldlijn?
- Wanneer kun je uitsluiten dat twee gebeurtenissen hetzelfde voorwerp betreft?
- Hoe bereken je de hoek tussen de tijd-assen bij een ruimtetijd diagram?
- Met welke formule bereken je het ruimtetijdinterval tussen gebeurtenissen?
- Hangt dit interval af van het referentiestelsel?
- Wanneer kun je uitsluiten dat twee gebeurtenissen causaal zijn?
- Hoe kun je met radioactief verval de relativiteitstheorie controleren?
- Hoe kun je met de waarneming van muonen de relativiteitstheorie bewijzen?
- Waarom is de tweelingparadox een paradox?
- Wat is de oplossing van de tweelingparadox?
- Veroorzaakt de vertraging / versnelling het leeftijdsverschil bij deze paradox?

15.4 Massa en energie

- Op welke manier hangt de massa van een voorwerp af van de snelheid?
- Hoe bereken je de energie van een massa in je eigen referentiestelsel?
- Hoe bereken je de totale energie van een bewegende massa?
- Hoe bereken je de kinetische energie van een bewegende massa?
- Is de kinetische energie van een bewegende massa gelijk aan $E_k = \frac{1}{2}m_0 \cdot v^2$?
- Wanneer mag je $E_k = \frac{1}{2}m_0 \cdot v^2$ niet meer gebruiken?

15.5 Algemene relativiteitstheorie

- Wat is het equivalentie principe?
- Wat bedoel je met trage massa en zware massa?
- Waarom mag je stellen dat licht afbuigt door zwaartekracht?
- Hoe ontstaat tijdrek door zwaartekracht?

15.6 Gekromde ruimte

- Wanneer merk je dat de licht afbuigt door zwaartekracht?
- Waarom mag je niet concluderen dat licht een kromme baan heeft maar dat de ruimte zelf krom is?
- Wat bedoel je met een gravitatielens en wanneer merk je daarvan iets?
- Wat is de waarnemingshorizon en wat de Schwarzschildstraal bij een zwart gat?
- Hoe bereken je de Schwarzschildstraal van een voorwerp?
- Hoe bereken je de tijdrek door de aanwezigheid van massa?
- Wanneer is deze tijdrek belangrijk?

15.1 Relativiteit volgens Galileo Galileï

Relativiteitsbeginsel

Galileo Galileï (Italië, 1564 – 1642) is de eerste natuurkundige die het bewegen van voorwerpen systematisch onderzoekt. Hij komt tot de conclusie dat snelheid relatief is. Daarbij maakt hij gebruik van het volgende gedachtenexperiment. Stel je zit in het ruim van een schip dat in de haven ligt zonder naar buiten te kunnen kijken. In het ruim ga je allerlei experimenten doen. Je laat kogels rollen en steentjes vallen. Je schommelt in een hangmat heen en weer. Je kijkt hoe vissen in een kom zwemmen en hoe vogels in een kooi vliegen.

Op zeker moment begint het schip te varen over een vlakke golfloze zee. In het begin merk je even dat het schip in beweging komt maar als het schip een constante snelheid heeft merk je niets meer van de beweging. De kogels en steentjes rollen en vallen precies hetzelfde als eerst. De hangmat schommelt op dezelfde manier en ook de vissen en de vogels gedragen zich net zoals toen het schip stil in de haven lag. Galileo concludeert dat het onmogelijk is om vast te stellen of het schip stil ligt of met een constante snelheid beweegt. Dit noem je het **relativiteitsbeginsel van Galileo Galileï** en het is een belangrijk natuurkundig inzicht.

Niemand kan weten of hij stilstaat of met een constante snelheid beweegt.

In het dagelijks leven kom je soms in een situatie waarin het onduidelijk is of je beweegt of stilstaat.

VOORBEELD stilstaan of bewegen

Je zit in een trein en kijkt naar buiten naar een andere trein. Je denkt dat je beweegt, maar als je naar de omgeving kijkt zie je dat je stilstaat en dat de andere trein aan het rijden is.

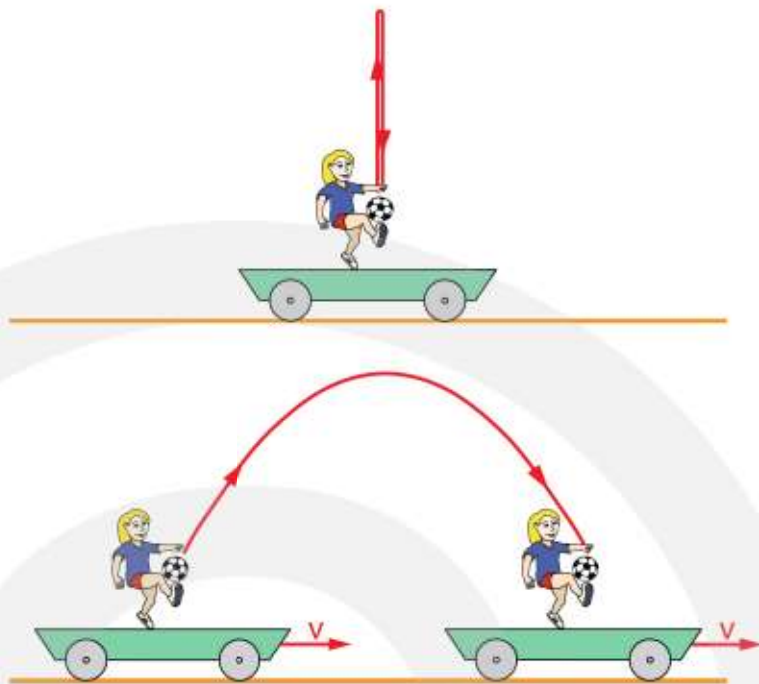
Je bent in een langzaam rijdende file. Als je naar buiten kijkt lijkt het of alle auto's stilstaan. Maar alle auto's rijden met dezelfde snelheid.

Je zit in een vliegtuig die met 1000 km/h beweegt maar je merkt er niets van.

Gebeurtenissen gezien door verschillende waarnemers

Een gebeurtenis kan door verschillende waarnemers anders worden gezien. Stel Bea bevindt zich in een rijdende trein en schiet een bal omhoog. Voor Bea, en voor alle andere passagiers in de trein, gaat de bal recht omhoog en valt daarna recht naar beneden. Maar Anna, langs het spoor, ziet dezelfde gebeurtenis heel anders. Voor Anna volgt de bal een parabolische baan.

Figuur 1
Dezelfde gebeurtenis
wordt verschillend
waargenomen.



Voor Bea heeft de bal geen horizontale snelheid (langs het spoor). Maar Anna is het hier niet mee eens. Voor Anna heeft de bal een horizontale snelheid gelijk aan v , de snelheid van de trein. Ze zijn het er wél over eens dat de bal geen versnelling of vertraging heeft in de horizontale richting. Waar ze het ook over eens zijn is dat de snelheid bij het omhoog gaan een vertraging heeft van $9,81 \text{ m/s}^2$ en bij het naar beneden vallen een versnelling van $9,81 \text{ m/s}^2$.

We zeggen dat Anna en Bea zich in verschillende **referentiestelsels** bevinden. Referentiestelsels die ten opzichte van elkaar met een constante snelheid in een rechte lijn bewegen noemen we **inertiaal referentiestelsels**. Volgens het relativiteitsbeginsel van Galileo zijn de bewegingswetten hetzelfde in ieder inertiaal referentiestelsel.

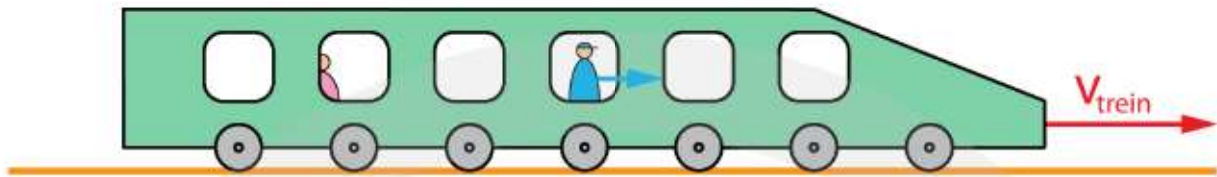
Inertiaal referentiestelsels bewegen met een constante snelheid in een rechte lijn ten opzichte van elkaar.

De drie wetten van Newton: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \quad | \quad \Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad | \quad \vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$ voldoen aan het relativiteitsprincipe van Galileo. Bij het optellen of aftrekken van een snelheid verandert de versnelling immers niet. De resulterende kracht zal daarom ook niet veranderen. De bewegingsvergelijkingen, die het gevolg zijn van Newton's wetten zijn daarom hetzelfde in ieder inertiaal referentiestelsel.

Snelheden optellen

Stel Bea zit in een trein die met 10 m/s langs het perron rijdt, zie figuur 2. Bea ziet de conducteur naar voren lopen met 1 m/s . Anna staat op het perron en concludeert dat de conducteur met 11 m/s beweegt. In één seconde is de trein immers 10 meter ver-

plaatst en is de conducteur 1 m verplaatst in de trein, samen 11 meter. Loopt de conducteur naar achteren met 1 m/s dan is zijn snelheid volgens Anna $10 - 1 = 9$ m/s. Zoals je ziet kun je snelheden bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.



Figuur 2 Snelheden optellen. Op het perron zie je dat de snelheid van de conducteur gelijk is aan de snelheid van de trein plus de snelheid waarmee de conducteur door de trein loopt.

We bekijken de situatie vanuit twee verschillende waarnemers die we A en B zullen noemen. Waarnemer A ziet de trein voorbij komen met snelheid v_A . Waarnemer B ziet de trein voorbij komen met snelheid v_B . Als A en B niet bewegen ten opzichte van elkaar geldt natuurlijk $v_A = v_B$.

Maar stel dat B een constante snelheid v_{AB} heeft ten opzichte van A in dezelfde richting als de trein. Dan ziet B de trein voorbij komen met een snelheid $v_B = v_A - v_{AB}$.

A en B bewegen in dezelfde richting:
$$v_B = v_A - v_{AB}$$

- v_B is de snelheid van een voorwerp waargenomen door B
- v_A is de snelheid van een voorwerp waargenomen door A
- v_{AB} is de snelheid tussen de waarnemers A en B

We gaan nu de waarnemingen van A en B met elkaar in verband brengen. Om de waarnemingen van A en B uit elkaar te houden noteren we een superscript A of B bij de plaats en de tijd:

- x^A en t^A zijn de plaats en de tijd volgens A
- x^B en t^B zijn de plaats en de tijd volgens B

We krijgen nu de **Galileo transformatie**:

$$x^B = x^A - v_{AB} \cdot t$$

$$t^B = t^A = t$$

- x^B is de plaats van een voorwerp volgens waarnemer B
- x^A is de plaats van een voorwerp volgens waarnemer A
- v_{AB} is de snelheid tussen de waarnemers A en B
- t^B is de verstreken tijd volgens waarnemer B
- t^A is de verstreken tijd volgens waarnemer A

BEWIJS

- plaats volgens A: $x^A = v_A \cdot t^A$
- plaats volgens B: $x^B = v_B \cdot t^B$
- invullen: $v_B = v_A - v_{AB}$
- $x^B = (v_A - v_{AB}) \cdot t^B$
- invullen: $t^A = t^B = t$
- invullen: $x^B = v_A \cdot t^A - v_{AB} \cdot t^A \rightarrow x^B = x^A - v_{AB} \cdot t$

VOORBEELD wielrenners

Waarnemer A staat langs de weg en ziet een peloton wielrenners met een snelheid van 15 m/s voorbij komen. Waarnemer B zit op een motor die met een snelheid van 12 m/s ten opzichte van A achter het peloton rijdt. Op $t=0$ zijn de waarnemers A en B én het peloton op $x=0$.

Bereken de plaats van het peloton waargenomen door B op $t = 10$ s.

- waarnemer A: $x^A = v_A \cdot t \rightarrow x^A = 15 \cdot 10 = 150$ m
- Galileo transformatie: $x^B = x^A - v_{AB} \cdot t$
- waarnemer B: $x^B = 150 - 12 \cdot 10 = 30$ m

CONTROLE

- iedere seconde neemt de afstand tussen B en het peloton 3 meter toe
- na 10 seconde is de afstand tussen B en het peloton 30 meter

De lichtsnelheid

In 1849 wordt door Hippolyte Fizeau (Frankrijk, 1819 – 1896) met behulp van een snel roterende tandwiel de lichtsnelheid gemeten met een nauwkeurigheid van 5%. Hij komt op $3,15 \cdot 10^8$ m/s. In 1862 verbetert Léon Foucault (Frankrijk, 1819 – 1868) de nauwkeurigheid door met een roterende spiegel te werken. Hij vindt $2,98 \cdot 10^8$ m/s. Volgens de theorie van Maxwell wordt de golfsnelheid van elektromagnetische straling gegeven door: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$, waarin μ_0 en ϵ_0 vaste getallen zijn. Bereken je hiermee de golfsnelheid dan vind je $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Omdat dit exact overeenkomt met de lichtsnelheid concludeert Maxwell dat licht een elektromagnetische golf is.

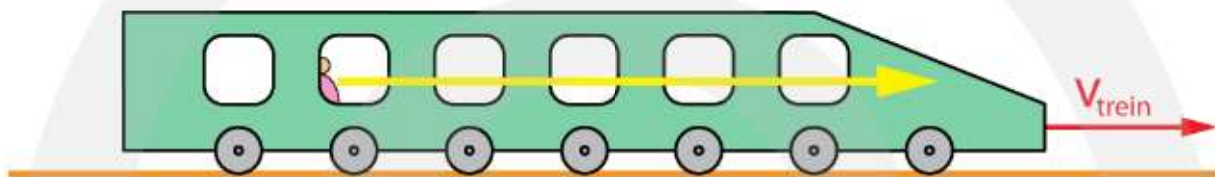
Licht is een elektrisch en magnetisch verschijnsel.

Lichtgolven verplaatsen zich door de ruimte met een vaste snelheid c .

$$c = 299.792.458 \text{ m / s}$$

Maar met deze snelheid is wel iets bijzonders aan de hand. Er geldt immers:
 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$ en omdat ϵ_0 en μ_0 vaste getallen zijn is de lichtsnelheid voor iedere waarnemer hetzelfde.

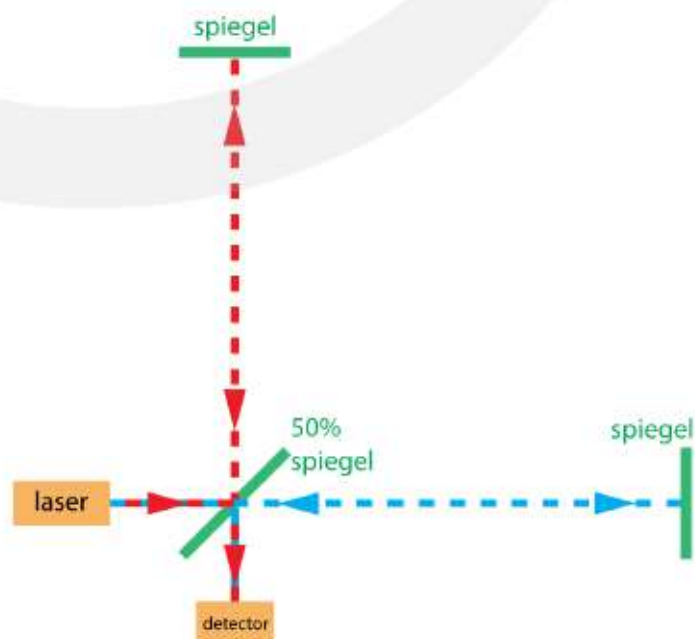
We kunnen nu het volgende gedachtenexperiment uitvoeren, zie figuur 3. Bea zit in de trein die 40 m/s rijdt en schijnt met een zaklamp naar voren. Ze meet de lichtsnelheid en komt precies op de bekende waarde. Anna staat op het perron en meet ook de snelheid van het licht uit de zaklamp van B. Ze verwacht dat zij de snelheid van het licht moet optellen bij de snelheid van de trein: $(299.792.458 + 40)$ m/s, maar dat blijkt niet zo te zijn. Ook Anna vindt precies 299.792.458 m/s. Het maakt niet uit of de trein rijdt of stilstaat, altijd meten zowel A als B dezelfde lichtsnelheid.



Figuur 3 De lichtsnelheid heeft voor iedere waarnemer dezelfde waarde.

De wetten van Newton en de daaruit voortkomende bewegingswetten voldoen aan het relativiteitsprincipe van Galileo, maar de wetten van Maxwell niet. Voor de wetten van Maxwell mag de Galileo-transformatie niet worden gebruikt.

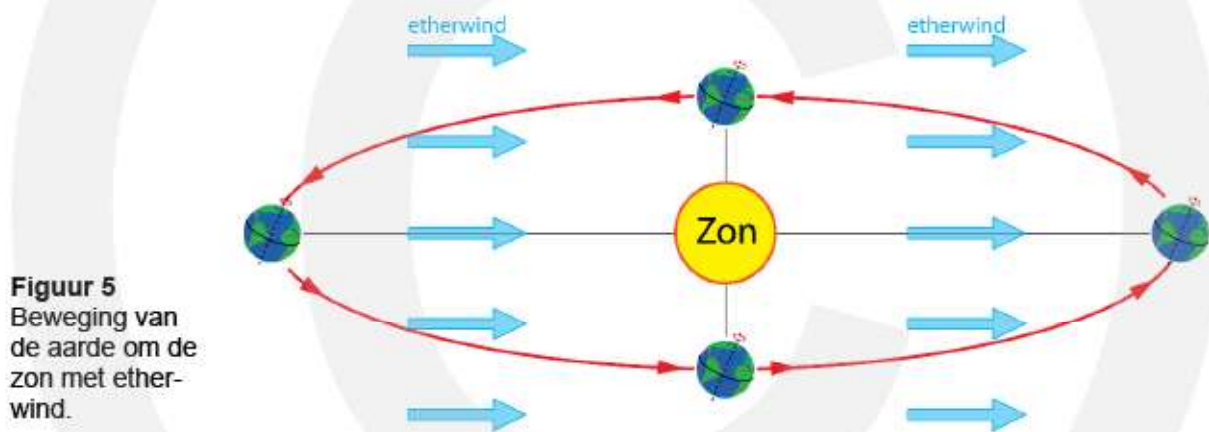
Om dit verder te onderzoeken is in 1887 door Albert Michelson en Edward Morley een belangrijk experiment uitgevoerd. In die tijd is men ervan overtuigd dat de ruimte gevuld is met "ether" waarin lichtgolven zich voortplanten. Michelson en Morley willen de snelheid van de aarde ten opzichte van de ether meten. In het apparaat dat ze ontwerpen wordt de lichtsnelheid gemeten in twee richtingen die loodrecht op elkaar staan. Zie figuur 4.



Figuur 4
 Interferometer waarmee Michelson en Morley de snelheid van de aarde ten opzichte van de ether probeerden te meten.

Licht uit een coherente lichtbron, zoals een laser, valt op een halfdoorlatende spiegel en wordt gesplitst in twee loodrechte richtingen. De twee lichtbundels, aangegeven in rood en blauw, leggen even lange routes af, waarbij ze halverwege worden teruggekaatst en uiteindelijk samenkomen in een detector. Als de interferometer stilstaat ten opzichte van de ether verwacht je dat de lichtbundels exact gelijk aankomen, maar als de interferometer beweegt ten opzichte van de ether, bijvoorbeeld in de horizontale richting, dan verwacht je dat de blauwe bundel die parallel aan de bewegingsrichting staat, een fractie later in de detector aankomt dan de rode bundel die, loodrecht op de bewegingsrichting staat.

Omdat de aarde met een snelheid van 108.000 km/h om de zon draait verwacht je verschillende meetresultaten als je het experiment op verschillende momenten in het jaar uitvoert. Gedurende het jaar verandert immers de bewegingsrichting van de aarde. Je moet wel heel nauwkeurig meten, want de lichtsnelheid is 10.000 keer groter dan de snelheid van de aarde, zodat de invloed van de bewegende aarde klein is.



Figuur 5
Beweging van
de aarde om de
zon met ether-
wind.

Met veel moeite zijn Michelson en Morley in staat de gevoeligheid van hun interferometer zo groot te maken dat er een onweerlegbaar antwoord komt op de vraag of er een verschil in reistijd is tussen de blauwe en de rode lichtstraal. En het antwoord is nee. Hoe je de interferometer ook positioneert ten opzichte van de bewegingsrichting van de aarde, altijd komen de twee lichtstralen tegelijkertijd aan. De lichtsnelheid is in beide armen altijd gelijk aan elkaar, ook al beweegt de interferometer door de veronderstelde etherwind.

De lichtsnelheid is niet relatief maar heeft een absolute waarde die voor iedere waarnemer hetzelfde is: $3,0 \cdot 10^8$ m/s

Voor de lichtsnelheid geldt $c_B = c_A$ (en dus NIET $c_B = c_A - v_{AB}$)

Toen Albert Einstein (Duitsland, 1879 – 1955) hier over nadacht heeft hij de juiste conclusie getrokken: het relativiteitsprincipe van Galileo én een lichtsnelheid die voor iedere waarnemer hetzelfde is zijn beide waar. In 1905 publiceert hij zijn speciale relativiteitstheorie gebaseerd op twee postulaten:

POSTULAAT 1

In alle inertiaal referentiestelsels zijn alle natuurwetten gelijk.

POSTULAAT 2

De lichtsnelheid in vacuüm is constant en is onafhankelijk van de beweging van de lichtbron en van de waarnemers.

Einstein realiseert zich dat het relativiteitsprincipe van Galileï al vaak experimenteel is vastgesteld en dat ook het constant zijn van de lichtsnelheid door Michelson en Morley experimenteel is bewezen. Waar iedereen vanuit gaat, maar wat niet experimenteel is bewezen, is dat de tijd voor waarnemers A en B hetzelfde zijn. In de afleiding van de Galileï transformatie staat $t^A = t^B = t$ maar de twee postulaten van Einstein zijn hiermee niet in overeenstemming. De veronderstelling dat de tijd voor iedere waarnemer even snel gaat voldoet aan onze alledaagse beleving van tijd. Maar bij snelheden in de buurt van de lichtsnelheid is onze belevingswereld niet meer betrouwbaar. Klokken die ten opzichte van elkaar bewegen tikken anders.

Vóór Einstein:

de lichtsnelheid is relatief, de tijd is absoluut.

Na Einstein:

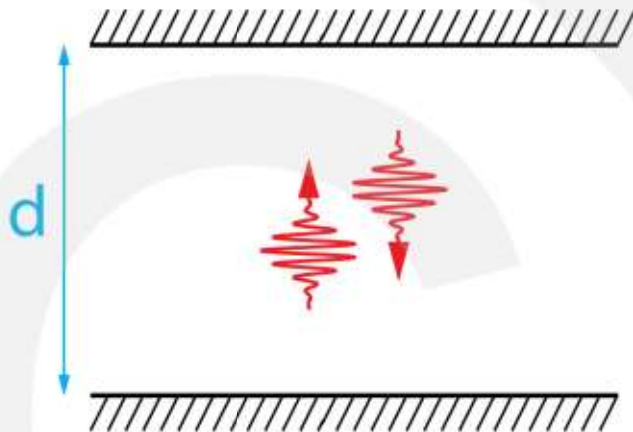
de lichtsnelheid is absoluut, de tijd is relatief.

15.2 Tijdrek, gelijktijdigheid en lengtekrimp

Tijdrek

Om te begrijpen hoe de tijd zich gedraagt moeten we nagaan hoe tijd gemeten wordt. Hiertoe maken we gebruik van een **lichtklok**. Een lichtklok bestaat uit twee evenwijdige spiegels met afstand d . Tussen de spiegels laten we een foton heen en weer kaatsen, zie figuur 6. Iedere keer als het foton op en neer is gegaan geeft de klok een tik.

Figuur 6
Lichtklok



Kiezen we een afstand van 0,15 m tussen de spiegels dan is de tijd die een foton nodig heeft $t = d/c \rightarrow t = 0,30 / 3,0 \cdot 10^8 = 1,0 \cdot 10^{-9}$ s. Iedere nanoseconde geeft de klok een tik.

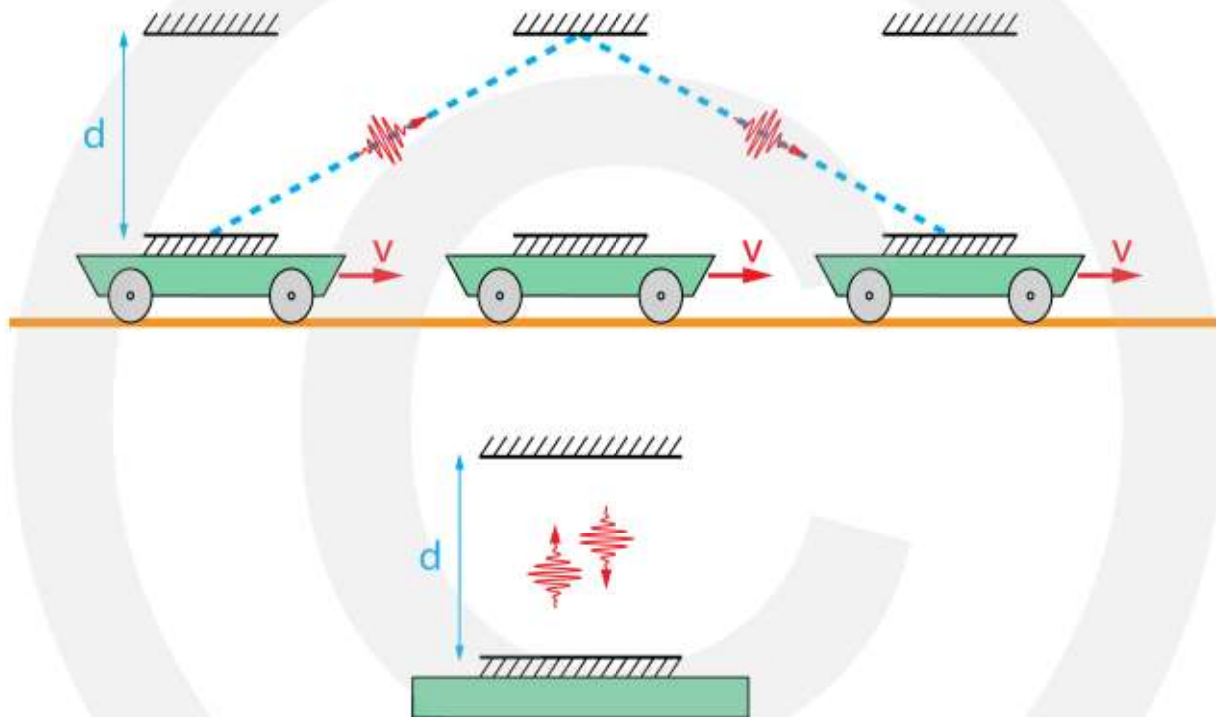
De lichtklok kunnen we vergelijken met een willekeurige andere klok, zoals een kwartsklok, waarin een trillend kwartskristal het verlopen van de tijd aangeeft, een atoomklok die gebaseerd is op atomaire processen, of de hartslag van een mens, gebaseerd op biologische processen. We gaan uit van ideale klokken. Staan deze klokken stil ten opzichte van elkaar, dan lopen ze gelijk. Bewegen de klokken met dezelfde constante snelheid, dan bevinden ze zich in hetzelfde inertiaal referentiestelsel waardoor ze volgens postulaat 1 gelijk blijven lopen. Alle natuurkundige processen zijn immers gelijk in alle inertiaal referentiestelsels. Wat we concluderen over een lichtklok geldt dus voor iedere andere klok. Zie figuur 7.



Figuur 7 Klokken die zich in hetzelfde inertiaal referentiestelsel bevinden lopen gelijk.

We gaan nu twee lichtklokken vergelijken die zich in verschillende inertiaal referentiestelsels bevinden. Bea bevindt zich samen met een lichtklok in een rijdende trein. Anna bevindt zich langs het spoor en heeft ook een lichtklok. Als de trein stilstaat controleren Anna en Bea dat hun klokken exact gelijk lopen.

Vervolgens gaat de trein rijden met een constante snelheid v . Bea, die zich met haar klok in de trein bevindt merkt geen enkele verandering. Anna vergelijkt haar lichtklok met die van Bea en ziet iets bijzonders. Het licht in de klok van Bea heeft een snelheidscomponent in de richting waarin de trein beweegt. In figuur 8 zie je wat Anna waarneemt.



Figuur 8 Lichtklokken zoals waargenomen door Anna. Boven ziet ze de lichtklok van Bea en onder haar eigen lichtklok.

De tijd die het licht in de klok van Bea nodig heeft om van de onderste naar de bovenste spiegel te gaan noemt Anna Δt . In dit tijdsinterval heeft de trein de afstand $s_{\text{trein}} = v \cdot \Delta t$ afgelegd en het licht in Bea's klok de afstand $s_{\text{licht}} = \sqrt{s_{\text{trein}}^2 + d^2}$. In Anna's klok hoeft het licht slechts afstand d af te leggen. Om van de onderste naar de bovenste spiegel te gaan heeft het licht in Bea's klok meer tijd nodig dan het licht in Anna's klok. Volgens Anna loopt Bea's klok langzamer dan die van haar.

We moeten dus onderscheid maken tussen het waarnemen van de tijd in je eigen referentiestelsel en de tijd die je waarneemt in een voor jouw bewegend referentiestelsel. Voor een waarneming in je **eigen** referentiestelsel gebruiken we subscript e en voor een waarneming in een **bewegend** referentiestelsel subscript b .

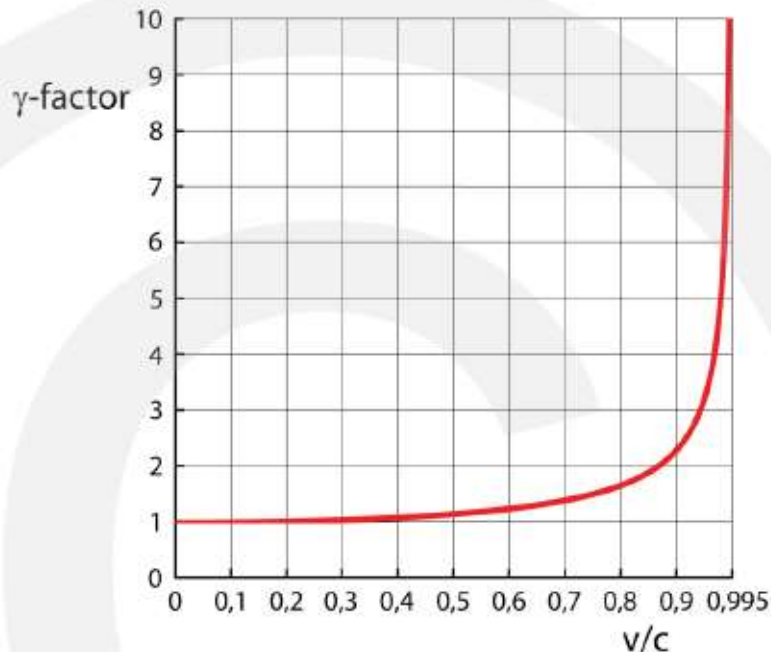
Δt_e is het tijdsinterval in je eigen referentiestelsel.

Δt_b is het tijdsinterval in het referentiestelsel dat volgens jou beweegt.

Bereken je de verhouding in tijd om van de onderste naar de bovenste spiegel te gaan tussen de stelsels A en B dan vind je $\frac{\Delta t_b}{\Delta t_e} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. De factor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ komt veel

voor in de speciale relativiteitstheorie en wordt de gammafactor (γ -factor) genoemd. Pas bij een snelheid groter dan 0,5c gaat de γ -factor merkbaar afwijken van 1.

Figuur 9
 γ -factor als functie van v/c .



$$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Δt_b is de tijd in het bewegend referentiestelsel (s) (klok B volgens Anna)
- Δt_e is de tijd in het eigen referentiestelsel (s) (klok A volgens Anna)
- v is de snelheid tussen de referentiestelsels A en B (m/s)
- c is de lichtsnelheid (m/s)

BEWIJS

- klok B: $s_{\text{licht}} = \sqrt{s_{\text{trein}}^2 + d^2}$
- invullen: $s_{\text{licht}} = c \cdot \Delta t$ | $s_{\text{trein}} = v \cdot \Delta t$
- $c \cdot \Delta t = \sqrt{(v \cdot \Delta t)^2 + d^2} \rightarrow (c \cdot \Delta t)^2 = (v \cdot \Delta t)^2 + d^2 \rightarrow$
- $1 = \frac{v^2}{c^2} + \frac{d^2}{(c \cdot \Delta t)^2} \rightarrow \frac{d^2}{(c \cdot \Delta t)^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \rightarrow \frac{d}{(c \cdot \Delta t)} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$
- $\frac{c \cdot \Delta t}{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \Delta t = \frac{d}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- invullen $\Delta t_e = \frac{d}{c}$ geeft $\Delta t_b = \Delta t_e \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$

VOORBEELD

tijdrek

De trein waarin Bea zich bevindt beweegt met 0,6 keer de lichtsnelheid. Anna bevindt zich langs het spoor. $\Delta t_{\text{klok A}}$ is de tijd die het licht nodig heeft om in klok A heen en weer te gaan en één tik te geven. In een bepaald tijdsinterval heeft de klok van Anna 100 tikken gegeven.

Bereken hoeveel tikken de klok van Bea in dit tijdsinterval geeft.

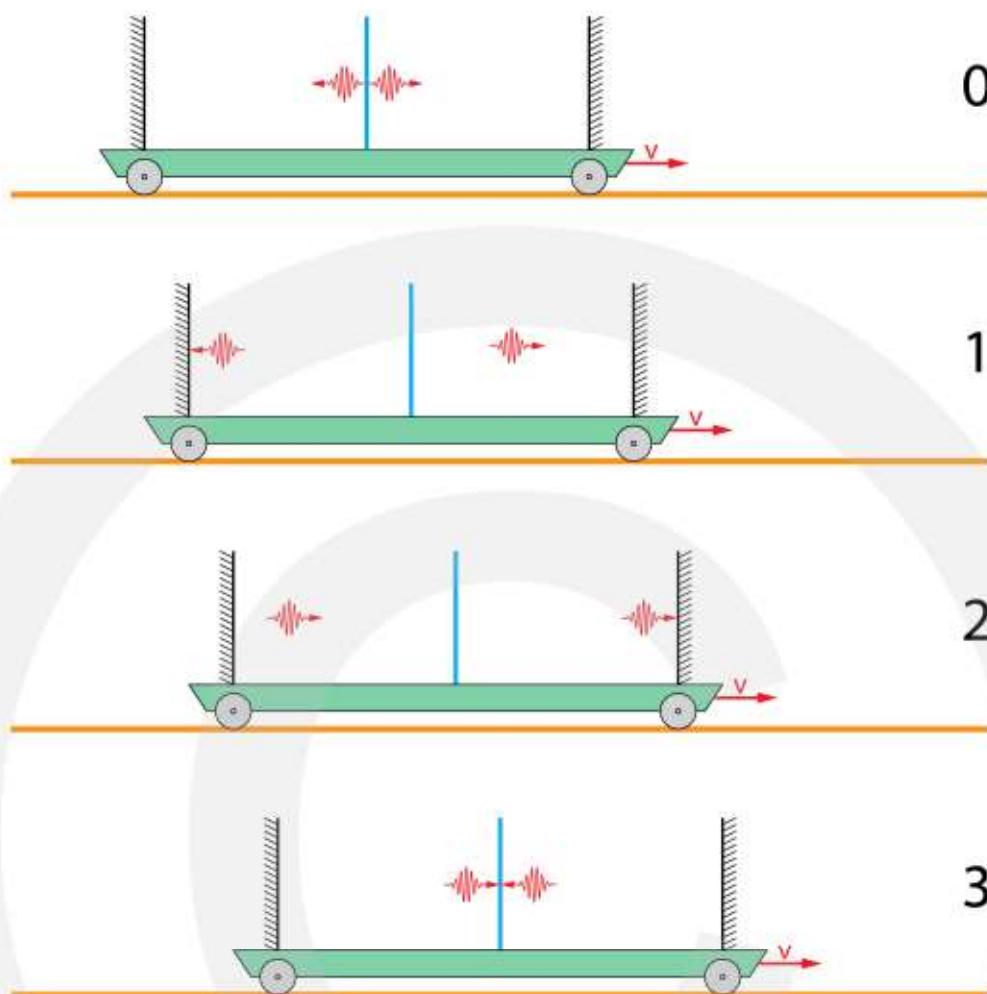
- $\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,6^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,36}} = \frac{1}{\sqrt{0,64}} = \frac{1}{0,8}$
- $\Delta t_b = \frac{1}{0,8} \cdot \Delta t_e \rightarrow \Delta t_b = 1,25 \cdot \Delta t_e$
- in het bewegend stelsel loopt de klok een factor 1,25 langzamer dan in het eigen referentiestelsel
- in de tijd dat een foton in het eigen stelsel 100 keer op-en-neer is geweest is een foton in het bewegend stelsel $100 / 1,25 = 80$ keer op en neer geweest.

Gelijktijdigheid

Nu we weten dat de klokken van Anna en Bea niet meer gelijk lopen als ze ten opzichte van elkaar bewegen kunnen we ons afvragen of gebeurtenissen die door Bea als gelijktijdig worden waargenomen ook voor Anna gelijktijdig zijn. Dit blijkt niet zo te zijn, zoals in figuur 10 wordt aangetoond.

Bea bevindt zich in het midden van een rijdende trein waarin aan beide uiteinden spiegels zijn aangebracht. Op $t=0$ zendt Bea twee lichtpulsen uit, één naar voren en één naar achteren. Op t_1 komt de achterwaartse lichtbundel aan bij de spiegel en op t_2 komt de voorwaartse lichtbundel aan. Voor Bea komen de lichtbundels gelijktijdig aan bij de spiegels. In het eigen referentiestelsel B geldt: $t_e(1) = t_e(2)$. Ook voor Anna, die langs het spoor staat, vertrekken de fotonen gelijktijdig. Maar volgens haar komt het naar achteren gerichte foton eerder bij de spiegel (gebeurtenis 1) dan het naar voren gerichte foton (gebeurtenis 2). Anna ziet in het bewegend referentiestelsel: $t_b(1) < t_b(2)$. Gebeurtenissen die voor Bea in haar eigen referentiestelsel gelijktijdig plaatsvinden zijn in het referentiestelsel van Anna niet gelijktijdig.

Gebeurtenissen die in referentiestelsel B gelijktijdig zijn gebeuren in referentiestelsel A op verschillende tijdstippen.



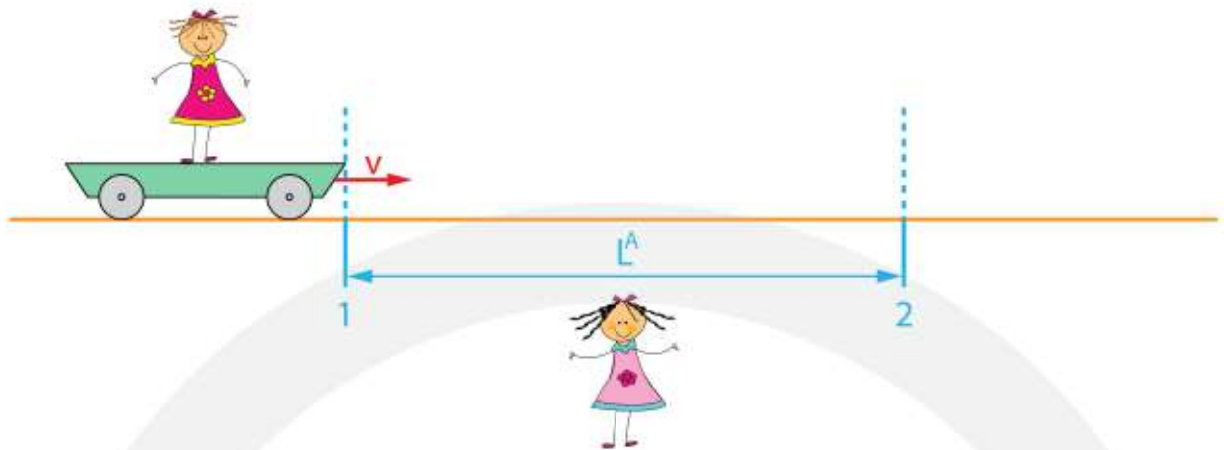
Figuur 10 Twee fotonen worden op hetzelfde moment in het midden van de trein uitgezonden.

- 0 Twee fotonen worden uitgezonden.
- 1 Het naar achteren gerichte foton wordt teruggekaatst.
- 2 Het naar voren gerichte foton wordt teruggekaatst.
- 3 De fotonen komen in het midden aan.

Lengtekrimp

Om de lengte van een voorwerp te meten moet je de plaats van de voorkant en van de achterkant meten en daarna het verschil uitrekenen. Als het voorwerp stilstaat kun je eerst de plaats van de voorkant meten en even later de plaats van de achterkant. Maar als het voorwerp niet stilstaat kan dit niet, omdat het voorwerp tussen de twee metingen is verplaatst. Om geen meetfout te maken moet je de posities van de voorkant en de achterkant **gelijktijdig** meten. Maar zoals we hierboven hebben gezien ontstaat er een probleem, want **gelijktijdig** voor waarnemer B is niet **gelijktijdig** voor waarnemer A.

Om hiervan de consequenties te onderzoeken doen we het volgende experiment. Anna markeert twee plaatsen x_1 en x_2 met een afstand L^A . Zie figuur 11. Vervolgens rijdt de trein, waarop Bea zich bevindt, met snelheid v voorbij. Als de trein x_1 passeert gaat bij zowel Anna als Bea de klok lopen. Anna en Bea meten beiden de tijd waarin de trein van x_1 naar x_2 rijdt.



Figuur 11 De trein met Bea rijdt van begin naar eind. In het referentiestelsel van Anna is L^A de afstand tussen begin en eind.

Bea meet een kleinere afstand tussen x_1 en x_2 dan Anna. Dit wordt **lengtekrimp** genoemd waarvoor geldt:

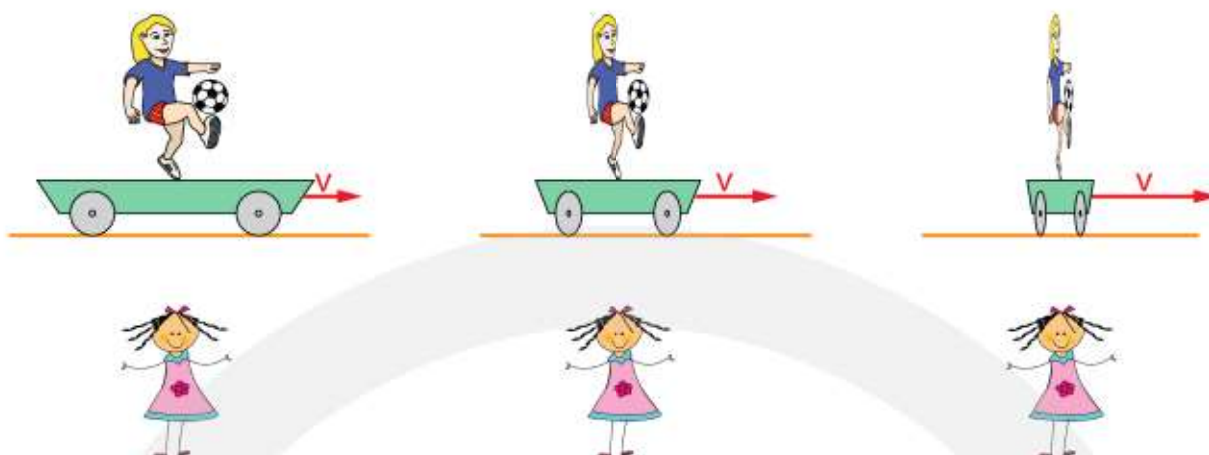
$$L_b = \frac{L_e}{\gamma} \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- L_b is de gemeten afstand in het bewegend referentiestelsel (m)
- L_e is de gemeten afstand in het eigen referentiestelsel (m)
- v is de snelheid tussen de referentiestelsels A en B (m/s)
- c is de lichtsnelheid (m/s)

BEWIJS

- gemeten tijd door Anna: $t^A = \frac{L^A}{v} \rightarrow L^A = v \cdot t^A$
- de klok in stelsel B loopt langzamer $\rightarrow$ Bea's klok geeft minder tijd aan
- $t^B = \frac{t^A}{\gamma} \rightarrow t^A = \gamma \cdot t^B \rightarrow v \cdot t^A = \gamma \cdot v \cdot t^B \rightarrow L^A = \gamma \cdot L^B \rightarrow L^B = \frac{L^A}{\gamma}$
- x_1 en x_2 staan stil in het referentiestelsel van Anna $\rightarrow L_e = L^A \rightarrow L_b = \frac{L_e}{\gamma}$

In figuur 12 zie je het gevolg van lengtekrimp. Net als in figuur 1 kijkt Anna naar Bea die in een rijdende trein een bal omhoog schiet. In het linker plaatje heeft de trein een lage snelheid zodat de lengtekrimp niet opvalt. In het middelste plaatje heeft de trein een snelheid van $0,8 \cdot c$, wat een lengtekrimp van 60% ($L_b = 0,6 \cdot L_e$) geeft. In het rechter plaatje heeft de trein een snelheid van $0,98 \cdot c$, wat een lengtekrimp van 80% ($L_b = 0,8 \cdot L_e$) geeft.



Figuur 12 In de richting van de beweging is er lengtekrimp.
 Links: de snelheid is laag $\rightarrow$ de lengtekrimp is niet te zien.
 Midden: de trein rijdt met $0,8 \cdot c \rightarrow L_b = 0,6 \cdot L_e$.
 Rechts: de trein rijdt met $0,98 \cdot c \rightarrow L_b = 0,2 \cdot L_e$.

VOORBEELD lengtekrimp

De trein waarin Bea zich bevindt heeft een snelheid van $0,8$ keer de lichtsnelheid. Anna bevindt zich langs het spoor. Volgens Anna is de afstand tussen begin en eind 100 meter.

Bereken de afstand tussen begin en eind gemeten door Bea.

- gebruik: $L_b = \frac{L_e}{\gamma}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,8 \cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,64}} = \frac{1}{\sqrt{0,36}} = \frac{1}{0,6}$
- $L_b = \frac{L_e}{\frac{1}{0,6}} = 0,6 \cdot L_e$
- $L_b = 0,6 \cdot 100 = 60 \text{ m}$

Snelheden optellen

Eerder hebben we gezien dat vóór de komst van Einsteins relativiteitstheorie gedacht werd dat snelheden altijd bij elkaar mogen worden opgeteld. Stel dat Bea zich in een trein bevindt die met snelheid v_{AB} langs Anna rijdt. Bea ziet vanuit haar referentiestelsel dat de conducteur met snelheid v_B naar voren loopt. Anna, die zich langs het spoor bevindt, ziet de conducteur voorbij komen met snelheid $v_A = v_B + v_{AB}$. Met de komst van de relativiteitstheorie is deze redenering niet langer geldig. Stel immers dat Bea in de rijdende trein haar zaklantaarn naar voren richt en lichtsnelheid c_B meet dan zou volgens de simpele optelregel het licht uit Bea's zaklantaarn voorbij zien komen met een snelheid $c_A = c_B + v_{AB}$ en dat is in tegenspraak met de experimenten

die hebben laten zien dat $c_A = c_B = c$. Snelheden mogen dus niet zomaar bij elkaar worden opgeteld want anders is een snelheid groter dan de lichtsnelheid mogelijk. Voor snelheden geldt de volgende optelregel:

$$v_A = \frac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$$

- v_A is de snelheid van een voorwerp volgens waarnemer A (m/s)
- v_B is de snelheid van een voorwerp volgens waarnemer B (m/s)
- v_{AB} is de snelheid tussen de waarnemers A en B (m/s)
- c is de lichtsnelheid (m/s)

VOORBEELD snelheid optellen

De trein waarin Bea zich bevindt heeft een snelheid van 0,8 keer de lichtsnelheid. Bea schiet een bal met 0,4 keer de lichtsnelheid naar voren. Anna bevindt zich langs het spoor.

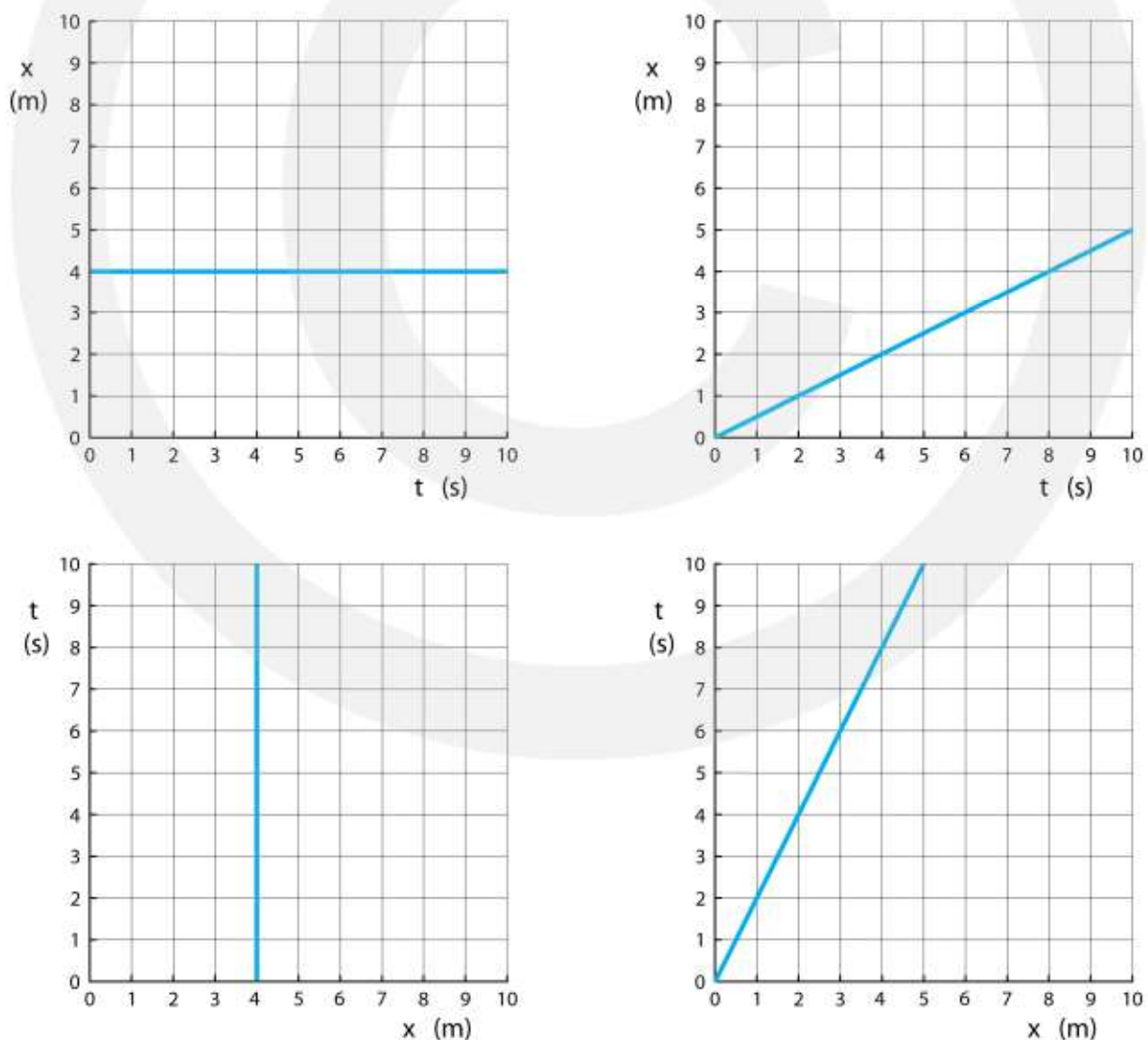
Bereken de snelheid van de bal zoals door Anna wordt waargenomen.

- gebruik $v_A = \frac{v_B + v_{AB}}{1 + \frac{v_B \cdot v_{AB}}{c^2}}$
- $v_A = \frac{0,4 \cdot c + 0,8 \cdot c}{1 + \frac{(0,4 \cdot c)(0,8 \cdot c)}{c^2}}$
- $v_A = \frac{0,4 \cdot c + 0,8 \cdot c}{1 + 0,4 \cdot 0,8} \rightarrow v_A = \frac{1,2 \cdot c}{1 + 0,32}$
- $v_A = \frac{1,2}{1,32} \cdot c \rightarrow v_A = 0,91 \cdot c$

MERK OP: Anna ziet de bal dus niet met $0,4 + 0,8 = 1,2 c$ voorbij komen!

15.3 Ruimtetijd diagram

In de tijd dat Einstein studeerde in Zurich werkt Hermann Minkowski daar als wiskundedocent. Als hij kennismaakt met de relativiteitstheorie van zijn oud leerling beseft hij dat je deze theorie het beste kunt begrijpen in een niet-Euclidische ruimte. Hiermee wordt een ruimte bedoeld waar de tijd en de ruimte samenhangen in een vier-dimensionale ruimtetijd. Gebeurtenissen kunnen worden weergegeven in een ruimtetijd diagram, waardoor de algebraïsche beschrijving met formules, die we tot nu toe hebben gehanteerd, wordt vertaald naar een geometrische beschrijving. Niet door te rekenen, maar door te tekenen kun je dan zien hoe de relativiteitstheorie werkt. Ruimtetijd diagrammen worden ook wel Minkowski diagrammen genoemd. Het is gebruikelijk om bij deze diagrammen de plaats op de horizontale as te zetten en de tijd op de verticale as. Zie figuur 13.

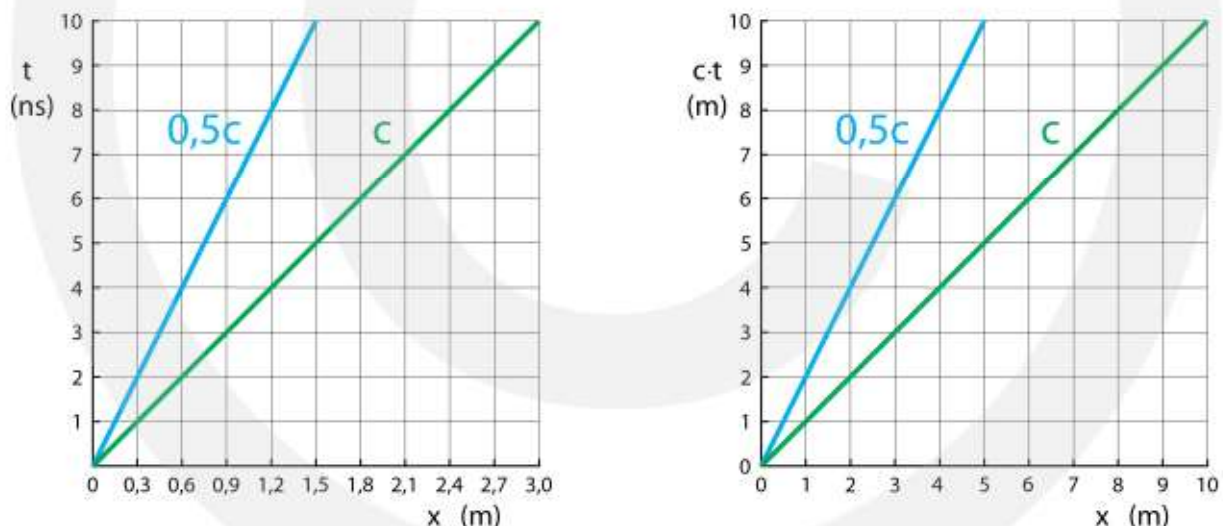


Figuur 13 (plaats, tijd)-diagrammen.

Boven: horizontaal de tijd en verticaal de plaats, stilstaan (links) en constante snelheid (rechts).
Onder: horizontaal de plaats en verticaal de tijd, stilstaan (links) en constante snelheid (rechts).

We nemen het inertiaal referentiestelsel van Anna die zich langs het spoor bevindt als uitgangspunt. Anna ziet een trein met snelheid v_{AB} voorbij rijden. De trein heeft een snelheid van 0,5 keer de lichtsnelheid. Van deze gebeurtenis maakt Anna een (plaats, tijd)- diagram. Omdat de trein in korte tijd een erg grote afstand aflegt is het verstandig om het rooster op de tijd-as aan te passen. Stel je neemt als stappen op de t-as 10^{-9} seconden (1 ns) en de stappen op de x-as 0,30 m dan wordt snelheid c weergegeven door een lijn met een hoek van 45 graden. Het nadeel is dat bij de x-as een stapgrootte van 0,3 meter moet worden gebruikt.

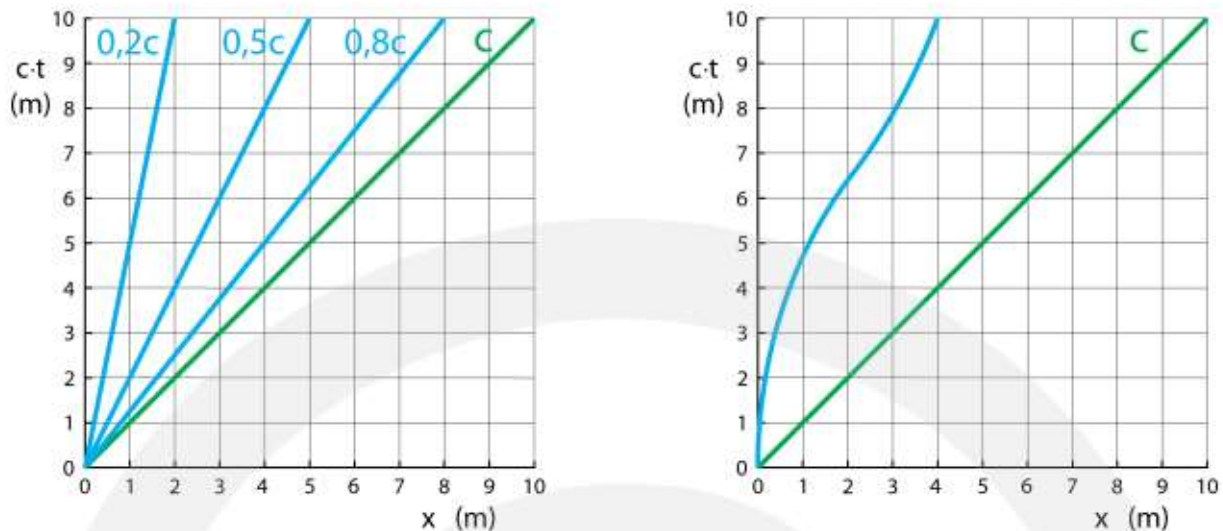
Wat we beter kunnen doen is op de verticale as niet de tijd maar de lichtsnelheid keer de tijd $c \cdot t$ aangeven en op de horizontale as de plaats. Het voordeel hiervan is dat de stappen op beide assen dan in meter zijn. Op de horizontale as kun je de afstand rechtstreeks aflezen. Op de verticale as moet je het getal delen door c om de tijd te berekenen. Zie figuur 14. Een diagram met op de verticale as $c \cdot t$ en op de horizontale as de plaats noemen we een ruimtetijd diagram, of een Minkowski diagram. Omdat er drie plaatscoördinaten zijn en één tijdcoördinaat zijn ruimtetijd diagrammen in werkelijkheid vierdimensionaal. Om het niet te moeilijk te maken behandelen we in dit hoofdstuk alleen bewegingen in één richting, die we de x-richting zullen noemen. Het ruimtetijddiagram heeft dan maar één ruimte-as (horizontaal) en één tijd-as (verticaal).



Figuur 14 Het ruimtetijd diagram. De rode lijn geeft het licht aan dat met de lichtsnelheid reist. De blauwe lijn geeft een voorwerp aan dat met de helft van de lichtsnelheid reist.

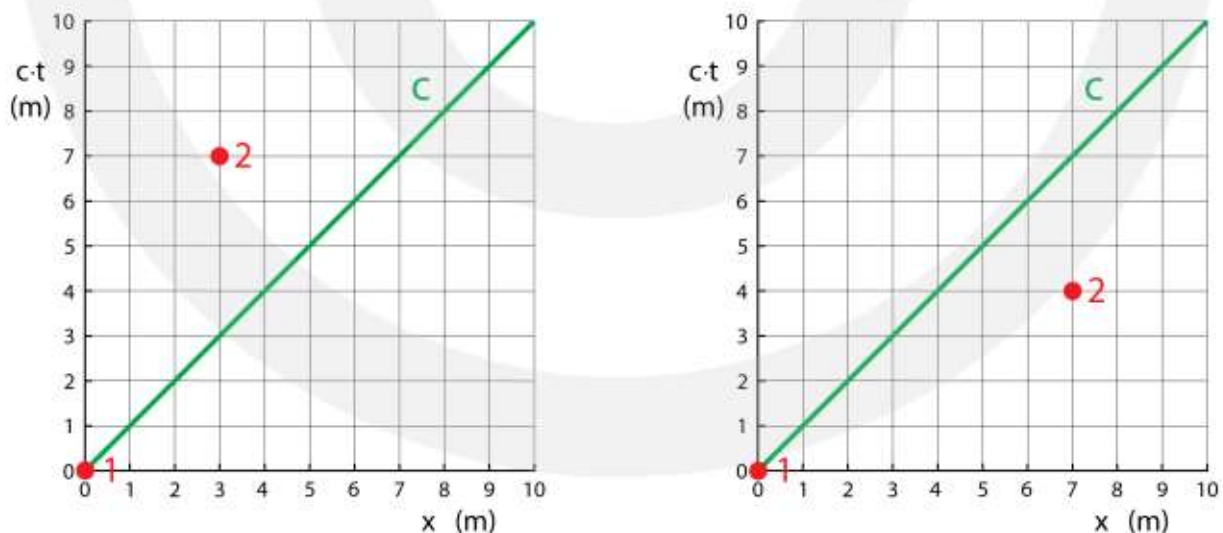
In een ruimtetijd diagram kunnen van een voorwerp aangeven waar het zich bevindt. De grafiek noemen we een **wereldlijn**. In figuur 15 links zijn de blauwe lijnen de wereldlijnen van voorwerpen die zich $t=0$ in de oorsprong bevinden en een constante snelheid hebben van $0,2 \cdot c$, $0,5 \cdot c$ en $0,8 \cdot c$. In figuur 15 rechts zie je de wereldlijn van een voorwerp dat zich op $t=0$ in de oorsprong bevindt en daarna een niet-eenparige beweging uitvoert.

Een punt in het ruimtetijddiagram geeft een voorwerp aan dat zich op een bepaald tijdstip op een bepaalde plaats bevindt. Dit noemen we een **gebeurtenis**. Een gebeurtenis is niet afhankelijk van het referentiestelsel van waaruit de gebeurtenis wordt waargenomen. Bevindt een voorwerp zich op een zeker moment op een bepaalde plaats dan is dat het geval vanuit ieder standpunt. Op hetzelfde moment kan zich op dezelfde plaats niet een ander voorwerp bevinden.



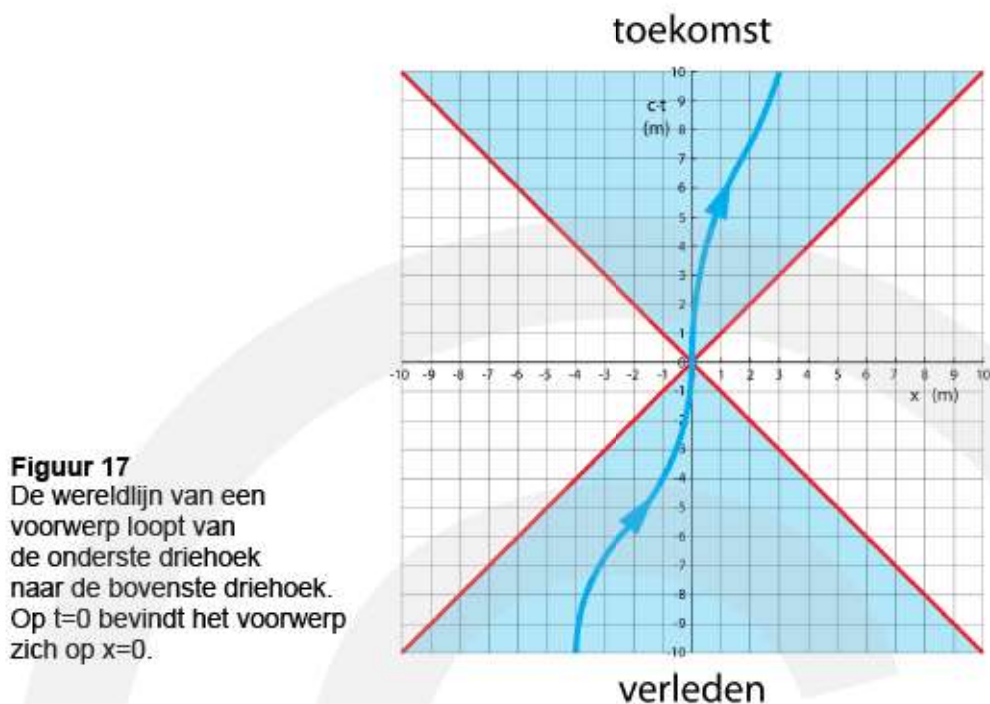
Figuur 15 Ruimtetijd diagram met wereldlijnen. Links hebben de voorwerpen een constante. Rechts zie je de wereldlijn van een voorwerp waarvan de snelheid niet constant is.

In figuur 16 zie je twee gebeurtenissen 1 en 2 aangegeven met rode stippen. Gebeurtenis 1 vindt eerder plaats dan gebeurtenis 2. In het linker diagram kunnen de gebeurtenissen op de wereldlijn van één voorwerp liggen. In het rechter diagram kunnen de gebeurtenissen onmogelijk op de wereldlijn van één voorwerp liggen, omdat de plaats in een te korte tijd te veel verandert. Om van gebeurtenis 1 naar gebeurtenis 2 te komen is in het rechter diagram een snelheid groter dan de lichtsnelheid nodig. De gebeurtenissen horen dus bij twee verschillende voorwerpen.



Figuur 16 Gebeurtenissen 1 en 2 in het linker diagram kunnen bij hetzelfde voorwerp horen. In het rechter diagram is dit niet mogelijk, want om van 1 naar 2 te gaan moet de snelheid groter dan de lichtsnelheid zijn.

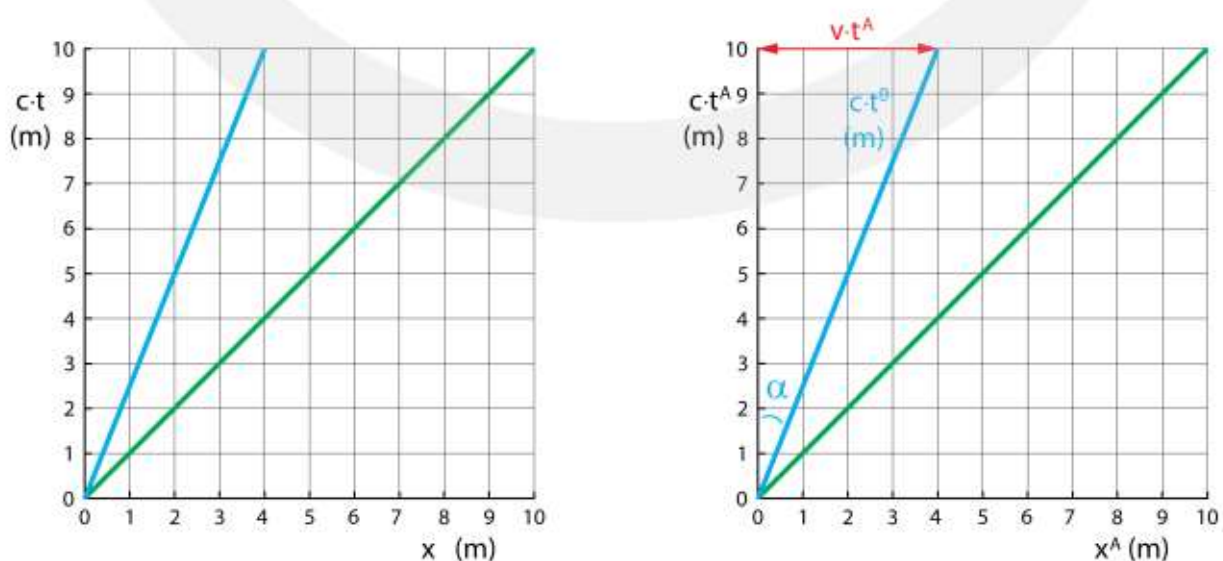
In figuur 17 zie je de wereldlijn van een voorwerp dat van het verleden naar de toekomst reist. Op $t=0$ bevindt het voorwerp zich op $x=0$. De blauwe driehoek onder de x -as geeft het gebied aan waar het voorwerp zich in het verleden kon bevinden. De blauwe driehoek boven de x -as is het gebied waarin het voorwerp zich in de toekomst kan bevinden.



Ruimtetijd diagrammen voor twee referentiestelsels

Ruimtetijd diagrammen komen goed van pas bij het begrijpen van de relativiteitstheorie. Door twee ruimtetijddiagrammen door elkaar heen te tekenen kunnen we gebeurtenissen vanuit verschillende referentiestelsels weergeven.

Zoals gebruikelijk bevindt Bea zich in een rijdende trein en staat Anna langs de kant. Stelsel B, waarin Bea zich bevindt, heeft een snelheid van $0,4c$ ten opzichte van A. In figuur 18 zie je het ruimtetijddiagram vanuit referentiestelsel A. De blauwe grafiek is de wereldlijn van Bea zoals waargenomen door Anna. In referentiestelsel B staat Bea stil. Vanuit referentiestelsel B geeft de blauwe lijn de plaats aan die niet verandert. De blauwe lijn is daarom de tijd-as van het ruimtetijd diagram van stelsel B.



Figuur 18 De blauwe lijn is de wereldlijn van Bea gezien vanuit stelsel A. Deze lijn fungeert als tijd-as van het ruimtetijd diagram van stelsel B.

Het ruimtetijd diagram met zwarte lijnen hoort bij referentiestelsel A. Door dit stelsel heen gaan we nu het ruimtetijd diagram tekenen dat hoort bij referentiestelsel B. Hiervoor gebruiken we blauwe lijnen. Gebeurtenissen zijn stippen in het ruimtetijd diagram. Op de zwarte assen kunnen we de plaats en de tijd van de gebeurtenissen aflezen gezien vanuit stelsel A. Op de blauwe assen kunnen we de plaats en de tijd van dezelfde gebeurtenissen aflezen gezien vanuit stelsel B.

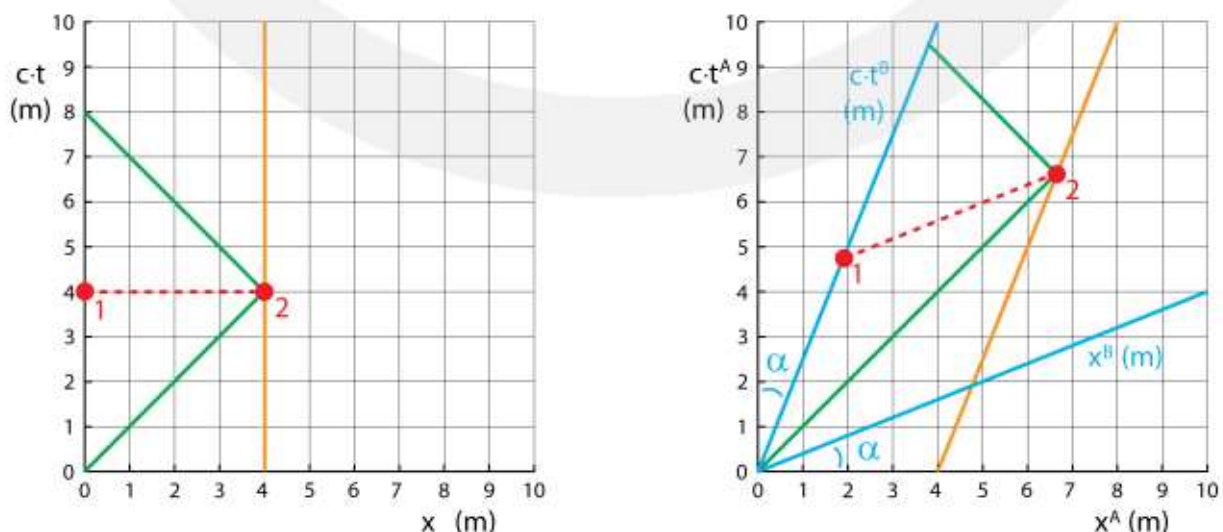
We hebben nu de tijd-as van het ruimtetijd diagram van referentiestelsel B gevonden. Een voorwerp met een wereldlijn evenwijdig aan de blauwe tijd-as van referentiestelsel B staat stil in stelsel B. In de figuur rechts is hoek α aangegeven tussen de tijd-assen in het ruimtetijd diagram van stelsel A (zwart) en het ruimtetijd diagram van stelsel B (blauw). Zoals te zien in de figuur geldt voor deze hoek:

$$\tan \alpha = \frac{v \cdot t^A}{c \cdot t^A} \rightarrow \tan \alpha = \frac{v}{c} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)$$

De ruimte-as van stelsel B kunnen we vinden door te kijken naar gebeurtenissen die in referentiestelsel B als gelijktijdig worden beschouwd. Gelijktijdige gebeurtenissen in stelsel B liggen op een lijn evenwijdig aan de ruimte-as van stelsel B.

Om te bepalen of gebeurtenissen gelijktijdig zijn doen we het volgende experiment. Plaats een spiegel op een afstand. Op $t=0$ vertrekt vanuit $x=0$ een lichtpuls naar de spiegel. De spiegel kaatst de lichtpuls terug en op t_1 is de lichtpuls terug op $x=0$. Het tijdstip waarop de lichtpuls bij de spiegel terugkaatst is gelijk aan $\frac{1}{2}t_1$. In figuur 19 links, wordt met deze methode vastgesteld dat gebeurtenissen 1 en 2 gelijktijdig zijn in referentiestelsel A. De verbindingslijn tussen 1 en 2 is daarom evenwijdig aan de ruimte-as van referentiestelsel A. Zie figuur 19, links.

Dezelfde methode gaan we toepassen in referentiestelsel B. Hierbij gebruiken we het postulaat dat de lichtsnelheid in stelsel B gelijk is aan de lichtsnelheid in stelsel A. De groene lijnen geven de wereldlijnen van een lichtpuls aan. In figuur 19 rechts, wordt vastgesteld dat gebeurtenissen 1 en 2 gelijktijdig zijn in referentiestelsel B. De verbindingslijn tussen 1 en 2 is daarom evenwijdig aan de ruimte-as van stelsel B.



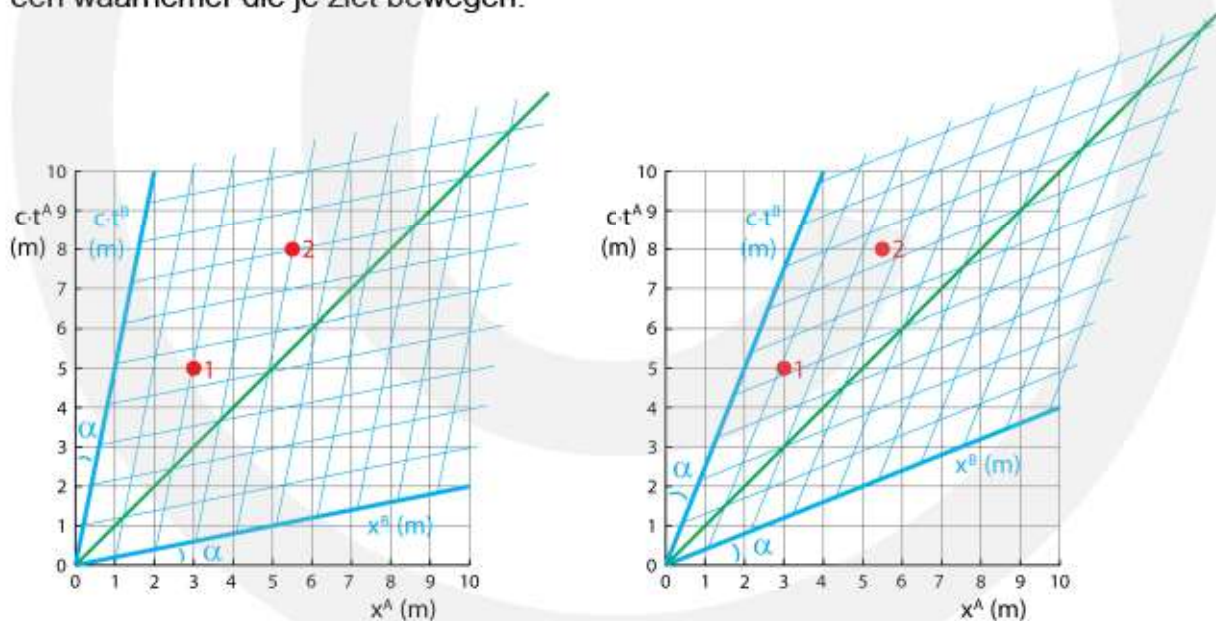
Figuur 19 Gebeurtenissen 1 en 2 in het linker diagram zijn gelijktijdig in referentiestelsel A. De gebeurtenissen 1 en 2 in het rechter diagram zijn gelijktijdig in referentiestelsel B. De verbindingslijn tussen 1 en 2 is evenwijdig met de ruimte-as.

Zoals we zien staan de ruimte- en tijd-assen van het ruimtetijd diagram van stelsel A loodrecht op elkaar. Voor stelsel B is dat niet het geval. Zowel de tijd-as als de ruimte-as maakt een hoek α met de corresponderende assen van stelsel A. In stelsel B maken de ruimte- en de tijd-as een hoek van $90 - 2\alpha$ met elkaar. De meetkunde in een assenstelsel waarbij de hoek tussen de assen niet 90 graden is heet **niet-Euclidische meetkunde**.

De snelheid van een bewegend referentiestelsel is gerelateerd aan de hoek tussen de assen van het bewegend stelsel. Hoek α tussen de tijd-assen is gelijk aan de hoek tussen de plaats-assen. Er geldt:

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}$$

In figuur 20 zie je twee referentiestelsels door elkaar heen getekend. Stelsel A (zwart) is je eigen referentiestelsel en stelsel B (blauw) is het referentiestelsel van een waarnemer die je ziet bewegen.



Figuur 20 Ruimtetijd diagrammen voor referentiestelsel A (zwart) en referentiestelsel B (blauw). De snelheid tussen A en B is links 0,2 c en rechts 0,4 c.

In figuur 20 begint een voorwerp op $t=0$ te bewegen vanuit de oorsprong ($x=0$). We gaan deze beweging beschrijven gezien vanuit Anna (zwarte stelsel) en gezien vanuit Bea, die met een snelheid van 0,2c (figuur 20, links) of 0,4c (figuur 20, rechts) ten opzichte van Anna beweegt. Op $t=0$ bevinden Anna en Bea zich in de oorsprong. Met rode stippen zijn twee gebeurtenissen 1 en 2 aangegeven. De (x, t) -coördinaten van het voorwerp voor de twee gebeurtenissen zijn:

Anna	1	→	($x=3,0$, $ct=5,0$)	2	→	($x=5,5$, $ct=8,0$)
Bea 0,2c	1	→	($x=2,0$, $ct=4,5$)	2	→	($x=4,0$, $ct=7,1$)
Bea 0,4c	1	→	($x=1,1$, $ct=4,2$)	2	→	($x=2,6$, $ct=6,4$)

In de relativiteitstheorie wordt het **ruimtetijdinterval** $(\Delta s)^2$ gedefinieerd als:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta ct)^2 - (\Delta x)^2$$

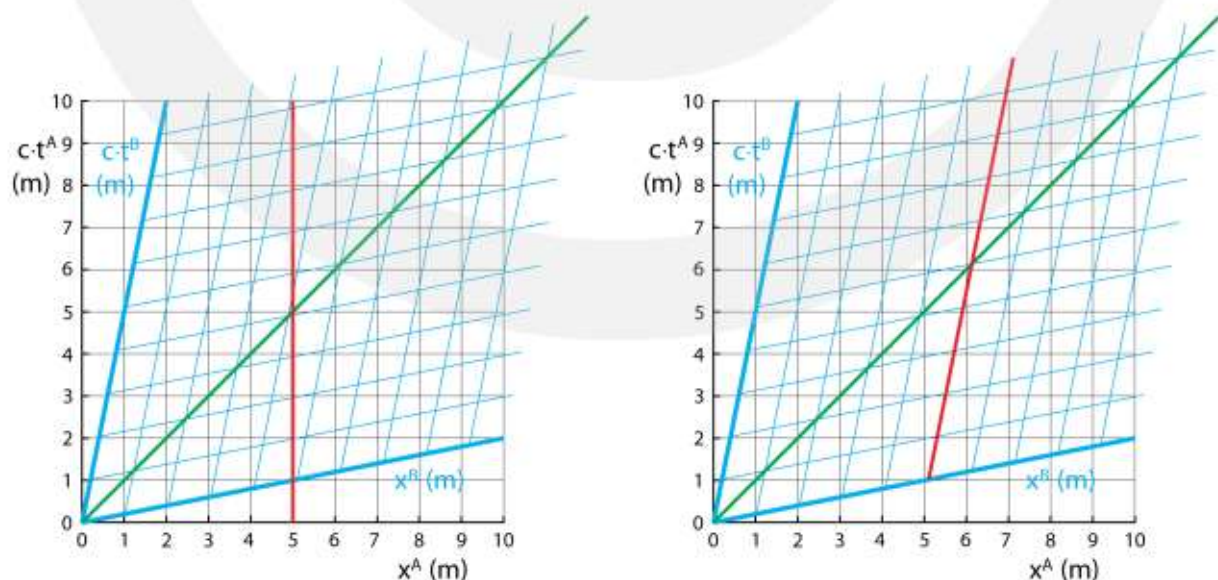
- $(\Delta s)^2$ is het ruimtetijdinterval
- $(\Delta ct)^2$ is het interval in de tijd
- $(\Delta x)^2$ is het interval in de ruimte

Als we met deze formule het ruimtetijdinterval tussen de oorsprong en de gebeurtenissen 1 en 2 uitrekenen vinden we het volgende:

Anna	1 → $s^2 = 5,0^2 - 3,0^2 = 16$	2 → $s^2 = 8,0^2 - 5,5^2 = 34$
Bea 0,2c	1 → $s^2 = 4,5^2 - 2,0^2 = 16$	2 → $s^2 = 7,1^2 - 4,0^2 = 34$
Bea 0,4c	1 → $s^2 = 4,2^2 - 1,1^2 = 16$	2 → $s^2 = 6,4^2 - 2,6^2 = 34$

Aan dit voorbeeld zie je dat het ruimtetijdinterval tussen twee gebeurtenissen berekend met $(\Delta s)^2 = (\Delta ct)^2 - (\Delta x)^2$ onafhankelijk is van het referentiestelsel. Het ruimtetijdinterval is voor iedere waarnemer hetzelfde.

Wereldlijnen in een ruimtetijddiagram zijn aaneenschakelingen van gebeurtenissen. In figuur 21 zie je links de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in het stelsel A (zwart) en rechts een voorwerp dat stilstaat in stelsel B (blauw). In beide stelsels kun je de plaats van het voorwerp op ieder tijdstip aflezen.



Figuur 21 Ruimtetijd diagrammen. Links de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in stelsel A (zwart) en rechts de wereldlijn van een voorwerp dat stilstaat in stelsel B (blauw).

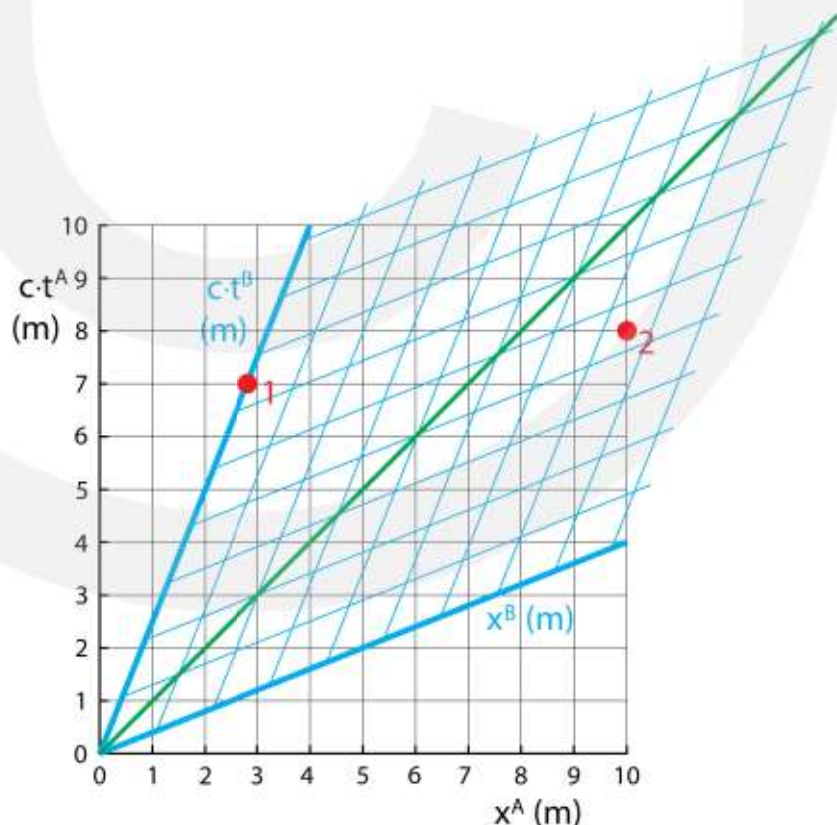
Causaliteit (oorzaak en gevolg)

De samenhang tussen oorzaak en gevolg noemt men **causaliteit**. De oorzaak vindt altijd eerder plaats dan het gevolg. Schiet een moordenaar iemand dood dan valt het slachtoffer neer **nadat** het schot is gelost. Het is denkbaar dat het slachtoffer neervalt **voordat** het schot is gelost maar dan kan de kogel uit het pistool hiervan niet de oorzaak zijn. De vraag is of in de relativiteitstheorie de volgorde van gebeurtenissen gehandhaafd blijft. We hebben immers gezien dat gebeurtenissen die in referentiestelsel B gelijktijdig zijn in stelsel A na elkaar kunnen plaatsvinden. Het is denkbaar dat in stelsel A eerst gebeurtenis 1 plaatsvindt en daarna 2 maar dat in stelsel B de volgorde is omgekeerd: eerst 2 en daarna 1.

In figuur 22 zie je een ruimtetijd-diagram met twee gebeurtenissen aangegeven met rode stippen. In referentiestelsel A (zwart) vindt gebeurtenis 1 plaats op $c \cdot t^A = 7$ en gebeurtenis 2 op $c \cdot t^A = 8$. Dus eerst 1 en daarna 2. In referentiestelsel B (blauw) vindt 1 plaats op $c \cdot t^B = 6,3$ en 2 op $c \cdot t^B = 4,4$. Dus eerst 2 en daarna 1. Het lijkt dus inderdaad zo te zijn dat de volgorde van gebeurtenissen afhankelijk is van het referentiestelsel van waaruit de waarnemingen worden gedaan. Maar voor gebeurtenissen 1 en 2 geldt iets bijzonders. Om van 1 naar 2 te reizen heb je een snelheid nodig groter dan de lichtsnelheid. Het is daarom onmogelijk dat één voorwerp betrokken is geweest bij 1 en 2. Gebeurtenissen 1 en 2 hebben daarom geen causale relatie met elkaar. Gebeurtenis 2 kan niet veroorzaakt zijn door gebeurtenis 1.

Figuur 22

In stelsel A (zwart) vindt gebeurtenis 2 plaats na gebeurtenis 1. In stelsel B (blauw) gebeurt eerst 2 en daarna 1. Om van 1 naar 2 te reizen is een snelheid groter dan c nodig. Gebeurtenissen 1 en 2 hebben daarom geen causale relatie.



De volgorde van twee gebeurtenissen die niet op de wereldlijn van een voorwerp liggen, omdat hiervoor sneller dan het licht gereisd moet worden, is afhankelijk van het referentiestelsel. De volgorde van twee gebeurtenissen die wel op de wereldlijn van een voorwerp liggen is niet afhankelijk van het gekozen referentiestelsel.

Als twee gebeurtenissen op de wereldlijn van een voorwerp liggen is de volgorde onafhankelijk van het gekozen referentiestelsel. In dat geval is een causaal verband tussen de gebeurtenissen mogelijk (maar niet noodzakelijk).

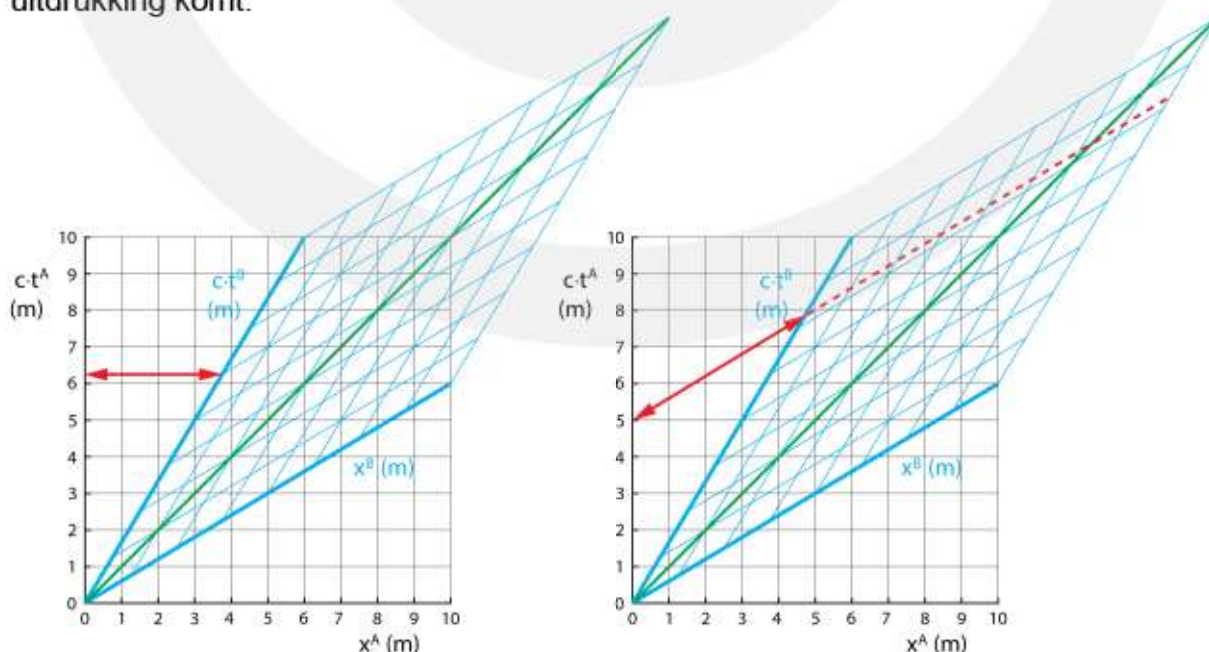
Radioactief verval

Het tempo waarin radioactieve stoffen vervallen wordt bepaald door de halveringstijd, $t_{1/2}$. In de halveringstijd vervalt de helft van de radioactieve kernen. De halveringstijd kan niet van buitenaf worden beïnvloed. Het vervallen van radioactieve kernen gaan we vanuit twee referentiestelsel bekijken. We nemen een stof met een halveringstijd van 5 seconden.

Eerst neemt Bea de radioactieve kernen mee in een trein die met een snelheid van $0,6c$ langs Anna rijdt. Voor de referentiestelsels A en B geldt

$$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{in dit geval:} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} = 1,25$$

Bea en de radioactieve kernen bevinden zich in referentiestelsel B, zodat Bea een halveringstijd van 5 seconden waarneemt. Vanuit Anna gezien heeft Bea een snelheid van $0,6c$ zodat de halveringstijd volgens Anna $5 \cdot 1,25 = 6,25$ seconden is. Anna verwacht dat het aantal kernen na 5 seconden is gehalveerd maar constateert dat in de rijdende trein de helft van de kernen pas na $6,25$ seconden is vervallen. Anna concludeert daarom dat de tijd in de rijdende trein langzamer verloopt dan haar eigen tijd. In figuur 23 links zie je hoe Anna's redenering in een ruimtetijd diagram tot uitdrukking komt.



Figuur 23 Radioactief verval.

Links: de kernen bevinden zich in referentiestelsel B → in B is de halveringstijd 5 s en in A 6,25 s.

Rechts: de kernen bevinden zich in referentiestelsel A → in A is de halveringstijd 5 s en in B 6,25 s.

Vervolgens neemt Anna de radioactieve kernen van Bea over. De radioactieve kernen bevinden zich nu samen met Anna in referentiestelsel A, zodat Anna een halveringstijd van 5 seconden waarneemt. Vanuit Bea gezien heeft Anna een snelheid van $0,6c$ zodat de halveringstijd volgens Bea $5 \cdot 1,25 = 6,0$ seconden is. Bea verwacht dat het aantal kernen na 5 seconden is gehalveerd maar constateert dat in het bewegende preparaat de helft van de kernen pas na 6,25 seconden is vervallen. Bea concludeert daarom dat de tijd bij Anna langs het spoor langzamer verloopt dan haar eigen tijd. In figuur 23 rechts zie je hoe Bea's redenering in een ruimtetijd diagram tot uitdrukking komt.

– muonen –

Een demonstratie van tijdrek en lengtekrimp wordt gegeven door de muonen die in de dampkring ontstaan en het aardoppervlak bereiken. Muonen zijn elementaire deeltjes met dezelfde eigenschappen als elektronen maar met een grotere massa. De halveringstijd van muonen is $2,0 \cdot 10^{-6}$ s. Vanwege deze korte halveringstijd komen muonen op aarde niet voor. Door kosmische straling ontstaan er hoog in de atmosfeer muonen die het aardoppervlak bereiken. Gezien de korte levensduur is dit opmerkelijk. Stel dat er muonen worden gecreëerd die met een snelheid van $0,9995c$ naar de aarde reizen. De afstand die een muon in $2,0 \cdot 10^{-6}$ seconden aflegt volgt uit:
 $s = v_{\text{gem}} \cdot t = (0,9995 \cdot 3,0 \cdot 10^8) \cdot 2,0 \cdot 10^{-6} = 600 \text{ m}.$

De muonen ontstaan op een veel grotere hoogte dan 600 meter en dus verwachten we dat vrijwel geen enkel muon het aardoppervlak zal bereiken. Maar dit klopt niet, muonen bereiken het aardoppervlak wel. Dit volgt uit de relativiteitstheorie. De muonen hebben namelijk een zeer hoge snelheid van $0,9995c$ zodat

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,9995c)^2}{c^2}}} = 31,6$$

De bewegende muonen hebben gezien vanaf de aarde een levensduur van $2,0 \cdot 10^{-6} \cdot 31,6$ s. Omdat voor de muonen de tijd 31,6 keer trager is dan de tijd op aarde kunnen ze ook 31,6 keer verder reizen. Ze kunnen dus een afstand $s = v_{\text{gem}} \cdot t = (0,9995 \cdot 3,0 \cdot 10^8) \cdot 2,0 \cdot 10^{-6} \cdot 31,6 = 1,9 \cdot 10^4 \text{ m} = 19 \text{ km}$ afleggen en daardoor het oppervlak van de aarde bereiken.

We kunnen de situatie ook bekijken vanuit het referentiestelsel van de muonen. In hun referentiestelsel hebben de muonen een levensduur van $2,0 \cdot 10^{-6}$ s en leggen ze in deze tijd de afstand tot het aardoppervlak af. Voor de muonen beweegt de aarde naar hen toe en is er daarom sprake van lengtekrimp.

$$L_b = \frac{L_e}{\gamma} \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,9995c)^2}{c^2}}} = 31,6$$

Als een muon op een hoogte van 19 km wordt gecreëerd geldt voor dit muon:

$$L_b = \frac{L_e}{31,6} \rightarrow L_b = \frac{19000}{31,6} = 600 \text{ m}.$$

Voor het muon is de afstand tot het aardoppervlak 600 meter die hij kan afleggen in $2,0 \cdot 10^{-6}$ s.

De tweelingparadox

De tweelingparadox gaat over een tweeling waarvan er één met een raket op reis gaat en de ander thuisblijft. Als de reiziger thuiskomt is ze jonger dan de thuisblijver. Voor de thuisblijver heeft de reis bijvoorbeeld 10 jaar geduurd en voor de reiziger maar 8 jaar. Hoe kan dit?

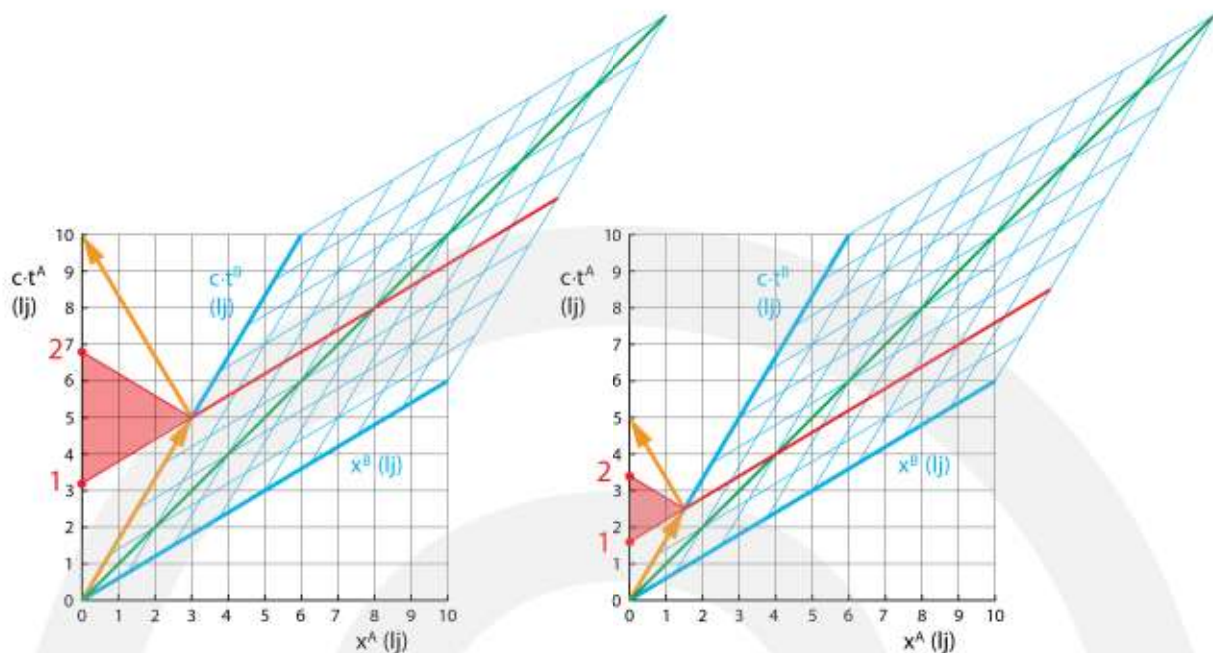


Figuur 24 Tweelingparadox. Als Bea op reis gaat is ze even oud als Anna. Bij thuiskomst is Bea jonger dan Anna. Voor Bea gaat de tijd minder snel dan voor Anna.

De tweeling Anna en Bea willen de paradox meemaken. Op de heenreis neemt de afstand tussen Anna en Bea toe. Beweging is relatief zodat Anna denkt dat zij thuisblijft en dat Bea op reis gaat. Bea denkt het omgekeerde, volgens haar blijft zij thuis en gaat Anna op reis. Wie van hen zal jonger zijn als ze elkaar weer ontmoeten? Het antwoord op deze vraag kan ondubbelzinnig worden gegeven. Bij de reiziger keert de beweging om en dat gebeurt niet bij de thuisblijver. De gebeurtenissen van Anna en Bea zijn dus niet identiek, want bij het omkeren zal de raket vertragen en versnellen en werkt er dus een resulterende kracht. Een referentiestelsel dat vertraagt en versnelt is geen **inertiaal referentiestelsel**. De reiziger bij wie de beweging omkeert zal bij de ontmoeting jonger zijn.

De tweelingparadox kan worden weergegeven in een ruimtetijd diagram. In figuur 25 zie je het resultaat. De afstand op de assen zijn nu geen meters maar lichtjaren. In figuur 25 reist Bea met een snelheid van $0,6c$. In het linker diagram duurt de reis volgens Anna 10 jaar en volgens Bea 8 jaar (4 jaar heen en 4 jaar terug). In het rechter diagram duurt de reis volgens Anna 5 jaar en volgens Bea 4 jaar (2 jaar heen en 2 jaar terug).

Bij het omkeren gebeurt er iets opmerkelijks. Voor Bea is het in aangegeven tijdstip 1 op de tijd-as van Anna gelijktijdig met het moment van omkeren. Als Bea omkeert klapt haar referentiestelsel (blauw) om. Het stelsel moet nu naar links worden getekend, maar omwille van de duidelijkheid is dit in figuur 25 niet gedaan. In het omgeklapte stelsel is tijdstip 2 op de tijd-as van Anna gelijktijdig met het moment van omkeren. We zien dus dat tijdstip 1 en tijdstip 2, die voor Anna jaren uit elkaar liggen, voor Bea dicht bij elkaar liggen. Tijdstip 1 is voor Bea vlak vóór het omkeren en tijdstip 2 vlak ná het omkeren. Het omkeren kost voor Bea weinig tijd, maar in die voor Bea korte tijd wordt Anna jaren ouder. Het lijkt wel of de tijd die voor Anna verstrijkt tussen 1 en 2 door Bea wordt overgeslagen. Dit alles is moeilijk te begrijpen en onmogelijk om je voor te stellen.



Figuur 25 Tweelingparadox.

Links: in referentiestelsel A duurt de reis 10 jaar; in referentiestelsel B 8 jaar.

Rechts: in referentiestelsel A duurt de reis 5 jaar; in referentiestelsel B 4 jaar.

Het omkeren van Bea is cruciaal voor het begrip van de tweelingparadox. Tijdens het omkeren werkt er een resulterende kracht op Bea, terwijl er nooit een resulterende kracht op Anna werkt. Hoewel de aanwezigheid van een resulterende kracht het verschil maakt tussen Anna en Bea is dit niet de directe oorzaak van Bea's tijdsrek. In figuur 25 zie je dat de tijdsprong bij een reis die volgens Anna 10 jaar duurt groter is dan de tijdsprong bij een reis die volgens Anna 5 jaar duurt. Bij een reis die volgens Anna 10 jaar duurt is Bea bij thuiskomst 2 jaar jonger. Bij een reis die volgens Anna 5 jaar duurt is Bea bij thuiskomst 1 jaar jonger. Maar voor de resulterende kracht maakt de reisduur geen verschil. Omkeren na 10 jaar kost evenveel kracht als omkeren na 5 jaar. Als de resulterende kracht de oorzaak is van het tijdverschil dan zou het niet uit moeten maken hoe lang de reis duurt. Maar zoals we zien is het tijdverschil recht evenredig met de duur van de reis.

Om de tweelingparadox te bewijzen zijn er experimenten uitgevoerd met atoomklokken aan boord van vliegtuigen en satellieten. En het berekende verschil in leeftijd tussen de thuisblijver en de reiziger klopt precies met de experimentele waarde. Hieruit blijkt opnieuw dat de natuur anders in elkaar zit dan op het eerste gezicht lijkt. Wij zijn in ons dagelijks leven niet gewend aan snelheden in de buurt van de lichtsnelheid en vandaar dat we een wereldbeeld hebben waarin klokken voor iedereen gelijklopen en afstanden voor iedereen gelijk zijn. Maar als je nauwkeurige metingen doet klopt dit wereldbeeld niet met de praktijk.

15.4 Massa en energie

Massa en snelheid

Uit de relativiteitstheorie volgt dat de lichtsnelheid de maximale snelheid is die een voorwerp kan krijgen. Hierbij dringt zich de vraag op hoe dit te rijmen valt met de wet van behoud van energie. We kunnen ons immers voorstellen dat er voortdurend een kracht wordt uitgeoefend die arbeid levert, waardoor de kinetische energie van het voorwerp almaar groter wordt. Met $E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2$ verwacht je dat er een moment komt waarop v groter wordt dan de lichtsnelheid. Toch gebeurt dit niet en dat komt omdat in de relativiteitstheorie de massa afhankelijk is van de snelheid. Stel we nemen een voorwerp dat stilstaat in referentiestelsel A. In dit stelsel heeft het voorwerp massa m_e . Eenzelfde voorwerp bevindt zich in referentiestelsel B dat een snelheid heeft van v ten opzichte van A. Voor de massa van het voorwerp in B schrijven we m_b . Tussen m_e en m_b geldt:

$$m_b = \gamma \cdot m_e \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- m_b is de massa in het bewegend referentiestelsel (kg)
- m_e is de massa in het eigen referentiestelsel (kg)
- v is de snelheid tussen de referentiestelsels A en B (m/s)
- c is de lichtsnelheid (m/s)

In deze formule zie je dat als de snelheid groter wordt ook de massa toeneemt. Dit effect wordt pas duidelijk als de snelheid in de buurt komt van de lichtsnelheid.

Als $v = 0,8c$ vinden we: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{0,6} = 1,67 \rightarrow m_b = 1,67 \cdot m_e$

Als $v = 0,995c$ vinden we: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,995c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{0,1} = 10 \rightarrow m_b = 10 \cdot m_e$

We zien nu wat er gebeurt als er voortdurend arbeid op een voorwerp wordt verricht. Bij een snelheid veel kleiner dan de lichtsnelheid wordt de arbeid omgezet in een toename van de snelheid. Maar bij een snelheid ongeveer gelijk aan de lichtsnelheid wordt de arbeid omgezet in een toename van de massa.

Het feit dat de massa toeneemt met de snelheid is erg vreemd. In de natuurkunde heeft de massa van een voorwerp twee betekenissen die op het eerste gezicht niets met elkaar te maken lijken te hebben. In de eerste betekenis geeft de massa aan hoeveel kracht het kost om het voorwerp een versnelling te geven. De massa die hieruit volgt noemen we de **trage massa**. De tweede betekenis van massa komt uit de gravitatiewet van Newton, die aangeeft dat massa's elkaar aantrekken. De massa die hieruit volgt noemen we de **zware massa**.

Einsteins conclusie dat massa afhankelijk is van de snelheid legt bijzondere relaties bloot tussen **massa en energie** en tussen **ruimte en zwaartekracht**. De relatie tussen massa en energie komt hieronder aan bod. De relatie tussen ruimte en zwaartekracht is het onderwerp van de algemene relativiteitstheorie, die in de volgende paragraaf wordt behandeld.

Massa en energie

Om de relatie tussen massa en energie te onderzoeken gaan we de breuk

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ benaderen met een reeks. Er geldt: } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

Voor x kleiner dan 1, bijvoorbeeld $1/10$, vinden we: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{10}}} = 1 + \frac{1}{20} + \frac{3}{800} + \frac{5}{16000} + \dots$

Je ziet dat alleen de eerste termen belangrijk zijn, termen verderop in de reeks dragen nauwelijks bij aan het resultaat.

- we schrijven: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \dots$
- m_e is de massa in rust; m_b is de massa die beweegt met snelheid v
- er geldt: $m_b = \gamma \cdot m_e \rightarrow m_b = m_e \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
- $m_b = m_e \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$
- vermenigvuldig links en rechts met c^2
- $m_b \cdot c^2 = m_e \cdot \left(c^2 + \frac{1}{2}v^2 + \dots\right)$
- $m_b \cdot c^2 = m_e \cdot c^2 + \frac{1}{2}m_e \cdot v^2 + \dots$

De term $\frac{1}{2}m_e \cdot v^2$ herkennen we als de kinetische energie van het voorwerp. De term die hiervoor staat $m_e \cdot c^2$ moet dus ook de eenheid energie hebben. Wat opvalt is dat deze term onafhankelijk is van de snelheid. Een voorwerp met rustmassa m_e bevat een hoeveelheid energie gelijk aan: $E = m_e \cdot c^2$. Dit geeft ons de beroemde formule van Einstein. Vaak wordt m_e aangegeven als m_0 , en dan vind je:

$$\text{Rustenergie: } E_{\text{rust}} = m_0 \cdot c^2$$

- E_{rust} is de energie in joule (J)
- m_0 is de rustmassa (kg) (m_0 is hetzelfde als m_e)
- c is de lichtsnelheid (m/s)

Een voorwerp met een rustmassa m_0 en een snelheid v bevat behalve de rustenergie ook kinetische energie. Dit noem je de totale energie. Schrijf je de uitdrukking voor de totale energie op als reeks, dan vind je als eerste term de energie van de rust-massa en als tweede term de klassieke kinetische energie $E_K = \frac{1}{2}m_0 \cdot v^2$. Daarna komen de hogere orde termen, die belangrijk zijn als v in de buurt komt van de lichtsnelheid.

In de relativiteitstheorie is de kinetische energie niet alleen de tweede (klassieke) term, maar de som van de 2^e, 3^e, 4^e, etc. termen in de formule voor de energie

$$E_{\text{totaal}} = m_b \cdot c^2 = m_e \cdot c^2 + \frac{1}{2}m_e \cdot v^2 + \dots$$

$$E_K = m_b \cdot c^2 - m_e \cdot c^2 = \frac{1}{2}m_e \cdot v^2 + \dots$$

De volgende formule geeft de totale energie van een bewegend voorwerp.

Totale energie: $E_{\text{totaal}} = m_b \cdot c^2 \rightarrow E_{\text{totaal}} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$

De formule voor de totale energie geeft aan dat hoe groot de energie ook is de snelheid blijft altijd kleiner dan c . Dit komt vanwege de gammafactor. Nadert v naar c dan wordt de gammafactor oneindig groot. Dit houdt in dat er oneindig veel energie nodig is om de lichtsnelheid te bereiken.

De kinetische energie van een bewegend voorwerp is het verschil tussen de totale energie en de rustenergie $E_K = E_{\text{totaal}} - E_{\text{rust}}$.

De kinetische energie is de totale energie min de rust energie.

$$E_K = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$

15.5 Algemene relativiteitstheorie

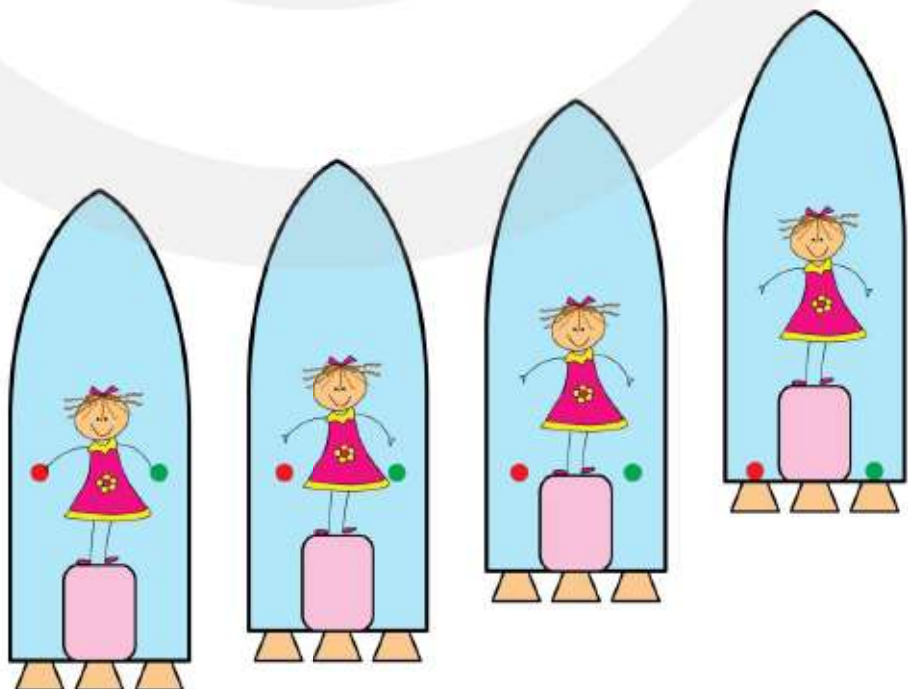
Equivalentie principe

Tot nu toe hebben we ons gericht op gebeurtenissen in **inertiaal referentiestelsels**. Dit zijn stelsels die met een constante snelheid in een rechte lijn bewegen. Met de **speciale relativiteitstheorie** kun je de gebeurtenissen in deze stelsels beschrijven. Nadat Einstein de speciale relativiteitstheorie in 1905 publiceert vraagt hij zich af hoe het zit met referentiestelsels die versnellen of vertragen. Hij wil een relativiteitstheorie bedenken die gebruikt kan worden in **alle referentiestelsels**. In 1907 krijgt hij het centrale idee dat hij nodig heeft om zo'n theorie te ontwikkelen. Dit idee beschouwt Einstein als het beste idee dat hij ooit heeft gekregen. En zoals de meeste goede ideeën is het vrij eenvoudig te begrijpen.

Stel Bea bevindt zich in een raket ver weg van alle hemellichamen. In de raket is geen zwaartekracht. Samen met alle losse spullen zweeft Bea door de raket. Maar dit verandert als de raket gaat versnellen, bijvoorbeeld met $9,81 \text{ m/s}^2$. Omdat de raket versnelt wordt Bea tegen de vloer gedrukt. Gaat ze op een weegschaal staan dan kan ze haar gewicht meten. In de raket gaat Bea natuurkundige experimenten uitvoeren. Terwijl de raket versnelt laat ze twee ballen vallen, de ene met veel meer massa dan de andere. Bea is verbaasd dat de ballen precies tegelijk op de vloer komen. Je zou toch verwachten dat de zware bal eerder aankomt dan de lichte.

Anna bevindt zich buiten de raket. Volgens haar vallen de ballen helemaal niet naar beneden maar blijven ze stil hangen in de ruimte. Omdat de raket versnelt komt de vloer steeds dichterbij totdat de ballen precies tegelijkertijd met de vloer in aanraking komen. Anna verbaast zich helemaal niet dat de ballen tegelijk op de vloer komen, het is immers de versnellende raket die hiervoor zorgt. In figuur 26 zie je hoe het gaat.

Figuur 26
Bea in raket ziet dat de ballen tegelijk op de grond vallen. Buiten de raket ziet Anna dat de ballen stil hangen en dat de raket versnelt.



Stel dat de raket niet in de ruimte aan het versnellen is maar stilstaat op het oppervlak van een planeet zoals de aarde. Alle experimenten die Bea in de versnellende raket heeft gedaan kan ze herhalen en steeds zal er hetzelfde uitkomen. Zolang ze niet naar buiten kijkt zal Bea er nooit achter komen of ze op aarde staat of ergens in de lege ruimte aan het versnellen is.

Einstein redeneert dat je geen onderscheid kunt maken tussen een referentiestelsel dat versnelt en een referentiestelsel waarin zwaartekracht werkt. Dit noem je het **equivalentie principe**.

Equivalentie principe:

Je kunt geen onderscheid maken tussen een referentiestelsel dat versnelt en een referentiestelsel waarin zwaartekracht werkt.

In de vorige paragraaf hebben we kennis gemaakt met de trage massa en de zware massa. De **trage massa** geeft aan hoeveel kracht het kost om het voorwerp een bepaalde versnelling te geven. Trage massa is de verhouding tussen de resulterende kracht en de versnelling. De **zware massa** komt uit de gravitatiewet van Newton. Deze wet geeft aan dat massa's elkaar aantrekken en dat deze kracht groter wordt als de massa toeneemt.

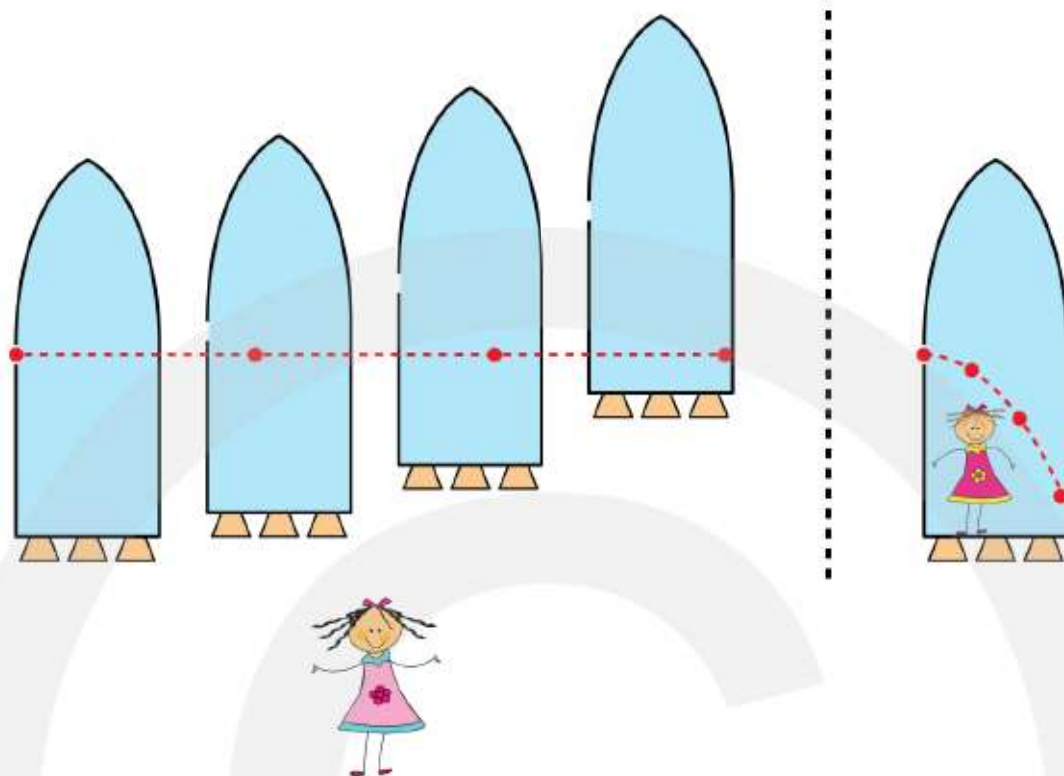
Trage massa: $\Sigma F = m \cdot a \rightarrow m = \frac{\Sigma F}{a}$

Zware massa: $F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Wat Einstein met zijn equivalentie principe beweert is dat de trage massa en de zware massa niet toevallig aan elkaar gelijk zijn, maar per definitie. Je kunt geen onderscheid maken tussen versnellen en de werking van zwaartekracht. Wat de ene waarnemer zwaartekracht noemt (Bea in de raket) noemt de andere waarnemer versnellen (Anna buiten de raket).

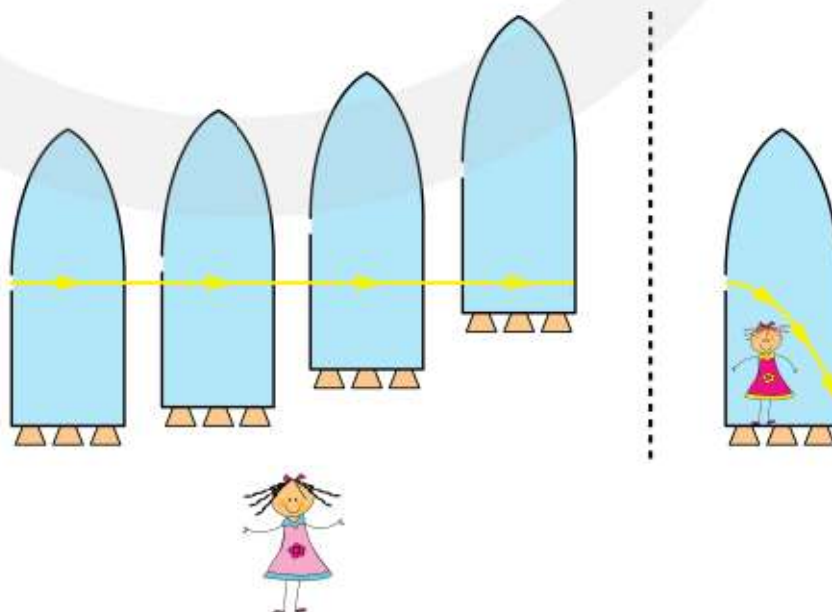
Afbuigen van licht

Met dit idee redeneert Einstein verder. Stel Bea bevindt zich in een versnellende raket ver weg van alle hemellichamen. Door een gaatje in de wand gooit Anna, die zich buiten de raket bevindt, een bal, zie figuur 27. Anna ziet dat de bal met een constante snelheid in een rechte lijn beweegt en dat de raket naar boven toe versnelt. Bea ziet dat de bal met een parabolische baan naar beneden valt. Voor Bea, die denkt dat ze zich in een zwaartekrachtveld bevindt, is dit niet bijzonder. Alle horizontaal gegooide ballen vallen immers met een parabolische baan naar beneden. Voor Anna is het ook niet bijzonder, een bal waarop geen kracht werkt blijft met een constante snelheid in een rechte lijn bewegen.



Figuur 27 Links de gebeurtenis volgens Anna. De bal blijft met constante snelheid in een rechte lijn bewegen. Rechts de gebeurtenis volgens Bea. De bal valt met een parabolische baan naar beneden.

In een volgende experiment schijnt Anna met een zaklantaarn door een raampje van de raket. Net als bij de bal ziet Anna dat het licht met een constant snelheid in een rechte lijn beweegt. Bea ziet dat de lichtstraal met een parabolische baan naar beneden afbuigt. Voor Bea is dit uitzonderlijk, want volgens Newton werkt de zwaartekracht alleen op massa's en licht heeft geen massa. Met de gravitatiewet van Newton is niet te begrijpen dat licht afbuigt.



Figuur 28
Een lichtstraal gedraagt zich net zoals alle andere voorwerpen. Volgens Anna volgt het licht een rechte lijn. Volgens Bea buigt het licht af vanwege de zwaartekracht.

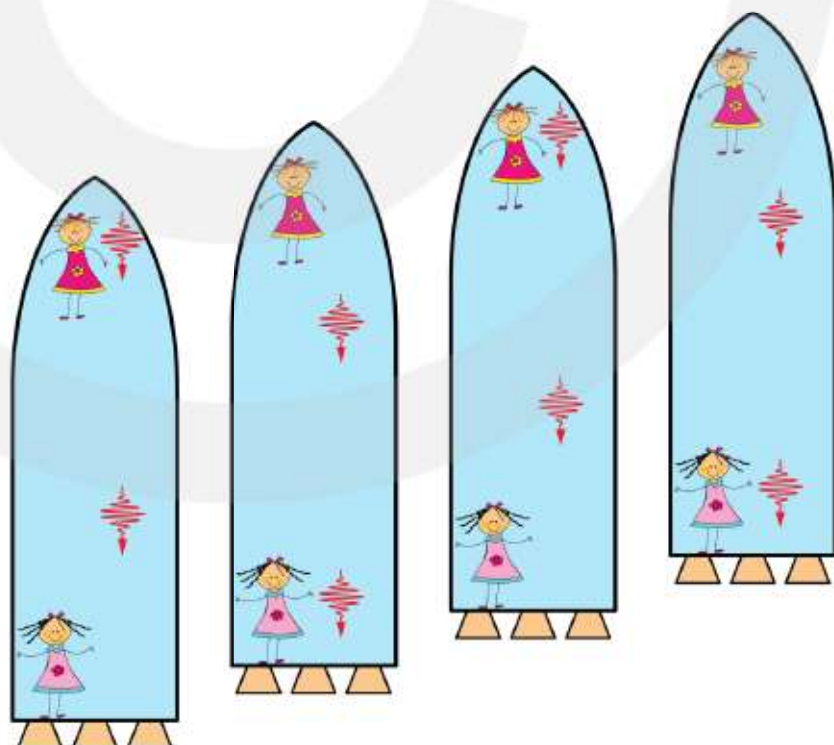
Einstein weet intussen beter. Het afbuigen van licht door de zwaartekracht is het gevolg van de formule $E = m \cdot c^2$, waarin de energie van het licht en kleine hoeveelheid massa vertegenwoordigt. Zwaartekracht werkt dus niet alleen op massa maar ook op energie. Later verfijnt Einstein zijn verklaring van het afbuigen van licht en ontwikkelt hij de algemene relativiteitstheorie, waarin hij stelt dat niet het licht afbuigt maar dat de ruimte krom is. Het kost hem zeven jaar om de wiskunde die hiervoor nodig is te begrijpen.

Tijdrek door de zwaartekracht

We laten Anna en Bea nog een experiment uitvoeren. Dit keer gaan ze samen op reis in een raket. Ze bevinden zich dus steeds in het hetzelfde referentiestelsel en je zou verwachten dat alle natuurkundige experimenten voor hen op dezelfde manier verlopen. Toch is dit niet zo.

Speciaal voor dit experiment wordt een extra lange raket gebouwd waarin het licht één seconde nodig heeft om van boven naar beneden te gaan. Anna en Bea nemen beide een nauwkeurige klok mee. Vooraf controleren ze dat hun klokken gelijk lopen. Ze stappen in de raket die met een constante snelheid beweegt in de lege ruimte waar geen zwaartekracht is. Ze doen het volgende experiment. Bea gaat bovenin de raket zitten en Anna onderin. Iedere seconde zendt Bea een lichtpuls uit die één seconde later door Anna wordt opgevangen. Bea zendt de lichtpulsen één seconde na elkaar uit en Anna ontvangt deze lichtpulsen met een tussentijd van precies één seconde. Zie figuur 29.

Figuur 29
Bea (boven) zendt lichtpulsen naar Anna (onder). Als de raket niet versnelt is de tijd tussen twee pulsen voor Anna en Bea gelijk.

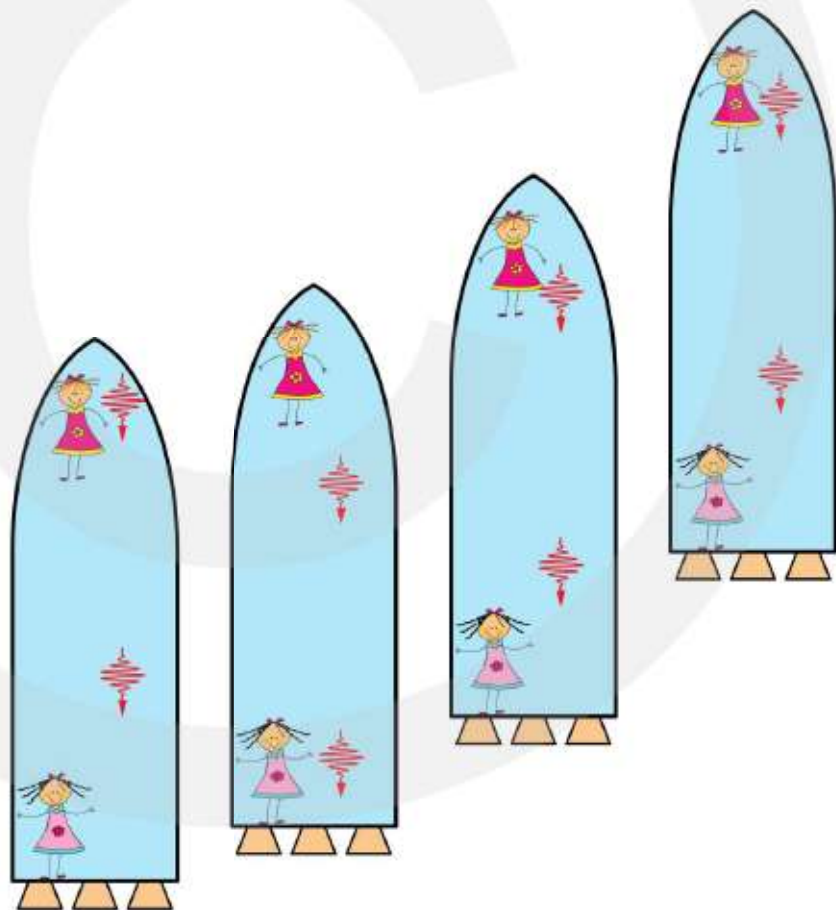


De snelheid van de raket is tijdens het experiment een stuk kleiner dan de lichtsnelheid, zodat effecten van de speciale relativiteitstheorie niet zijn te verwachten. Omdat de raket naar boven beweegt hoeft de eerste lichtpuls minder afstand af te

leggen en komt het dus eerder dan na één seconde aan bij Anna. Heeft de raket een constante snelheid dan komt de tweede lichtpuls evenveel eerder aan als de eerste lichtpuls. De tijd tussen puls 1 en 2 is hierdoor voor Anna en voor Bea precies één seconde.

Maar als de raket versnelt wordt het anders. Zie figuur 30. Als de tweede lichtpuls door Bea wordt uitgezonden heeft de raket een grotere snelheid dan toen de eerste puls werd uitgezonden. De tweede lichtpuls hoeft daarom minder afstand af te leggen dan de eerste puls en komt dus eerder aan. Anna meet daardoor minder dan één seconde tussentijd tussen puls 1 en puls 2 terwijl voor Bea de tussentijd tussen beide pulsen wel één seconde is. Hetzelfde geldt voor de tijd tussen pulsen 2 en 3, etc. Voor Bea is dit tijdverschil steeds één seconde en voor Anna steeds minder dan één seconde. De klok van Anna loopt daarom langzamer dan die van Bea. Als er voor Bea één minuut is verstreken heeft ze 60 pulsen uitgezonden. Maar als Anna de 60^e puls ontvangt is er op haar klok nog geen minuut verstreken.

Figuur 30
Bea (boven) zendt lichtpulsen naar Anna (onder). Als de raket versnelt is de tijd tussen twee pulsen voor Anna korter dan voor Bea.

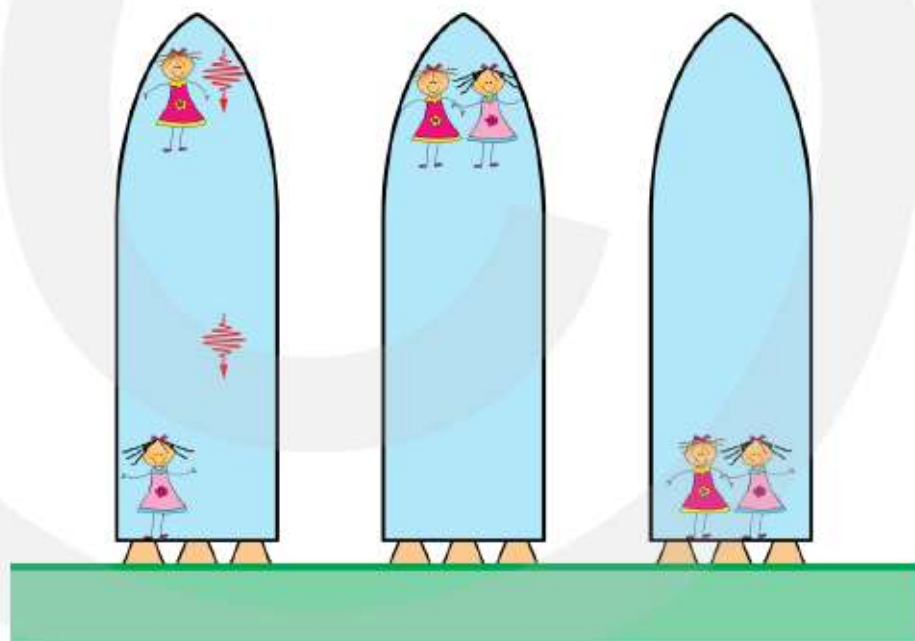


Hoe zou dit experiment verlopen als het op aarde, onder invloed van de zwaartekracht zou worden uitgevoerd? Volgens Newton heeft de zwaartekracht geen invloed op deze situatie. Als Bea lichtpulsen uitzendt met een tussentijd van één seconde dan verwacht je dat Anna deze lichtpulsen opvangt met een tussentijd van één seconde. Maar het equivalentie-principe van Einstein doet een andere voorspelling. Het equivalentie principe zegt dat er geen verschil is tussen de werking van zwaartekracht en de werking van versnelling.

Voor het experiment in de versnellende raket is de uitkomst van dit experiment niet bijzonder. Maar het equivalentieprincipe zegt dat het experiment dezelfde uitkomst geeft als de raket niet versnelt maar stilstaat op een plaats waar zwaartekracht is, bijvoorbeeld op het oppervlak van de aarde. Stel dus dat Anna en Bea op aarde in de raket zitten die nog niet is gelanceerd. Bovenin verstuurt Bea lichtpulsen met tussentijden van één seconde op haar klok. Onderin de raket ontvangt Anna deze lichtpulsen met tussentijden van minder dan één seconde op haar klok. Omdat lichtpulsen onderweg niet kunnen ontstaan of kunnen verdwijnen moet Anna concluderen dat haar klok langzamer loopt dan de klok van Bea.

Anna kan het niet geloven en denkt dat de zwaartekracht haar klok kapot heeft gemaakt. Ze klimt naar boven om de klokken te vergelijken en ze blijken precies gelijk te lopen. Bovenin de raket meet Anna dat de lichtpulsen van Bea een tussentijd hebben van één seconde. Onderin de raket meet ze een tussentijd van minder dan één seconde. Het enige dat ze hoeft te doen om haar tijd langzamer te laten lopen is naar beneden af te dalen. Hetzelfde geldt voor Bea. Bovenin loopt haar klok sneller dan die van Anna, daalt ze naar beneden af dan loopt haar klok gelijk met die van Anna. De sterkte van het zwaartekrachtveld bepaalt hoe snel de klok loopt.

Figuur 31
Als Bea boven is en Anna onder dan loopt Anna's klok langzamer dan die van Bea. Zijn ze op dezelfde hoogte dan lopen de klokken gelijk.



Door de trage massa en de zware massa aan elkaar gelijk te stellen is Einstein op het equivalentie-principe gekomen. Door dit inzicht zijn we twee nieuwe eigenschappen van massa op het spoor gekomen:

Massa zorgt ervoor dat licht afbuigt.

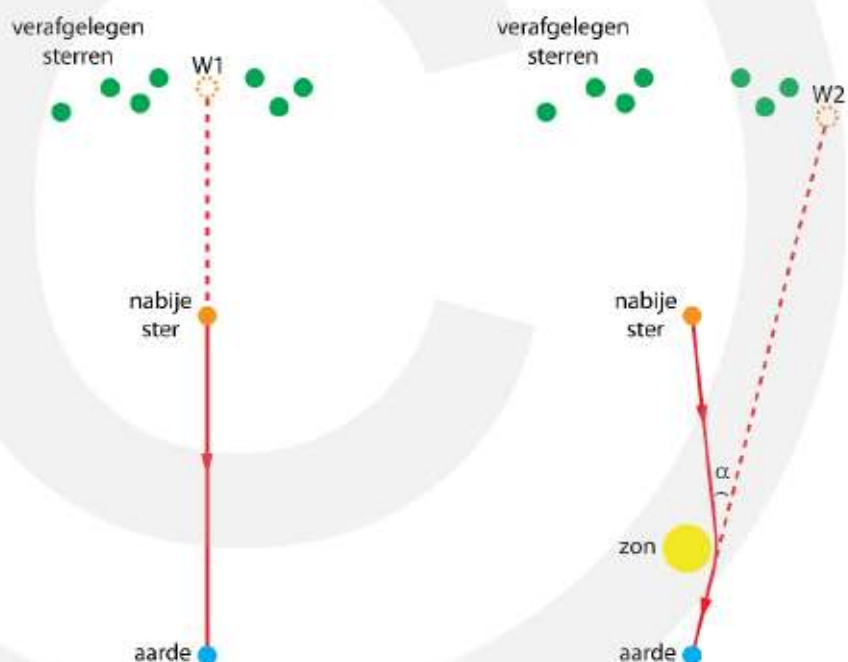
Massa zorgt ervoor dat de tijd langzamer loopt.

15.6 Gekromde ruimte

Buiging van licht

Einsteins voorspelling dat licht afbuigt om een grote massa, zoals een ster, is voor het eerst bevestigd tijdens de totale zonsverduistering op 29 mei 1919 door Arthur Eddington (Engeland, 1882 – 1944). Bij het experiment wordt de positie van een nabije ster 's nachts gemeten ten opzichte van sterren op grote afstand. De zon is dan aan de andere kant van de aarde en heeft geen invloed op de meting. In figuur 31 zien we vanaf de aarde dat een nabije ster (oranje) tussen groepjes van verafgelegen sterren (groen) staat. Zie figuur 32, links. Daarna wacht je tot de zon opkomt op de dag van de totale zonsverduistering, waarop de maan het licht van de zon tegenhoudt. Opnieuw meet je de positie van de nabije ster, maar omdat het licht van de ster om de zon buigt zie je vanaf de aarde dat de ster is verplaatst. Zie figuur 32, rechts.

Figuur 32
Afbuiging van licht door de zon. Links: de zon is niet in de buurt → licht volgt een rechte lijn. Rechts: de zon staat tussen de ster en de aarde → licht volgt een kromme lijn.



Figuur 33
Bij een zonsverduistering zie je de sterren die achter de zon staan op een andere plaats. Dit wordt veroorzaakt door de gekromde ruimte rond de zon.



Einstein voorspelt in 1916 dat de verplaatsing van een nabije ster 1,7 boogseconde is. Een boogseconde is een $\frac{1}{3600}$ van een booggraad. Hoewel dit maar een kleine hoek is kan het worden gemeten. In 1919 is de eerste wereldoorlog voorbij en gaat Eddington op weg. Metingen worden uitgevoerd in Brazilië en Afrika, waar de zonsverduistering totaal is. De door Einstein voorspelde verplaatsing blijkt te kloppen. Hierdoor wordt Einstein op slag wereldberoemd. Niet alleen de natuurkundigen, maar ook het grote publiek zien in dat door Einsteins theorie de mensheid een enorme stap heeft gezet in het begrijpen van ruimte en tijd.

Gekromde ruimte

Het afbuigen van licht betekent niet dat de ruimte recht is en het licht een kromme baan volgt, maar dat de ruimte krom is waarin het licht in een rechte lijn beweegt. Een rechte ruimte met een kromme lichtstraal zou immers betekenen dat een voorwerp een kortere route kan nemen dan het licht en daardoor sneller van A naar B kan gaan. Een voorwerp zou dan een lichtpus kunnen inhalen en dat is volgens de speciale relativiteitstheorie onmogelijk. Licht neemt altijd de korst mogelijke afstand tussen twee punten en volgt in de lege ruimte een rechte lijn. Materie maakt de ruimte krom, zodat de kortste afstand een kromme lijn is.

Om dit te begrijpen kunnen we kijken hoe vliegtuigen op aarde van Madrid naar New York vliegen. Beide steden liggen op 40 graden noorderbreedte. In figuur 34 zie je twee routes. Bij de bovenste route leg je 5966 km af. Bij de onderste route leg je 5802 km af. De kortste afstand tussen Madrid en New York is dus een gebogen lijn.



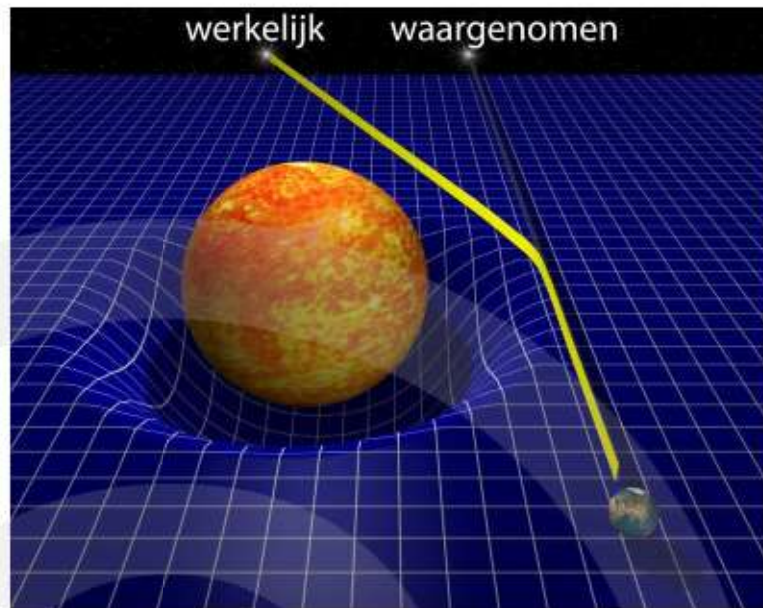
Figuur 34

De bovenste route is langer dan de onderste route. Bij een boloppervlak is de kortste verbinding tussen twee punten een cirkelbaan, gebogen om het middelpunt van de bol.



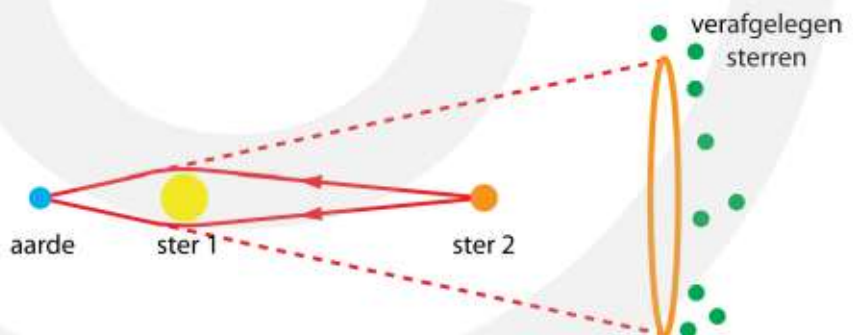
Op een vergelijkbare manier neemt het licht altijd de kortste afstand. Als er geen materie in de buurt is volgt het licht een rechte lijn. Is er wel materie dan neemt het licht ook de kortste afstand, maar in dat geval is dat een gebogen lijn.

Figuur 35
Licht volgt de kortste afstand van de ster naar de aarde. Rond de zon is de ruimte gekromd.

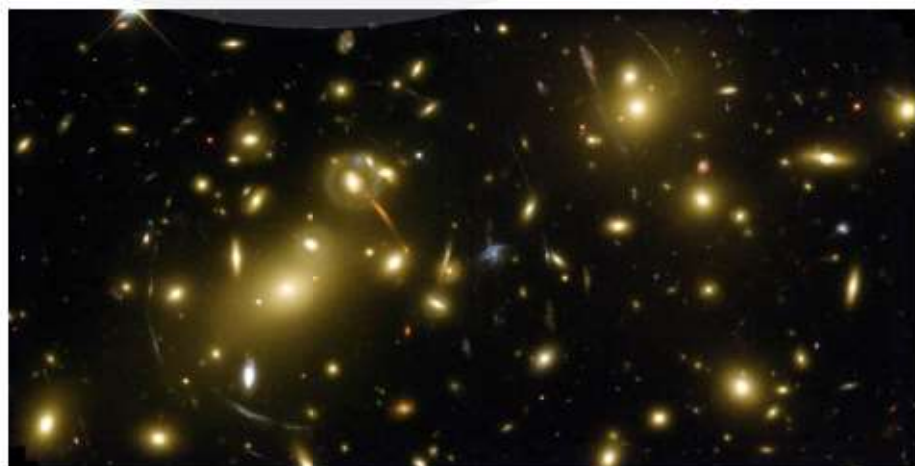


Het effect van ruimtekromming is duidelijk te merken als je een grote telescoop diep in de ruimte kijkt. Zie figuur 36. Ster 2 staat pal achter ster 1. Het licht van ster 2 buigt om ster 1 heen en is vanaf de aarde zichtbaar als een kring van licht. Net als een lens buigt gravitatie het licht af. Je spreekt van een **gravitatielens**. In figuur 37 zie je een foto waarop het effect van gravitatielenzen zichtbaar is.

Figuur 36
Licht van ster 2 buigt om ster 1 heen en is daarvoor vanaf de aarde zichtbaar als kring.



Figuur 37
Gravitatielens. De kringen van licht zijn afkomstig van sterren die achter een nabij gelegen ster staan.



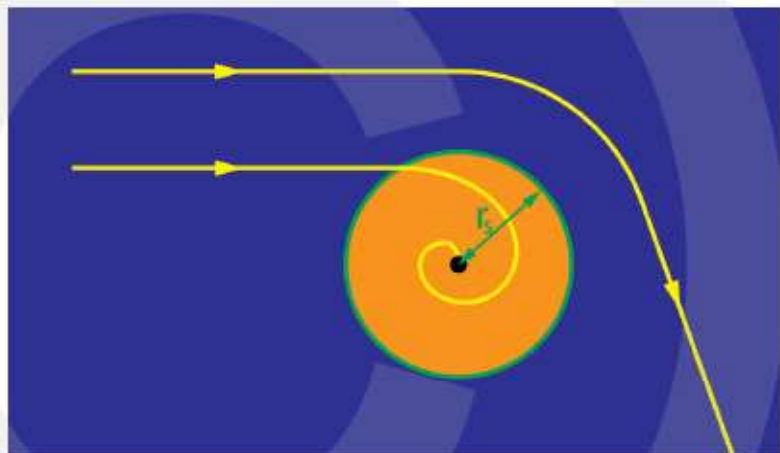
Zwarte gaten

Een zwart gat is een hemellichaam waarbij de ruimte zo sterk is gekromd dat licht er niet uit kan ontsnappen. Een zwart gat ontstaat als een grote ster aan het einde van zijn leven in elkaar stort. Als een enorme stofzuiger trekt een zwart gat materie en energie aan en krijgt daardoor steeds meer massa.

Hoe groot een zwart gat is en wat zijn eigenschappen zijn weet niemand, want om een zwart gat bevindt zich een gebied waaruit materie en energie niet kan ontsnappen. De rand van dit gebied noem je de **waarnemingshorizon**. In figuur 38 is dit aangegeven door een groene cirkel. De afstand tussen de waarnemingshorizon en de kern van het zwarte gat is de **schwarzschildstraal**, R_s . Een lichtstraal waarvan de afstand tot de kern van het zwarte gat kleiner is dan de schwarzschildstraal wordt door het zwarte gat opgenomen. Een lichtstraal op grotere afstand wordt afgebogen of komt in een baan om het zwarte gat.

Figuur 38

Om een zwart gat is de ruimte zo sterk gekromd dat ook licht niet kan ontsnappen. De groene cirkel is de waarnemingshorizon. De afstand tussen het centrum van het zwarte gat en de waarnemingshorizon is de schwarzschildstraal.



De grootte van de schwarzschildstraal vind je door de ontsnappingssnelheid, v_{ontsnap} gelijk te stellen aan de lichtsnelheid. De ontsnappingssnelheid is de snelheid die nodig is om aan de gravitatiekracht van een hemellichaam te ontsnappen. Wordt een projectiel van een afstand r vanaf het middelpunt weggeschoten met een snelheid kleiner dan v_{ontsnap} dan valt het terug of komt het in een ellipsvormige baan. Is de snelheid groter dan v_{ontsnap} dan komt het projectiel los en ontsnapt het aan de gravitatiekracht. Voor de aarde is de ontsnappingssnelheid 11,2 km/s. Voor een zwart gat is de ontsnappingssnelheid groter dan de lichtsnelheid. Een voorwerp in een zwart gat heeft daarom geen mogelijkheid om te ontsnappen, omdat zijn snelheid altijd kleiner is dan de lichtsnelheid.

Voor de ontsnappingssnelheid geldt:

$$v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{r}}$$

- v_{ontsnap} is de ontsnappingssnelheid in meter per seconde [m/s]
- G is de gravitatieconstante: $G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- m is de massa van het hemellichaam in kilogram [kg]
- r is de afstand tot het centrum in meter [m]

Hemellichaam	Vontsnap (m/s)
planeet	10^4
ster	10^6
witte dwerg	10^7
neutronenster	10^8
zwart gat	$> 3,0 \cdot 10^8$

Op de afstand van de Schwarzschildstraal R_s geldt: $v_{\text{ontsnap}} = c$. Hieruit vinden we voor de Schwarzschildstraal:

$$R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$$

- R_s is de Schwarzschildstraal in meter [m]
- G is de gravitatieconstante: $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- m is de massa van het hemellichaam in kilogram (kg)
- c is de lichtsnelheid: $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

VOORBEELD de zon als zwart gat

Bereken de Schwarzschildstraal van het zwarte gat dat ontstaat als de zon wordt samengeperst tot een punt.

- $m_{\text{zon}} = 1,9884 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- $R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$
- $R_s = \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9884 \cdot 10^{30}}{(3,0 \cdot 10^8)^2}$
- $R_s = 2,95 \cdot 10^3 \text{ m} \quad (2,95 \text{ km})$

VOORBEELD de aarde als zwart gat

Bereken de Schwarzschildstraal van het zwarte gat dat ontstaat als de aarde wordt samengeperst tot een punt.

- $m_{\text{aarde}} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- $R_s = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$
- $R_s = \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{(3,0 \cdot 10^8)^2}$
- $R_s = 8,86 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (8,86 \text{ mm})$

Tijdrek en massa

De aanwezigheid van massa veroorzaakt dat de tijd langzamer loopt. Er ontstaat tijdrek. Tijdrek door de aanwezigheid van massa bereken je met:

$$\frac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

- Δt_{massa} is de tijd die een klok aangeeft bij aanwezigheid van massa (s)
- $\Delta t_{\text{lege ruimte}}$ is de tijd die een klok aangeeft in een ruimte zonder massa (s)
- R_s is de Schwarzschildstraal (m)
- r is de afstand tot het middelpunt van de massa (m)

VOORBEELD tijdrek op aarde

Bereken de tijdrek op het oppervlak van de aarde.

- $\frac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \quad | \quad \text{Aarde: } R_s = 8,86 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $r_{\text{aarde}} = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$
- $\frac{\Delta t_{\text{aarde}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{8,86 \cdot 10^{-3}}{6,371 \cdot 10^6}} \rightarrow \frac{\Delta t_{\text{aarde}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - 1,39 \cdot 10^{-9}}$

MERK OP

De afwijking met 1 is zo klein dat je het op een gewone rekenmachine niet kan uitrekenen.

VOORBEELD tijdrek op de zon

Bereken de tijdrek op de zon.

- $\frac{\Delta t_{\text{massa}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \quad | \quad \text{Zon: } R_s = 2,95 \cdot 10^3 \text{ m}$
- $r_{\text{zon}} = 6,963 \cdot 10^8 \text{ m}$
- $\frac{\Delta t_{\text{zon}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - \frac{2,95 \cdot 10^3}{6,963 \cdot 10^8}} \rightarrow \frac{\Delta t_{\text{zon}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = \sqrt{1 - 4,24 \cdot 10^{-6}}$
- $\frac{\Delta t_{\text{zon}}}{\Delta t_{\text{lege ruimte}}} = 0,999995763$
- een jaar op aarde duurt $365,256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31.558.118 \text{ s}$
- op de zon duurt een jaar: $31.557.985 \text{ s}$
- het verschil is 133 seconden $\rightarrow$ per jaar word je 133 seconden minder oud

VOORBEELD

plaatsbepaling met behulp van GPS-satellieten

Om de positie op aarde te bepalen is sinds de jaren '80 van de vorige eeuw het GPS (Global Positioning System) in gebruik. Momenteel bestaat het GPS systeem uit 32 satellieten. Op ieder moment zijn er vanaf iedere plaats op aarde 9 GPS-satellieten zichtbaar. Omdat een minimum van 4 zichtbare GPS-satellieten vereist is om een positie vast te leggen is het systeem betrouwbaar. Ook als er een paar satellieten uitvallen blijft het GPS systeem werken.



Figuur 39 GPS-satellieten

De GPS-satellieten staan op een hoogte van ongeveer 20.000 km boven het aardoppervlak.

GPS-satellieten zenden signalen uit met informatie over:

- de tijd waarop het signaal wordt uitgezonden
- welke satelliet het signaal uitzendt

Deze signalen reizen met de lichtsnelheid naar de GPS-ontvanger. Uit het tijdstip van ontvangst berekent de ontvanger hoe lang het signaal onderweg is geweest. Vermenigvuldigd met de bekende lichtsnelheid geeft dit de afstand tussen de satelliet en de ontvanger. Door dit drie keer te doen met drie verschillende GPS-satellieten kan de plaats op het aardoppervlak worden berekend. Een vierde satelliet wordt gebruikt ter controle.

Bij de toepassing van het GPS-systeem moet rekening worden gehouden met de relativiteitstheorie. De plaatsbepaling heeft een nauwkeurigheid van enkele meters en om dit te bereiken moeten er noodzakelijke correcties worden uitgevoerd in de GPS-ontvanger.

- De satellieten bewegen ten opzichte van de ontvanger, waardoor de satelliet-klokken langzamer lopen dan die in de ontvanger. De atoomklokken in de satellieten zenden iedere seconde een puls uit met een nauwkeurigheid van 10^{-8} seconde en moeten geregeld worden gesynchroniseerd met de klokken op aarde.
- Satelliet en ontvanger vormen geen inertiaal referentiestelsel. In plaats van de speciale relativiteitstheorie moet de algemene relativiteitstheorie worden gebruikt.
- De satellieten bevinden zich hoog boven het aardoppervlak. Het gravitatieveld is daar zwakker dan op aarde, waardoor de klokken van de GPS-satellieten sneller lopen. Met de algemene relativiteitstheorie moet dit in rekening worden gebracht.