11 Kromlijnige beweging vwo

11.0 Overzicht

11.1 Projectielen afschieten
- Wat geven de letters x, y en z aan?
- Wat weet je van de bewegingen in de x- de y- en de z-richting?
- Welke rol speelt de tijd bij een kromlijnige beweging?
- Wat is een projectiel?
- Wat is de baan van een projectiel?
- Welke informatie heb je nodig om de baan van een projectiel te berekenen?
- Wat weet je van v_x bij een horizontaal afgeschoten projectiel zonder $F_{w\ lucht}$?
- Wat weet je van v_y bij een horizontaal afgeschoten projectiel zonder $F_{w\ lucht}$?
- Wat bereken je altijd het eerst bij een kromlijnige beweging?
- Hoe bereken je de snelheid als je de x- en de y-component van v weet?
- Hoe bepaal je de richting van de snelheidsvector uit de baan?
- Hoe bepaal je de hoek waarmee een projectiel op de grond valt?
- Wat kun je met de wet van behoud van energie berekenen?
- Wat kun je met de wet van behoud van energie NIET berekenen?
- Welke conclusie volgt uit de wet van behoud van energie voor een schuin afgeschoten projectiel?
- Hoe hangt de schootsafstand af van de hoek waarmee je een projectiel afschiet?
- Met welke hoek schiet je het verst?

11.2 Eenparige cirkelbeweging
- Wat geldt er voor een cirkelbeweging?
- Wanneer is een cirkelbeweging eenparig?
- Wat weet je van de snelheid bij een eenparige cirkelbeweging?
- Wat is de omlooptijd?
- Welk symbool heeft de omlooptijd en welke eenheid heeft het?
- Wat is de omloopfrequentie?
- Welk symbool heeft de omloopfrequentie en welke eenheid heeft het?
- Wat is het toerental en hoe bereken je het toerental uit de frequentie?
- Wat is de baansnelheid en welke eenheid heeft het?
- Wat is de hoeksnelheid?
- Welk symbool heeft hoeksnelheid en welke eenheid heeft het?
- Met welke formule bereken je de hoeksnelheid?
- Welke formule geeft de relatie tussen de baansnelheid en de hoeksnelheid?
- Wat is een middelpuntzoekende kracht?
- Welk symbool heeft de middelpuntzoekende kracht en welke eenheid?
- Wat geldt er bij een eenparige cirkelbeweging?
- Met welke formule bereken je de middelpuntzoekende kracht?
- Wat is een middelpuntzoekende versnelling?

- Welk symbool heeft de middelpuntzoekende versnelling en welke eenheid?
- Met welke formule bereken je de middelpuntzoekende versnelling?

11.3 Horizontale cirkelbeweging

- Welke kracht levert F_{mpz} bij het maken van een horizontale bocht?
- Waarom kun je een hellende bocht met grotere snelheid nemen?
- Wat is een cirkelslinger?
- Welke krachten leveren F_{mpz} bij een cirkelslinger / hellende bocht?
- Met welke formule bereken je F_{mpz} bij een cirkelslinger / hellende bocht?
- Met welke formule bereken je de snelheid om zonder zijwaartse kracht een hellende bocht te maken?
- Met welke formule bereken je de normaalkracht bij een hellende bocht?
- Wat is het verschil tussen een hellende bocht maken en langs een helling bewegen?
- Met welke formule bereken je de omlooptijd van een cirkelslinger?
- Waarin verschilt de omlooptijd van een cirkelslinger met de slingertijd?

11.4 Verticale cirkelbeweging

- Welke krachten leveren F_{mpz} bij een verticale cirkelbeweging?
- Wat geldt voor F_{mpz} bovenin een looping?
- Wat geldt voor F_{mpz} onderin een looping?
- Hoe bereken je de minimale snelheid bij een looping?
- Wat gebeurt er als de snelheid lager is?
- Vanaf welke hoogte moet een treintje worden losgelaten om met de minimale snelheid door een looping te gaan?

11.5 Gravitatie

- Hoe luidt de gravitatiewet van Newton?
- Hoe bereken je de valversnelling op aarde uit de gravitatiewet?
- Waarom is het bewegen van de maan om de aarde natuurkundig gezien hetzelfde als het vallen van een appel?
- Wat is een ellips?
- Hoe volgt de 3e wet van Kepler uit de formules voor F_G en F_{mpz}?
- Wat is een geostationaire satelliet en waarvoor worden ze gebruikt?
- Hoe bereken je de hoogte van een geostationaire satelliet?
- Wat zijn satellieten met polaire banen en waarvoor worden ze gebruikt?
- Wat is gravitatie-energie en hoe bereken je die?
- Wat is de ontsnappingssnelheid en hoe kun je die berekenen?

11.1 Projectielen afschieten

Bewegen in drie dimensies

Voorwerpen kunnen in één -, twee - of drie dimensies bewegen. In hoofdstuk 2 hebben we ons verdiept in bewegingen in één richting. In hoofdstuk 6 heb je kennis-gemaakt met de wet van behoud van energie en met een aantal verschillende soorten energie, zoals zwaarte-energie en kinetische-energie. Hiermee kun je de snelheid en de hoogte van een voorwerp in een kromme baan vinden. Maar met energiebehoud lukt het niet om de baan van een voorwerp te berekenen. Energie-behoud zegt immers alleen iets over de begin- en eindtoestand. Hoe je van begin naar eind komt kun je met energiebehoud niet bepalen, want de wet van behoud van energie zegt niets over de tijd die het kost om van begin naar eind te gaan.

Het is opmerkelijk dat onze ruimte **drie onafhankelijke richtingen** heeft. Als een voorwerp zich horizontaal beweegt blijft zijn verticale positie constant. Om niet in de war te raken gebruiken we de letters x, y en z om de richtingen horizontaal, verticaal en diepte aan te geven. Om een tweedimensionale beweging te beschrijven kun je, net als in de wiskunde, een (x, y)– assenstelsel tekenen, waarbij een punt in dit assenstelsel de plaats van het voorwerp is. Voor een driedimensionale beweging moet je hier een z-as aan toevoegen, maar dat is lastig te tekenen in een plat vlak.

Bij het berekenen van een twee- of driedimensionale beweging splits je de beweging in twee of drie richtingen. Hoewel de beweging in de y-richting niet wordt beïnvloed door de beweging in de x-richting zijn de twee bewegingen niet helemaal onafhanke-lijk van elkaar. De **tijd** is de verbindende factor. In iedere richting loopt de klok even snel en is de hoeveelheid verstreken tijd hetzelfde. Bij berekeningen aan kromme banen speelt de tijd dan ook een belangrijke rol.

Bewegingen in de x- , de y- en de z-richting zijn onafhankelijk .

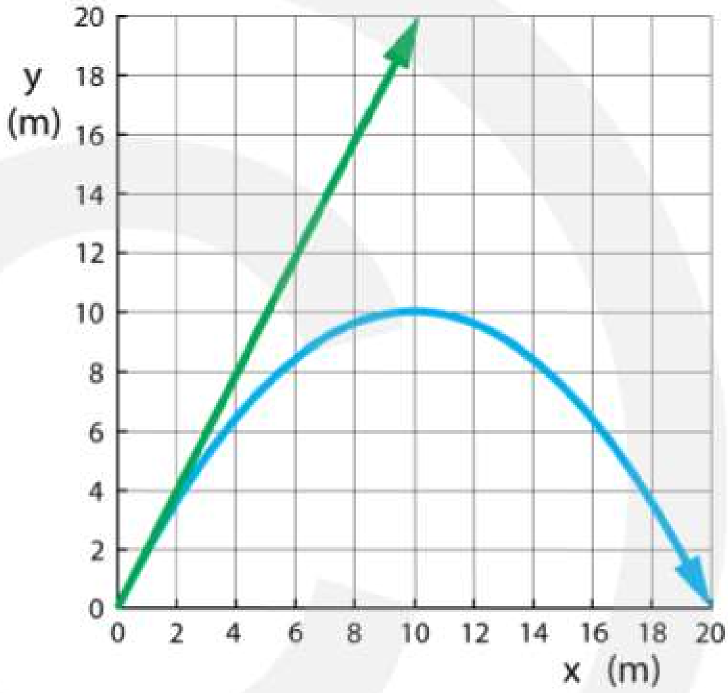
De hoeveelheid verstreken tijd is in iedere richting hetzelfde.

We gaan ons in deze paragraaf bezighouden met de baan van een afgeschoten projectiel. Een **projectiel** is een voorwerp dat gedurende korte tijd door een kracht wordt versneld en daarna aan zichzelf wordt overgelaten. Vanaf het tijdstip van loslaten werken alleen de zwaartekracht en de wrijvingskracht op het projectiel. De beweging komt tot stilstand als het projectiel ergens tegenaan botst. Dat kan de grond zijn of een object dat door het projectiel wordt geraakt.

Een projectiel is een voorwerp dat gedurende korte tijd door een kracht wordt versneld en daarna aan zichzelf wordt overgelaten.

Een steen schuin omhooggooien

Stel je gooit een steen schuin omhoog. Zonder zwaartekracht en zonder wrijvingskracht blijft de steen langs een rechte lijn bewegen. Nadat de steen loskomt van je hand geldt immers $\Sigma F = 0$, zodat de grootte en richting van de snelheid niet meer veranderen. We verdelen de snelheid in een horizontale en een verticale snelheid. De horizontale snelheid is evenwijdig aan het aardoppervlak en de verticale snelheid staat loodrecht op het aardoppervlak. Evenwijdig aan het aardoppervlak noemen we de **x-richting**. De richting loodrecht op het aardoppervlak noemen we de **y-richting**.



Figuur 1 De baan van een schuin omhoog afgeschoten projectiel. De groene lijn geeft de baan van het projectiel aan als er geen zwaartekracht en geen wrijvingskracht is. De blauwe lijn is de baan van het projectiel met zwaartekracht.

Figuur 1 is een **(y, x)-diagram**. Op de horizontale as staat de **plaats x** en op de verticale as de **plaats y**. Een **(y, x)-grafiek** toont de plaats van het projectiel op de verschillende tijdstippen. Dit is **de baan** van het projectiel. Als er geen krachten werken is zowel de horizontale snelheid als de verticale snelheid constant en is de (y, x)-grafiek een rechte lijn. Zie figuur 1, groene grafiek.

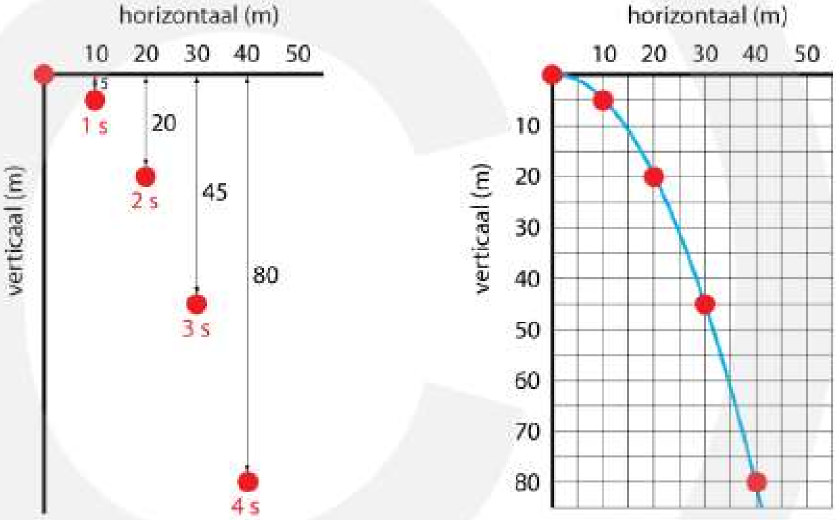
Als er zwaartekracht is krijgt de steen een kromme baan als je hem schuin omhoog gooit. Horizontaal geldt nog steeds $\Sigma F_x = 0$ en de horizontale snelheid is dus constant. Maar verticaal werkt de zwaartekracht en geldt: $\Sigma F_y = m \cdot g$. De zwaartekracht veroorzaakt een constante versnelling naar beneden. Zie figuur 1, blauwe grafiek.

De beweging van een projectiel lijkt in eerste instantie ingewikkeld, maar dat blijkt mee te vallen. De horizontale en verticale beweging kun je namelijk los van elkaar berekenen met de tijd als verbindende factor. Als luchtwrijving mag worden verwaarloosd heeft een projectiel horizontaal een constante snelheid. Verticaal maakt het projectiel een valbeweging. Als het projectiel omhoog wordt geschoten vertraagt het bij het omhoog gaan. Nadat het hoogste punt is bereikt valt het omlaag. De kromme baan van het projectiel is een combinatie van een horizontale- en een verticale beweging die geen invloed op elkaar uitoefenen.

Horizontaal afgeschoten projectiel

Als voorbeeld van een kromlijnige beweging gaan we de baan van een horizontaal afgeschoten projectiel berekenen. Om het inzichtelijk te maken nemen we als valversnelling g = 10 m/s^2 en schieten we het projectiel met 10 m/s horizontaal weg. De plaats in de x- en in de y-richting laten zich eenvoudig berekenen. Het resultaat vind je in de tabel hiernaast en in een (y, x) diagram, figuur 2. In een (y, x)-diagram kun je de tijd niet aflezen.

tijd (s)	x (m) $x = v_{gem} \cdot t$	y (m) $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$
0	0	0
1	10	5
2	20	20
3	30	45
4	40	80
5	50	125
6	60	180
7	70	245
8	80	320
9	90	405
10	100	500



Figuur 2 De baan van een horizontaal afgeschoten projectiel. De horizontale en verticale bewegingen zijn onafhankelijk van elkaar. De horizontale snelheid is 10 m/s. De verticale versnelling is 10 m/s^2.

Om van een voorwerp de baan te kunnen berekenen heb je nodig:

- **op ieder tijdstip de resulterende kracht**
- **plaats én snelheid in het begin OF plaats én snelheid aan het eind**

Om bewegingen in verschillende richtingen uit elkaar te houden voeren we de volgende notatie in:

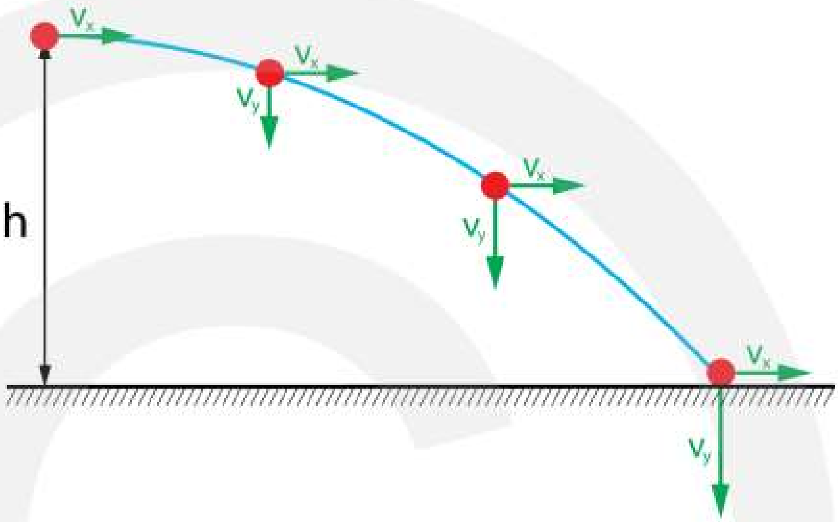
x	**en**	**y**	**plaats in de x- en in de y-richting**
v_x	**en**	**v_y**	**snelheid in de x- en in de y richting**
ΣF_x	**en**	**ΣF_x**	**ΣF in de x- en in de y richting**
a_x	**en**	**a_y**	**versnelling in de x- en in de y richting**

Een horizontaal afgeschoten projectiel

Om te zien hoe dit in zijn werk gaat bereken we hoe een horizontaal afgeschoten projectiel van een toren naar beneden valt. Omdat er geen luchtweerstand is blijft de horizontale snelheid v_x constant. De verticale snelheid v_y neemt iedere seconde met 9,81 m/s toe.

Een projectiel wordt op een hoogte van 50,0 meter met een horizontale snelheid van 20,0 m/s afgeschoten. Luchtwrijving wordt verwaarloosd. Van dit projectiel gaan we berekenen:

- **De horizontale afstand die het projectiel aflegt.**
- **De snelheid waarmee het projectiel op de grond komt.**



Figuur 3 Een horizontaal afgeschoten voorwerp beschrijft een parabolische baan. De horizontale snelheid v_x is constant, de verticale snelheid v_y neemt iedere seconde met 9,81 m/s toe.

In het onderstaande schema vind je hoe je de berekeningen moet uitvoeren.

Horizontaal	Verticaal	Opmerkingen
$x_0 = 0$ m $v_{x\,0} = 20$ m/s $a_{x\,0} = 0$ m/s^2	$y_0 = 50$ m $v_{y\,0} = 0$ m/s $a_{y\,0} = 9{,}81$ m/s^2	**Begin** Plaats, snelheid en versnelling aan het begin van de beweging zijn bekend. v_x verandert niet
$x = v_x \cdot t$ $v_x = v_{x\,0}$ $a_x = 0$	$y = ½\, a \cdot t^2$ $v_y = a \cdot t$ $a_y = 9{,}81$ m/s^2	**Formules** Horizontaal is de snelheid constant; verticaal is de beweging eenparig versneld.
	$50 = ½ \cdot 9{,}81 \cdot t^2$ $t = 3{,}19275$ s	Bereken eerst tijdstip t waarop de beweging stopt.
$x_{eind} = 20 \cdot 3{,}19275$ $x_{eind} = 63{,}855$ m		Horizontale verplaatsing van de kogel.
	$v_{y\,eind} = 9{,}81 \cdot 3{,}19275$ $v_{y,\,eind} = 31{,}321$ m/s	Verticale eindsnelheid van de kogel.
$x_{eind} = 64$ m $v_{x\,eind} = 20$ m/s $a_{x\,eind} = 0{,}0$ m/s^2	$y_{eind} = 0{,}0$ m $v_{y\,eind} = 31$ m/s $a_{y\,eind} = 9{,}81$ m/s^2	**Eind** Plaats, snelheid en versnelling aan het einde van de beweging.

De snelheid waarmee het projectiel op de grond valt is de grootte van de snelheidsvector. Met de stelling van Pythagoras kun je dit berekenen.

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{20^2 + 31{,}321^2} = 37{,}16181 = 37{,}2\ m/s$$

De hoek waarmee het projectiel op de grond valt volgt uit:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{31{,}321}{20{,}0} \quad \rightarrow \quad \alpha = 57{,}4397 = 57{,}4^o$$

Verderop in deze paragraaf wordt dit uitgelegd.

De baan van het projectiel

Om de baan te berekenen heb je de resulterende kracht op ieder tijdstip én plaats en snelheid aan het begin of aan het eind nodig. Hiermee kun je voor ieder tijdstip de plaatsen x en y van het projectiel berekenen.

Om de eindtoestand te vinden bereken je altijd eerst hoe lang de beweging duurt. Eerst moet je bedenken waardoor de beweging stopt. Bij een val is het meestal de verticale beweging die het einde bepaalt, omdat het projectiel op de grond landt. Als je een projectiel afschiet op een doel is het meestal de horizontale beweging die het einde bepaalt, omdat het projectiel het doel raakt.

Figuur 4 De verticale beweging (links) of de horizontale beweging (rechts) bepaalt wanneer de beweging stopt.

Zoals je in figuur 3 kunt zien verandert het projectiel voortdurend van richting. In het begin is de richting horizontaal maar bij het verstrijken van de tijd krijgt de richting een steeds grotere verticale component. Dat komt omdat de horizontale snelheid niet verandert en de verticale snelheid steeds groter wordt.

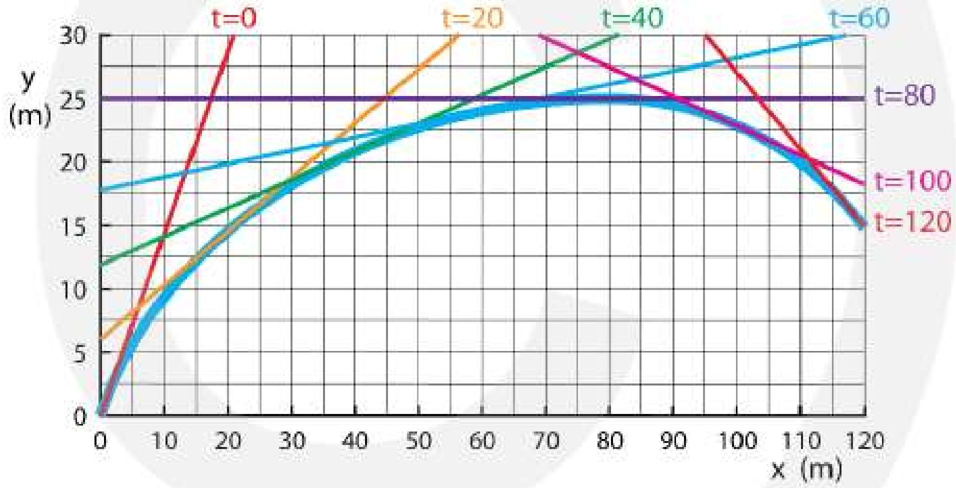
Met de richting van de beweging bedoelen we de richting van de snelheids-vector. De snelheidsvector heeft een x- en een y-component. In het geval van figuur 3 blijft v_x constant en wordt v_y steeds groter. Als je de baan van een projectiel weet kun je de richting van de snelheidsvector op ieder tijdstip bepalen. De **richting van de snelheid** op een tijdstip is gelijk aan de **richting van de raaklijn aan de baan** op dit tijdstip.

De richting van de snelheidsvector $\vec{v}$ op tijdstip t is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan op tijdstip t.

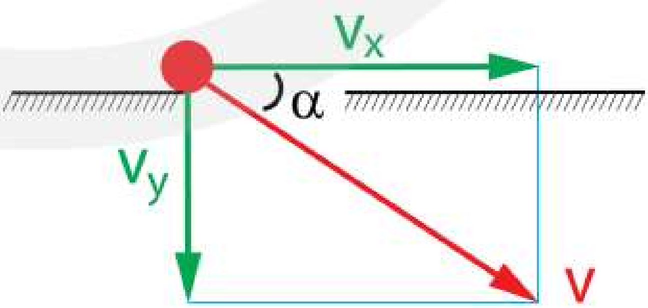
$$\frac{v_y}{v_x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\text{raaklijn}}$$

Als je de snelheid in de x-richting of in de y-richting op tijdstip t weet kun je uit de baan de snelheid in de andere richting én de totale snelheid bepalen. In figuur 5 zie je de baan van een voorwerp. De horizontale snelheid is constant 1,0 m/s. De verticale snelheid verandert. De richting van de snelheid is de richting van de raaklijn aan de baan.

Figuur 5 De richting van de snelheid op tijdstip t is gelijk aan de richting van de raaklijn aan de baan op dit tijdstip.



De hoek waarmee een projectiel op de grond landt is de hoek tussen de snelheids-vector en de grond. Figuur 6 is het moment waarop het projectiel de grond raakt. Hoek α kan worden berekend uit de waarden van v_x en v_y.



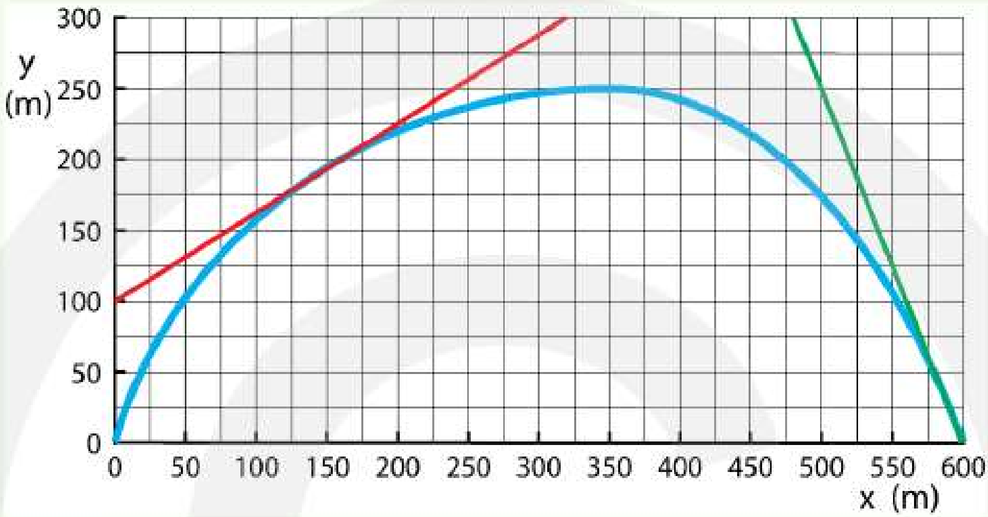
Figuur 6 De richting van de snelheid op het tijdstip waarop het projectiel de grond raakt.

Voor hoek α geldt:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

VOORBEELD de snelheid op een tijdstip bepalen uit de baan

Een projectiel wordt schuin omhoog afgeschoten. In figuur 7 zie je de baan van het projectiel. De horizontale snelheid is constant: $v_x = 50$ m/s.



Figuur 7

Bepaal de snelheid op t = 3,0 s.

- $v_x = 50\,m/s \quad | \quad t = 3{,}0\,s \quad | \quad x = \ldots m$
- $x = v_x \cdot t \quad \rightarrow \quad x = 50 \cdot 3 = 150\,m$
- raaklijn op x = 150 m $\rightarrow$ richtingscoëfficiënt: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{300-100}{320} = 0{,}625$
- $\dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}625 \quad \rightarrow \quad \dfrac{v_y}{50} = 0{,}625 \quad \rightarrow \quad v_y = 31{,}25\,m/s$
- $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{50^2 + 31{,}25^2} = 58{,}96 = 59\,m/s$

Bepaal met welke snelheid het projectiel de grond raakt.

- raaklijn op x = 600 m $\rightarrow$ richtingscoëfficiënt: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{300}{480-600} = -2{,}5$
- $\dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -2{,}5 \quad \rightarrow \quad \dfrac{v_y}{50} = -2{,}5 \quad \rightarrow \quad v_y = -125\,m/s$
- $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{50^2 + (-125)^2} = 134{,}63 = 135\,m/s$

De wet van behoud van energie

Ook met de wet van behoud van energie kun je de eindtoestand berekenen als je de begintoestand weet of andersom. Maar deze wet zegt niets over **hoe** het projectiel van begin naar eind gaat. Over de baan kom je dus niets te weten. Daarvoor heb je de bewegingsvergelijkingen nodig, zoals eerder is uitgelegd.

VOORBEELD energie van een afgeschoten projectiel

Een projectiel met een massa van 3,00 kg wordt op een hoogte van 50,0 meter met een snelheid van 20,0 m/s afgeschoten. Luchtwrijving wordt verwaarloosd.

Bereken de energie op t = 0.

- $E_{begin} = E_Z + E_K \quad \rightarrow \quad E_{begin} = m \cdot g \cdot h_{begin} + \frac{1}{2} m \cdot v_{begin}^2$
- invullen: $h_{begin} = 50\,m$ en $v_{begin} = 20\,m/s$
- $E_{begin} = 3 \cdot 9{,}81 \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20^2 = 2071{,}5 = 2{,}07 \cdot 10^3$ J

Bereken de energie op t_{eind}.

- wet van behoud van energie: $E_{begin} + E_{in} = E_{eind} + E_{uit}$
- $E_{in} = 0$ en $E_{uit} = 0$ *(geen toegevoegde energie en geen wrijving)*
- $E_{eind} = E_{begin} = 2071{,}5 = 2{,}07 \cdot 10^3$ J

Bereken de eindsnelheid.

- $E_{eind} = E_Z + E_K \quad \rightarrow \quad E_{eind} = m \cdot g \cdot h_{eind} + \frac{1}{2} m \cdot v_{eind}^2$
- invullen: $E_{eind} = 2071{,}5$ J en $h_{eind} = 0\,m$
- $2071{,}5 = 3 \cdot 9{,}81 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot v_{eind}^2 \quad \rightarrow \quad v_{eind} = 37{,}16181 = 37{,}2\,m/s$

Bereken de hoek waarmee het projectiel op de grond valt.

- $v_x = 20{,}0\,m/s \quad | \quad v_{eind} = 37{,}16181\,m/s \quad | \quad \alpha = \ldots°$
- $\cos\alpha = \dfrac{v_x}{v_{eind}} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \dfrac{20}{37{,}16181} \quad \rightarrow \quad \alpha = 57{,}4397 = 57{,}4°$

OOK GOED

- pythagoras: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \rightarrow \quad 37{,}16181 = \sqrt{20^2 + v_y^2} \quad \rightarrow \quad v_y = 31{,}321\,m/s$
- $\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{31{,}321}{20} \quad \rightarrow \quad \alpha = 57{,}4397 = 57{,}4°$

Als er geen wrijving is geldt $E_{begin} = E_{eind}$. Omdat E_{begin} onafhankelijk is van de hoek waaronder het projectiel wordt afgeschoten is E_{eind} hiervan ook niet afhankelijk. Aan het eind geldt: $h_{eind} = 0$ en heeft het voorwerp alleen kinetische energie. Hieruit mogen we concluderen dat de hoek waaronder een projectiel wordt afgeschoten geen invloed heeft op de snelheid waarmee het projectiel op de grond landt. Dit is een conclusie die misschien tegen je intuïtie ingaat.

Als er geen luchtweerstand is heeft de hoek waaronder een projectiel wordt afgeschoten geen invloed op de grootte van de eindsnelheid.

Parabolische baan bij afgeschoten projectielen

Als er geen luchtweerstand is krijgen alle afgeschoten projectielen bij benadering een **parabolische baan**. De formule voor de baan heeft als vorm: $y = a \cdot x^2 + b$. Ook schuin afgeschoten projectielen krijgen een parabolische baan. Dit is een benadering omdat we aannemen dat de valversnelling constant is en dat de aarde plat is. Zolang de beginsnelheid niet te groot is en de afstand klein ten opzichte van de straal van de aarde is dit een goede benadering.

BEWIJS

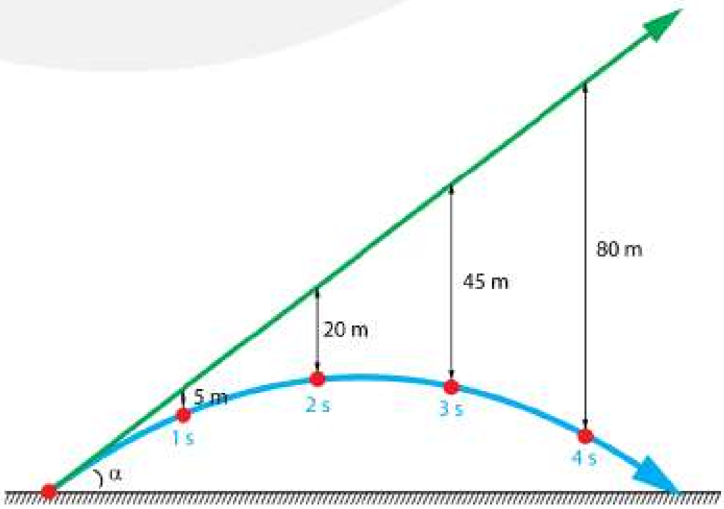
- $x = v_x \cdot t \;\rightarrow\; t = \dfrac{x}{v_x}$
- $y = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2$
- $y = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot \left(\dfrac{x}{v_x}\right)^2 \;\rightarrow\; y = y_0 - \dfrac{g}{2 \cdot v_x^2} \cdot x^2$
- vergelijk met: $y = a \cdot x^2 + b$ geeft: $a = -\dfrac{g}{2 \cdot v_x^2}$ en $b = y_0$

Schuin omhooggeschoten projectielen

Een schuin omhooggeschoten projectiel blijft zonder zwaartekracht schuin omhoog bewegen. De zwaartekracht zorgt voor een versnelling omlaag in de verticale richting. Het projectiel verliest dus hoogte volgens $\Delta y = ½ \cdot g \cdot t^2$, waarin Δy het hoogteverlies is en g de valversnelling van 9,81 m/s^2.

Bij een schuin omhooggeschoten projectiel wordt de schootsafstand x_{max} en de maximale hoogte y_{max} bepaald door de beginsnelheid en de hoek. Stel we schieten een projectiel weg met beginsnelheid v_0, onder hoek α met de horizontaal, zie figuur 8. Voor de x- en y-component van de beginsnelheid geldt: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$ en $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$. We vinden nu:

$$x_{max} = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \quad | \quad y_{max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot (\sin\alpha)^2$$



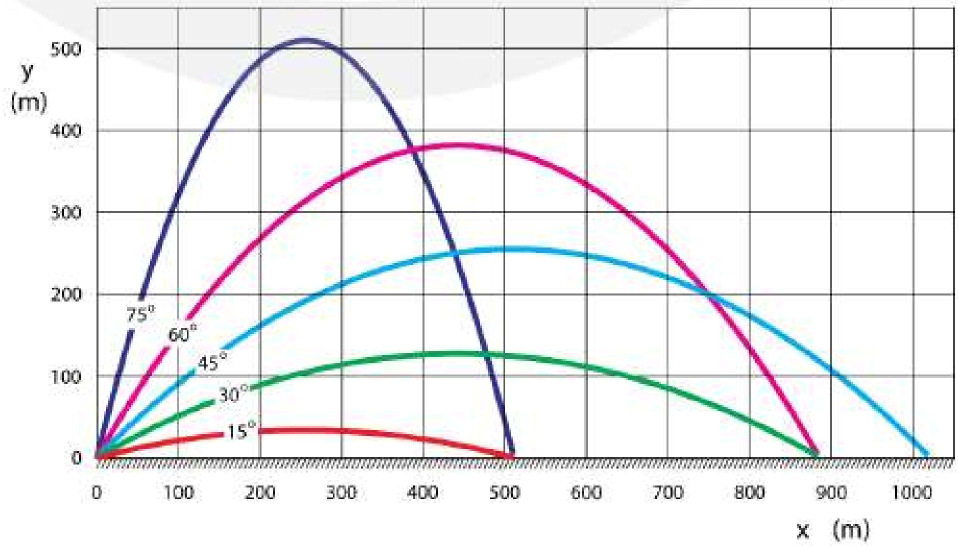
Figuur 8 Schuin omhooggeschoten projectiel. De groene lijn is de baan als er geen zwaartekracht is. De blauwe lijn is de baan met zwaartekracht. Hier g = 10 m/s^2.

BEWIJS

- $t_{omhoog} = \dfrac{v_{0y}}{g} \quad \rightarrow \quad t_{omhoog} = \dfrac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$
- $t_{omlaag} = t_{omhoog} \quad \rightarrow \quad t_{tot} = t_{omlaag} + t_{omhoog}$
- $t_{tot} = \dfrac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$
- invullen: $x = v_{0x} \cdot t \quad \rightarrow \quad x_{max} = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot \left(\dfrac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)$
- $x_{max} = \dfrac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- omhoog eenparige vertraging $\quad y_{max} = \frac{1}{2} g \cdot (t_{omhoog})^2$
- $y_{max} = \frac{1}{2} g \cdot \left(\dfrac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)^2$
- $y_{max} = \dfrac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot (\sin\alpha)^2$

Met behulp van deze formules kunnen we de volgende conclusies strekken.
- omdat geldt: $\sin\alpha = \cos(90-\alpha)$ en $\cos\alpha = \sin(90-\alpha)$ zijn de horizontale schootsafstanden voor de hoeken α en $90 - \alpha$ aan elkaar gelijk
- bij een hoek van 75° is de horizontale schootsafstand x_{max} vrijwel gelijk aan de maximale hoogte y_{max}
- $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ heeft een maximum bij $\alpha = 45$ graden $\rightarrow$ bij 45° schiet je het verst

In figuur 9 zie je het resultaat van berekeningen aan een schuin omhoog afgeschoten projectiel met een beginsnelheid van $v_0 = 100$ m/s. De schootsafstanden bij 75 en 15 graden zijn aan elkaar gelijk, net zoals die bij 60 en 30 graden. Bij 45 graden is de horizontale afstand het grootst.



Figuur 9 Banen van een schuin omhooggeschoten projectiel met v_0 = 100 m/s.

11.2 Eenparige cirkelbeweging

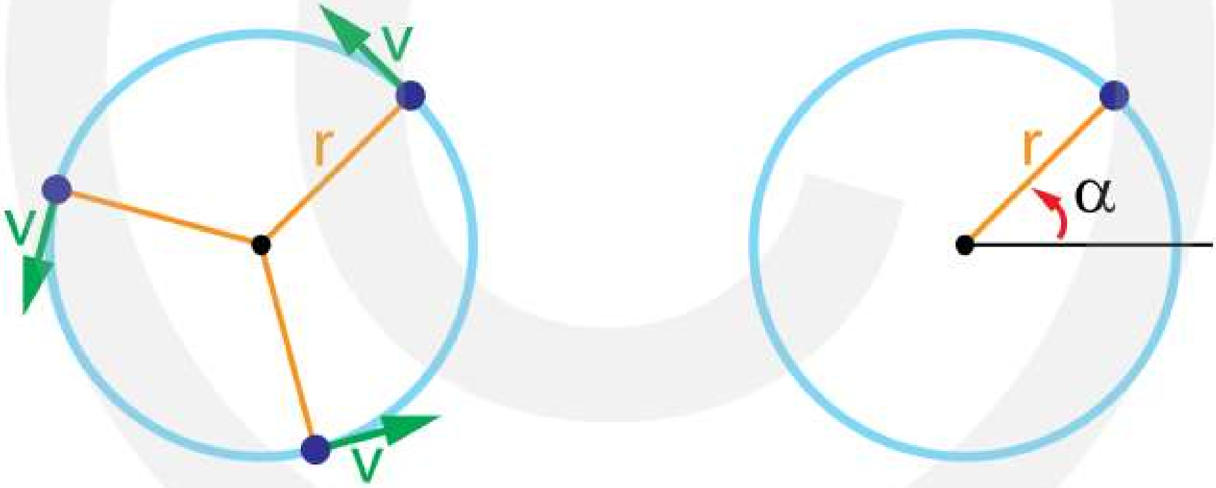
Cirkelbeweging

Bij een **cirkelbeweging** is de afstand van het voorwerp tot een vast punt constant. In een (x,y)-assenstelsel veranderen de x- en de y- coördinaten tegelijkertijd. Voor de cirkelbeweging geldt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{constant}$$

Bij een **eenparige cirkelbeweging** is bovendien de grootte van de snelheid constant, de cirkel worden in een vaste tijd afgelegd.

> **Bij een eenparige cirkelbeweging is de grootte van de snelheid constant. De richting van de snelheid verandert voortdurend.**



Figuur 10 Bij een eenparige cirkelbeweging is de grootte van de snelheid constant. De richting van de snelheid verandert voortdurend. De hoek α verandert met een constante snelheid.

Omlooptijd en omloopfrequentie

De tijd die nodig is om één complete cirkelbaan af te leggen is de **omlooptijd**. De **omloopfrequentie** is het aantal omwentelingen per seconde.

> **De omlooptijd T is de tijd waarin één complete cirkelbaan wordt afgelegd in seconde (s).**
>
> **De omloopfrequentie f is het aantal omwentelingen per seconden in hertz (Hz) (Hz = s^{-1})**

Baansnelheid en hoeksnelheid

Bij een eenparige cirkelbeweging is de grootte van de snelheid constant. De richting van de snelheid verandert voortdurend. Een volledige cirkel wordt in de omlooptijd T doorlopen. Omdat de omtrek van een cirkel gelijk is aan $2\pi \cdot r$ vinden we voor de **baansnelheid**:

$$v_{baan} = \frac{2\pi \cdot r}{T} = 2\pi \cdot r \cdot f$$

- v_{baan} is de baansnelheid in meter per seconde (m/s)
- r is de straal in meter (m)
- T is de omlooptijd in seconde (s)
- f is de omloopfrequentie in hertz (Hz)

Rechts in figuur 10 zie je dat bij een eenparige cirkelbeweging hoek α met een constante snelheid verandert. Een volledige cirkel wordt in de omlooptijd T doorlopen. Omdat een volledige cirkel gelijk is aan 2π radialen vinden we voor de **hoeksnelheid ω**:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

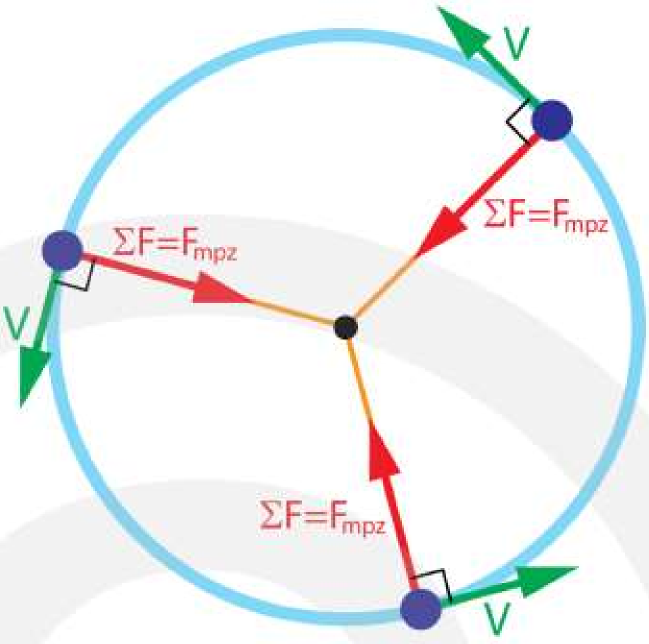
- ω is de hoeksnelheid in radiaal per seconde (rad/s)
- T is de omlooptijd in seconde (s)
- f is de omloopfrequentie in hertz (Hz)

Vergelijken we de formules van de baansnelheid en de hoeksnelheid dan vinden we:

$$v_{baan} = \omega \cdot r$$

Middelpuntzoekende kracht

Om de richting van de snelheid te veranderen is een resulterende kracht nodig. Zonder resulterende kracht blijven zowel de grootte als de richting van de snelheid constant. Bij een eenparige cirkelbeweging verandert de grootte van de snelheid niet maar de richting wel. De resulterende kracht die wel de richting maar niet de grootte van de snelheid verandert moet steeds loodrecht op de richting van de snelheid staan, en dus loodrecht op de baan. Dit kan alleen als de baan cirkelvormig is en ΣF voortdurend naar het middelpunt van deze cirkel is gericht.



Figuur 11 Bij een eenparige cirkelbeweging wordt er een resulterende kracht ΣF uitgeoefend waardoor de richting van de snelheid steeds verandert.

Omdat bij een eenparige cirkelbeweging ΣF steeds naar het middelpunt van de cirkelbaan wijst wordt dit de **middelpuntzoekende kracht F_{mpz}** genoemd.

$$\text{eenparige cirkelbeweging}: \quad \Sigma F = F_{mpz}$$

Bij een eenparige cirkelbeweging verandert de richting van ΣF voortdurend maar de grootte van ΣF is constant. Voor de grootte van $\Sigma F = F_{mpz}$ geldt:

$$\Sigma F = F_{mpz} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

- F_{mpz} is de middelpuntzoekende kracht in newton (N)
- m is de massa in kilogram (kg)
- v is de baansnelheid in meter per seconde (m/s)
- r is de straal in meter (m)

Omdat $\Sigma F = m{\cdot}a$ kunnen we voor de middelpuntzoekende versnelling schrijven:

$$a_{mpz} = \frac{v^2}{r}$$

- a_{mpz} is de middelpuntzoekende versnelling (m/s^2)
- v is de baansnelheid in meter per seconde (m/s)
- r is de straal in meter (m)

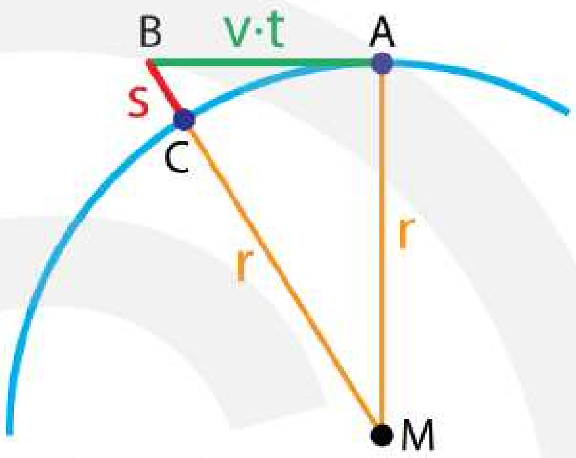
$v = \omega \cdot r$ invullen geeft: $a_{mpz} = \omega^2 \cdot r$ en $\Sigma F = F_{mpz} = m \cdot \omega^2 \cdot r$

BEWIJS (voor de liefhebber)

De formule voor de middelpuntzoekende versnelling: $a_{mpz} = v^2/r$ is in 1659 afgeleid door Christiaan Huygens (Nederland, 1629 – 1695). In 1673 publiceert hij deze formule in: *De vi centrifuga* ("over de middelpuntvliedende kracht"). Newton maakt later gebruik van deze formule om zijn mechanica verder te ontwikkelen.

Hieronder het bewijs dat $a_{mpz} = \frac{v^2}{r}$.

Zie figuur 12



Figuur 12

- een voorwerp bevindt zich op plaats A met snelheid v
- als er geen kracht werkt bevindt het voorwerp zich na t seconde op plaats B
- afstand AB is $v \cdot t$
- de afstand BM noemen we ℓ: $\ell = r + s$
- pythagoras: $\ell = \sqrt{r^2 + (v \cdot t)^2} \rightarrow \ell = r \cdot \sqrt{1 + \frac{(v \cdot t)^2}{r^2}}$
- als t klein is geldt: $\frac{(v \cdot t)^2}{r^2} << 1$
- benadering: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ als $x << 1$
- $\ell \approx r \cdot \left(1 + \frac{(v \cdot t)^2}{2 \cdot r^2}\right) \rightarrow \ell \approx r + \frac{v^2 \cdot t^2}{2 \cdot r}$
- hieruit volgt: $s = \ell - r = \frac{v^2 \cdot t^2}{2 \cdot r}$
- invullen: $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$
- $\frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{v^2 \cdot t^2}{2 \cdot r} \rightarrow a = \frac{v^2}{r}$

11.3 Horizontale cirkelbeweging

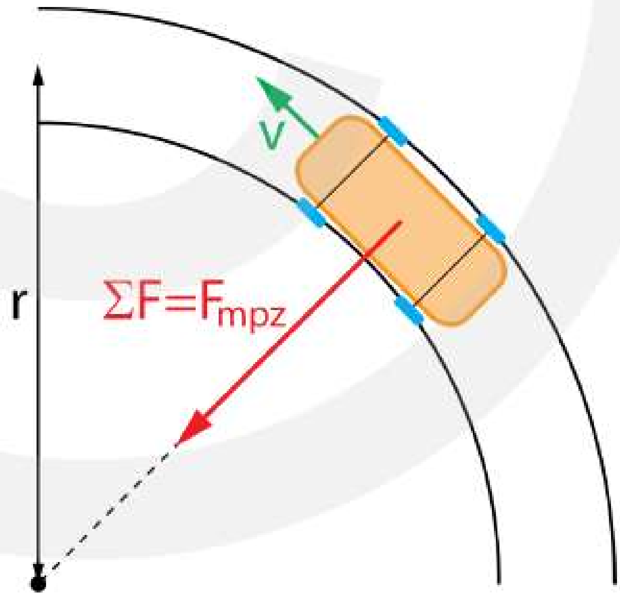
Een bocht maken

Om een bocht te kunnen maken moet er een kracht worden uitgeoefend. Is de grootte van deze kracht constant én is de richting van deze kracht steeds loodrecht op de richting van de snelheidsvector, dan krijgt het voorwerp een cirkelbaan, waarbij de grootte van de snelheid niet verandert.

Als voorbeeld nemen we een trein die een bocht maakt. Zonder resulterende kracht rijdt de trein met een constante snelheid in een rechte lijn. Omdat de rails in een bocht is gelegd oefenen de wielen een kracht op de rails uit. Vanwege de 3e wet van Newton $F_{A \to B} = -F_{B \to A}$ oefenen de rails een tegenovergestelde kracht op de wielen uit. Deze kracht van de rails op de wielen is de zijwaarts gerichte resulterende kracht die ervoor zorgt dat de trein een bocht maakt.

Als de bocht in de rails cirkelvormig is én als de trein een constante snelheid heeft is de zijwaartse kracht constant en staat hij steeds loodrecht op de snelheidsvector. In dat geval geldt:

$$F_{zijwaarts} = \Sigma F = F_{mpz} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$



Figuur 13 Om een trein een bocht te laten nemen moeten de rails een zijwaartse kracht op de wielen uitoefenen. $F_{zijwaarts} = \Sigma F = F_{mpz}$

Voor een auto geldt hetzelfde als voor een trein. Het verschil is dat niet de rails maar de weg de zijwaartse kracht uitoefent. Om een bocht te maken draai je het voorwiel scheef. Door de schuifwrijving oefenen de voorbanden een kracht op de weg uit. Vanwege de 3e wet van Newton $F_{A \to B} = -F_{B \to A}$ oefent de weg een tegengestelde kracht op de banden uit. Deze kracht van de weg op de banden is de zijwaarts gerichte resulterende kracht die ervoor zorgt dat de auto een bocht maakt.

VOORBEELD auto in een bocht

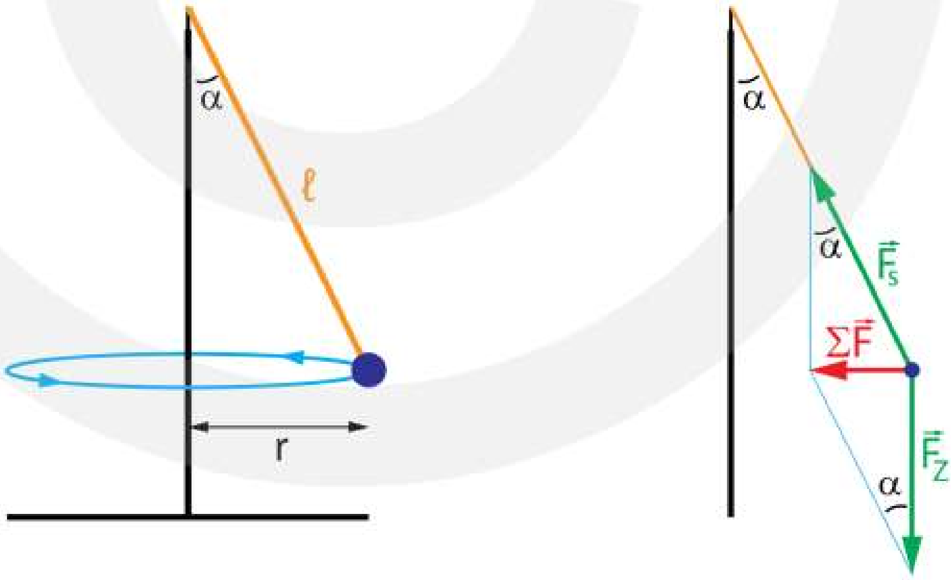
Een auto met een massa van 1500 kg moet op een glad wegdek een bocht nemen met een straal van 20 m. De maximale zijwaartse wrijvingskracht die banden op het wegdek kunnen uitoefenen is 7200 N.

Bereken de maximale snelheid waarmee de auto de bocht kan nemen.

- $m = 1500\,\text{kg}$ | $r = 20\,\text{m}$ | $F_{\text{zijwaarts}} = 7200\,\text{N}$ | $v = \ldots\,\text{m/s}$
- $F_{\text{zijwaarts}} = \Sigma F = F_{\text{mpz}} = \dfrac{m \cdot v^2}{r}$
- $7200 = \dfrac{1500 \cdot v^2}{20} \;\rightarrow\; v^2 = 96$
- $v = \sqrt{96} = 9{,}8\,\text{m/s} \quad (= 35\,\text{km/h})$

Een cirkelslinger

Bij een cirkelslinger voert een voorwerp aan een touw een cirkelbeweging uit. Zie figuur 14 links. Op het voorwerp werken de zwaartekracht F_Z en de spankracht F_S. In figuur 14 rechts zijn de krachten getekend.



Figuur 14 Een cirkelslinger. In de figuur rechts zijn de krachten getekend.

Omdat het voorwerp geen verticale versnelling heeft geldt dat de y-component van F_S gelijk is aan F_Z. Hieruit concluderen we: $\cos\alpha = \dfrac{F_z}{F_s} \;\rightarrow\; F_s = \dfrac{F_z}{\cos\alpha}$

$$F_s = \frac{F_z}{\cos\alpha}$$

Uit figuur 14 rechts kunnen we ook een formule voor de resulterende kracht afleiden:

$\tan\alpha = \frac{\Sigma F}{F_z} \quad \rightarrow \quad \Sigma F = F_z \cdot \tan\alpha$. En omdat het voorwerp een cirkelbaan met constante snelheid doorloopt vinden we:

$$F_{mpz} = \Sigma F = F_Z \cdot \tan\alpha$$

Voor de snelheid waarmee de cirkelbaan wordt doorlopen geldt:

$$v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan\alpha}$$

– v is de snelheid waarmee de bocht wordt genomen (m/s)
– r is de straal van de bocht in meter (m)
– α is de hoek van de helling in graden (º)

BEWIJS

- $F_{mpz} = \Sigma F = m \cdot g \cdot \tan\alpha$ en $F_{mpz} = \frac{m \cdot v^2}{r}$
- $\frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g \cdot \tan\alpha$ *(massa wegstrepen)*
- $\frac{v^2}{r} = g \cdot \tan\alpha \quad \rightarrow \quad v^2 = r \cdot g \cdot \tan\alpha \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan\alpha}$

We hebben nu twee formules voor de snelheid $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ en $v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan\alpha}$ die we kunnen combineren om een formule voor de omlooptijd te vinden:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g \cdot \tan\alpha}}$$

– T is de omlooptijd in seconde (s)
– r is de straal van de cirkelbaan in meter (m)
– g is de valversnelling in meter per seconde kwadraat (m/s^2)
– α is de hoek van de cirkelslinger in graden (º)

Als we bovenstaande formule vergelijken met die van een gewone slinger dan vinden we voor kleine hoek α bij benadering dezelfde formule.

Slinger: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ *(geldt alleen voor kleine hoek α)*

Cirkelslinger: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \cos\alpha}{g}}$ *(geldt altijd)*

BEWIJS

- uit figuur 14 volgt: $\sin\alpha = \dfrac{r}{\ell} \quad \rightarrow \quad r = \ell \cdot \sin\alpha$
- invullen geeft: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\ell \cdot \sin\alpha}{g \cdot \tan\alpha}}$
- gebruik: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\ell \cdot \cos\alpha}{g}}$
- MERK OP: als α klein is geldt $\cos\alpha \approx 1$ en worden de formules gelijk

VOORBEELD cirkelslinger versus gewone slinger

Een cirkelslinger met een lengte van 1,0 m voert een cirkelbeweging uit met een straal van 0,10 m. Zie figuur 14.

Bereken de omlooptijd T van de cirkelslinger.

- $\ell = 1{,}0\ \text{m} \quad | \quad r = 0{,}10\ \text{m} \quad | \quad T = \ldots\ \text{s}$
- $\sin\alpha = \dfrac{r}{\ell} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \dfrac{0{,}10}{1{,}0} \quad \rightarrow \quad \alpha = 5{,}739^\circ$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\ell \cdot \cos\alpha}{g}}$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{1 \cdot \cos 5{,}739}{9{,}81}} \quad \rightarrow \quad T = 2{,}001 = 2{,}0\ \text{s}$

Bereken de slingertijd T van een gewone slinger.

- $\ell = 1{,}0\ \text{m} \quad | \quad T = \ldots\ \text{s}$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$
- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{1{,}0}{g}} \quad \rightarrow \quad T = 2{,}006 = 2{,}0\ \text{s}$
- MERK OP: omdat hoek α klein is (5,7°) is de omlooptijd van de cirkelslinger vrijwel gelijk aan de slingertijd

Een hellende bocht

De formules die we hebben gevonden voor een cirkelslinger gelden ook bij het nemen van een bocht met een helling. In figuur 15 zie je zo'n hellende bocht bij een fietspiste en bij een racecircuit.

Figuur 15 In de weg wordt een hellende bocht gemaakt, waardoor de bocht met een grotere snelheid kan worden genomen.

VOORBEELD auto in een hellende bocht

Een auto met een massa van 1500 kg neemt een hellende bocht met een straal van 50 m. De zijwaartse wrijvingskracht van de banden op weg verwaarlozen we. De helling in de bocht heeft een hoek van 60 graden.

Bereken de snelheid waarmee de auto de bocht moet nemen.

- $m = 1500\,\text{kg}$ | $r = 50\,\text{m}$ | $\alpha = 60^\circ$ | $v = \ldots\text{m/s}$
- $v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan\alpha}$
- $v = \sqrt{50 \cdot 9{,}81 \cdot \tan 60} = 29{,}147 = 29\,\text{m/s}$ *(105 km/h)*
- MERK OP: de massa van de auto heeft geen invloed

De snelheid waarmee de hellende bocht wordt genomen hangt dus af van de straal r en van hoek α. Is de snelheid kleiner dan $\sqrt{r \cdot g \cdot \tan\alpha}$, dan glijdt de auto langs de helling naar beneden. Bij een grotere snelheid glijdt hij langs de helling omhoog. Als de auto niet met de juiste snelheid door een hellende bocht gaat is een wrijvingskracht tussen de banden en de weg nodig om te voorkomen dat de auto omlaag of omhoog glijdt.

Hellende bocht nemen versus langs een helling bewegen

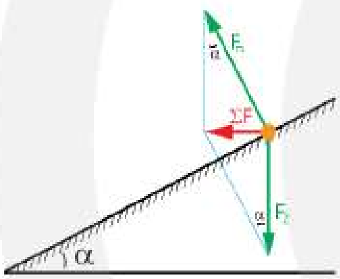
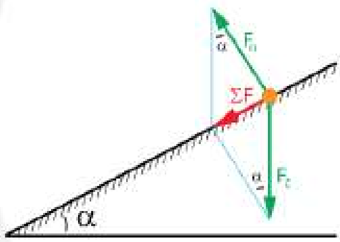
In het hoofdstuk "Kracht" hebben we ons beziggehouden met hellingen waarlangs je kunt bewegen. In dit hoofdstuk kijken we naar een hellende bocht, waarbij je op gelijke hoogte blijft. In beide gevallen is de zwaartekracht recht omlaag en staat de normaalkracht loodrecht op de helling.

Het verschil tussen deze situaties is de grootte van de normaalkracht. Bij het nemen van een hellende bocht is er geen versnelling omlaag of omhoog. De verticale component van de normaalkracht is in dit geval even groot als de zwaartekracht. Zie figuur 14 rechts ($F_s = F_n$). De normaalkracht is dus groter dan de zwaartekracht.

Ga je van een helling naar beneden dan is er een versnelling omlaag. De verticale component van de normaalkracht is nu kleiner dan de zwaartekracht.

Zowel bij een hellende bocht als bij een helling naar beneden geldt: $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_Z + \vec{F}_n$ en omdat F_n bij een hellende bocht groter is dan bij het naar beneden gaan heeft $\Sigma\vec{F}$ in beide situaties een andere richting. Bij een hellende bocht is $\Sigma\vec{F}$ horizontaal en bij een helling afgaan is $\Sigma\vec{F}$ gericht langs de helling.

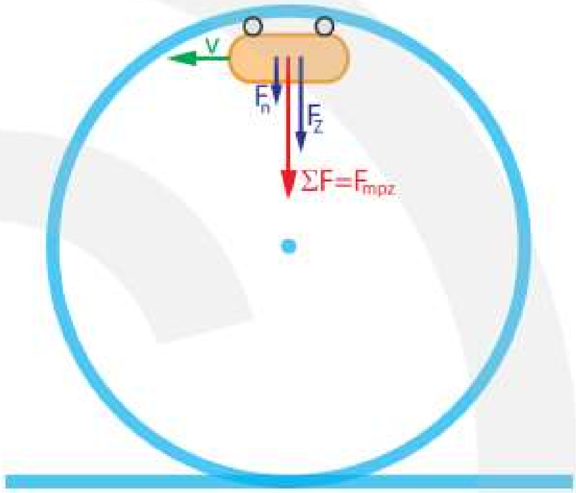
In onderstaand overzicht zie je de verschillen tussen een hellende bocht nemen en langs een helling bewegen.

Een hellende bocht nemen	**Langs een helling bewegen**	**Opmerkingen**
		ΣF heeft een andere richting: – horizontaal bij een hellende bocht – langs de helling bij een beweging langs de helling
$\Sigma F = F_Z \cdot \tan\alpha$	$\Sigma F = F_Z \cdot \sin\alpha$	Voor kleine hoeken zijn sin α en tan α vrijwel gelijk aan elkaar.
$F_n = \dfrac{F_Z}{\cos\alpha}$	$F_n = F_Z \cdot \cos\alpha$	Hellende bocht → $F_n > F_Z$ Langs een helling → $F_n < F_Z$

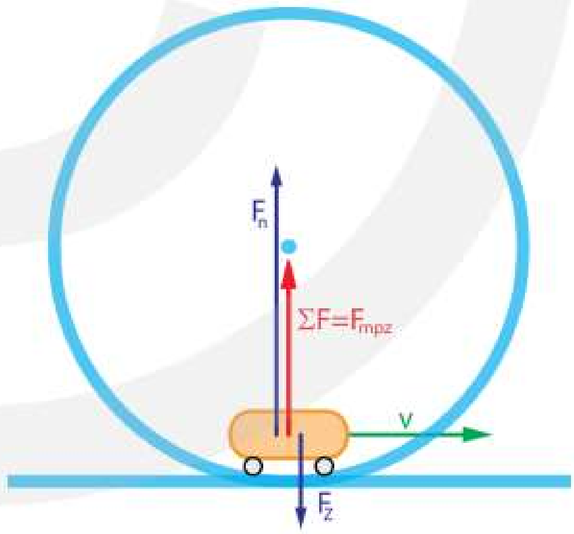
11.4 Verticale cirkelbeweging

Een looping

Om een treintje een looping te laten maken is een middelpuntzoekende kracht nodig. Deze kracht wordt geleverd door de zwaartekracht plus de normaalkracht. De zwaartekracht wordt door de aarde uitgeoefend en de normaalkracht door de rails.



Figuur 16 Bovenin de looping hebben F_Z en F_n dezelfde richting. Er geldt:
$\Sigma F = F_{mpz} = F_n + F_Z$



Figuur 17 Onderin de looping zijn F_Z en F_n tegengesteld gericht. Er geldt:
$\Sigma F = F_{mpz} = F_n - F_Z$

Bovenin de looping (figuur 16) hebben de zwaartekracht en de normaalkracht dezelfde richting en geldt:

$$\Sigma F = F_{mpz} = F_n + F_Z$$

Onderin de looping (figuur 17) zijn de zwaartekracht en de normaalkracht tegengesteld gericht en geldt:

$$\Sigma F = F_{mpz} = F_n - F_Z$$

Minimale snelheid

Als je in het treintje zit zonder beugels om je schouders is er een minimale snelheid nodig om zonder uit je stoel te vallen door het hoogste punt te gaan. Bij deze minimale snelheid is de normaalkracht nul en is de zwaartekracht gelijk aan F_{mpz}. Bij een lagere snelheid is de zwaartekracht groter dan F_{mpz}. In dat geval geldt: $\Sigma F > F_{mpz}$. Je maakt dan geen eenparige cirkelbeweging maar een kromlijnige beweging met een versnelling omlaag. Je komt los van je stoel en valt naar beneden met een versnelling van 9,81 m/s^2.

Voor de minimale snelheid in het bovenste punt geldt:

$$v_{min} = \sqrt{r \cdot g}$$

- v_{min} is de minimale snelheid bovenin in meter per seconde (m/s)
- r is de straal van de looping in meter (m)
- g is de valversnelling (9,81 m/s^2)

BEWIJS

- bovenin: $\Sigma F = F_{mpz} = F_n + F_z$ met $F_n = 0$ geeft $F_{mpz} = F_z$
- $m \cdot \frac{v_{min}^2}{r} = m \cdot g \quad \rightarrow \quad v_{min}^2 = r \cdot g$
- $v_{min} = \sqrt{r \cdot g}$

Kleinere snelheid: $v < \sqrt{r \cdot g}$

Als de snelheid kleiner is dan v_{min} zal het deel van F_Z dat groter is dan F_{mpz} ervoor zorgen dat je uit je stoel valt. Beugels om je schouders zijn nodig om dit te voorkomen. De beugels oefenen het verschil in kracht uit: $F_{beugels} = F_Z - F_{mpz}$.

Grotere snelheid: $v > \sqrt{r \cdot g}$

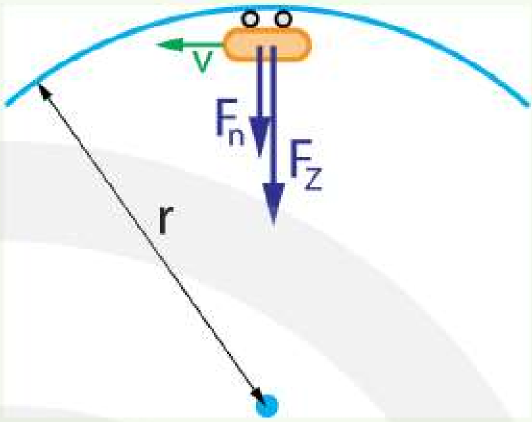
Als de snelheid groter is dan v_{min} is de zwaartekracht niet groot genoeg om de benodigde F_{mpz} te leveren. De stoel waarop je zit oefent een aanvullende kracht naar beneden uit. Beugels om je schouders zijn niet nodig.

VOORBEELD looping

Een treintje in een pretpark maakt een looping waarbij de snelheid bovenin 15 m/s is. De straal van de looping is 10 m. De massa van het treintje met passagiers is 800 kg. Zie figuur 18.

Bereken de normaalkracht bovenin.

- $\Sigma F = F_{mpz} = F_n + F_z$
- $\frac{m \cdot v^2}{r} = F_n + m \cdot g$
- $F_n = \frac{m \cdot v^2}{r} - m \cdot g$
- $F_n = \frac{800 \cdot 15^2}{10} - 800 \cdot 9{,}81$
- $F_n = 1{,}0152 \cdot 10^4 = 1{,}0 \cdot 10^4 \text{ N}$

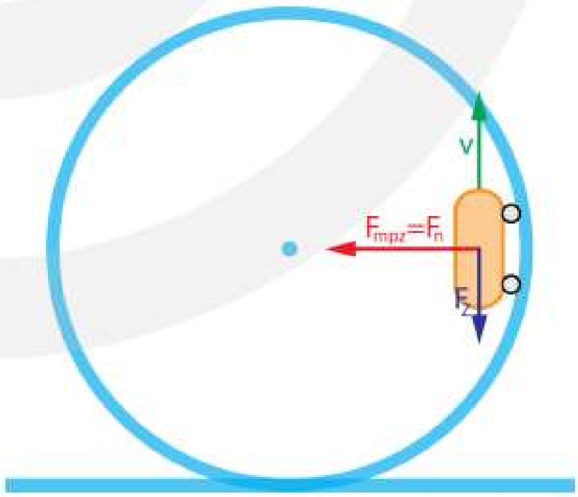


Figuur 18

Looping tussen onder en boven

Als het treintje niet bovenin en niet onderin is staat de resulterende kracht niet loodrecht op de snelheid. De component van ΣF in de richting van de snelheid – de tangentiële component – zorgt voor een verandering van de baansnelheid. De cirkelbeweging is niet eenparig en je mag ΣF daarom niet gelijkstellen aan F_{mpz}.

Precies halverwege het laagste en het hoogste punt staan F_{mpz} en F_Z loodrecht op elkaar. Zie figuur 19. Op deze plaats is de middelpuntzoekende kracht gelijk aan de normaalkracht: $F_{mpz} = F_n$. Weet je de snelheid halverwege dan kun je met Pythagoras de resulterende kracht uitrekenen.



Figuur 19 Halverwege de looping staan F_Z en F_n loodrecht op elkaar.
Er geldt: $F_n = F_{mpz}$

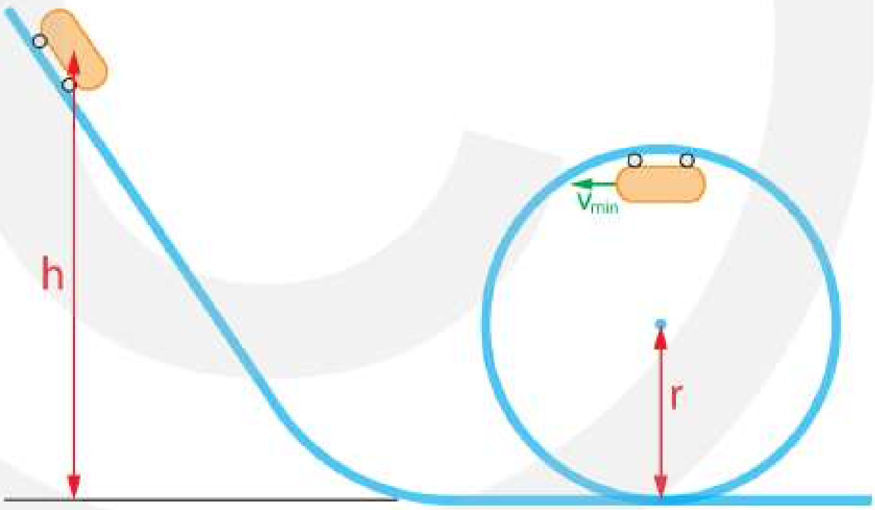
Wet van behoud van energie bij een looping

De wet van behoud van energie komt goed van pas. Bij een looping verandert de baansnelheid van het treintje voortduren, zodat het berekenen van de snelheid met bewegingsvergelijkingen moeilijk is. Door naar de energie te kijken wordt het echter een stuk makkelijker. Stel we willen berekenen op welke hoogte het treintje moet worden losgelaten om bovenin de looping de minimale snelheid $v_{min} = \sqrt{r \cdot g}$ te hebben. Zie figuur 20. We verwaarlozen de wrijvingskrachten. Bij het loslaten heeft het treintje geen snelheid en heeft dan alleen zwaarte-energie. Bovenin de looping heeft het treintje zwaarte-energie én kinetische-energie. De hoogte bovenin de looping is twee keer de straal. Omdat wrijvingskrachten worden verwaarloosd mogen we de energie aan het begin gelijkstellen aan de energie bovenin de looping (eind). Hieruit volgt:

$$h_{min} = 2{,}5 \cdot r$$

BEWIJS

- Begin: $E_{begin} = E_Z = m \cdot g \cdot h$
- Eind: $E_{eind} = E_Z = m \cdot g \cdot 2r + \frac{1}{2} m \cdot v^2$
- $v = v_{min} \rightarrow v^2 = v_{min}^2 = r \cdot g$
- $E_{begin} = E_{eind} \rightarrow m \cdot g \cdot h_{min} = m \cdot g \cdot 2r + \frac{1}{2} m \cdot r \cdot g$ *(massa wegstrepen)*
- $g \cdot h_{min} = g \cdot 2r + \frac{1}{2} r \cdot g \rightarrow h_{min} = 2{,}5 \cdot r$



Figuur 20 De hoogte waarop het treintje wordt losgelaten.

– snelheid onder –

Onderin de looping is de zwaarte-energie van het begin omgezet in kinetische-energie. We kunnen daarom de snelheid onderin de looping uitrekenen en vinden:

$$v_{onder} = \sqrt{5 \cdot r \cdot g}$$

BEWIJS

- $E_{begin} = E_{eind} \rightarrow m \cdot g \cdot h_{min} = \frac{1}{2} m \cdot v_{onder}^2$
- $h_{min} = 2{,}5 \cdot r$
- $2{,}5 \cdot m \cdot g \cdot r = \frac{1}{2} m \cdot v_{onder}^2$ *(massa wegstrepen)*
- $5 \cdot g \cdot r = v_{onder}^2 \rightarrow v_{onder} = \sqrt{5 \cdot r \cdot g}$

– snelheid halverwege –

Halverwege de looping is de zwaarte-energie van het begin omgezet in zwaarte energie én kinetische-energie. We kunnen daarom de snelheid halverwege de looping uitrekenen en vinden:

$$v_{halverwege} = \sqrt{3 \cdot r \cdot g}$$

BEWIJS

- $E_{begin} = E_{eind} \quad \rightarrow \quad m \cdot g \cdot h_{min} = m \cdot g \cdot r + \frac{1}{2} m \cdot v_{halverwege}^2$
- $h_{min} = 2{,}5 \cdot r$
- $2{,}5 \cdot m \cdot g \cdot r = m \cdot g \cdot r + \frac{1}{2} m \cdot v_{halverwege}^2$ *(massa wegstrepen)*
- $1{,}5 \cdot g \cdot r = \frac{1}{2} v_{halverwege}^2 \quad \rightarrow \quad v_{halverwege} = \sqrt{3 \cdot r \cdot g}$

11.5 Gravitatie

De gravitatiewet van Newton

De aanwezigheid van zwaartekracht op aarde is een bijzonder geval van de gravitatiewet van Newton. Newton heeft ontdekt dat massa's elkaar altijd aantrekken. Hij heeft geen idee waarom dit zo is en wil daar verder ook niet over speculeren. In zijn boek *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (filosofie van de natuur op wiskundige grondslag) uit 1687 zet Newton zijn ideeën uiteen.

Volgens Newton trekken twee massa's m_1 en m_2 elkaar altijd aan. Om deze kracht te berekenen moet je de massa's met elkaar vermenigvuldigen en het resultaat delen door het kwadraat van de afstand tussen de zwaartepunten van deze massa's. Vervolgens vermenigvuldig je de uitkomst met het getal G (de gravitatieconstante). De **gravitatiekracht** is de zwakste kracht van de natuurkunde, de andere krachten, zoals de elektrische en magnetische kracht en de krachten in een atoomkern zijn veel groter. Je merkt bijvoorbeeld niet dat een potlood en een gum elkaar aantrekken. Maar als één van de massa's erg groot is, bijvoorbeeld een planeet, wordt de gravitatiekracht duidelijk merkbaar. Hoewel de gravitatiekracht erg klein is bepaalt deze kracht hoe het heelal eruit ziet.

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

- F_G is de gravitatiekracht in newton (N)
- G is de gravitatieconstante: $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$
- m_1 is de massa van voorwerp 1 in kilogram (kg)
- m_2 is de massa van voorwerp 2 in kilogram (kg)
- r is de afstand tussen de zwaartepunten van beide massa's in meter (m)

Gravitatiekracht en zwaartekracht

De kracht die we tot nu toe leerden kennen als de zwaartekracht komt voort uit de gravitatiewet van Newton. Passen we de gravitatiewet toe op een massa m op het oppervlak van de aarde dan vinden we:

$$F_G = m \cdot \left(G \cdot \frac{m_{aarde}}{r_{aarde}^2} \right)$$

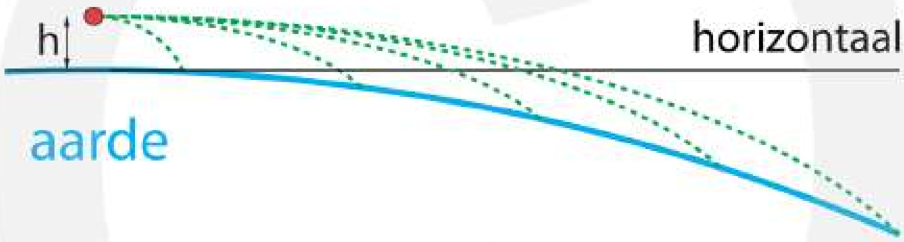
De zwaartekracht is: $F_Z = m \cdot g$ en als je deze formule vergelijkt met de gravitatiewet van Newton vind je een uitdrukking voor de valversnelling. Vul je de waarden voor m_{aarde} en r_{aarde} in dan vind je $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Met deze formule kun je voor ieder hemellichaam de valversnelling aan het oppervlak berekenen.

$$g = \left(G \cdot \frac{m_{aarde}}{r_{aarde}^2} \right)$$

- g is de valversnelling op het oppervlak van de aarde (m s^{-2})
- G is de gravitatieconstante: $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
- m_{aarde} is de massa van de aarde in kilogram (kg)
- r_{aarde} is de straal van de aarde in meter (m)

Ellipsvormige banen

Schiet je op aarde met grote snelheid een kogel weg dan heeft de kogel een baan zoals getekend in figuur 21. Vanwege de kromming van het aardoppervlak verdwijnt de kogel achter de horizon.



Figuur 21
Invloed van de kromming van de aarde op het vallen van een weggeschoten projectiel.

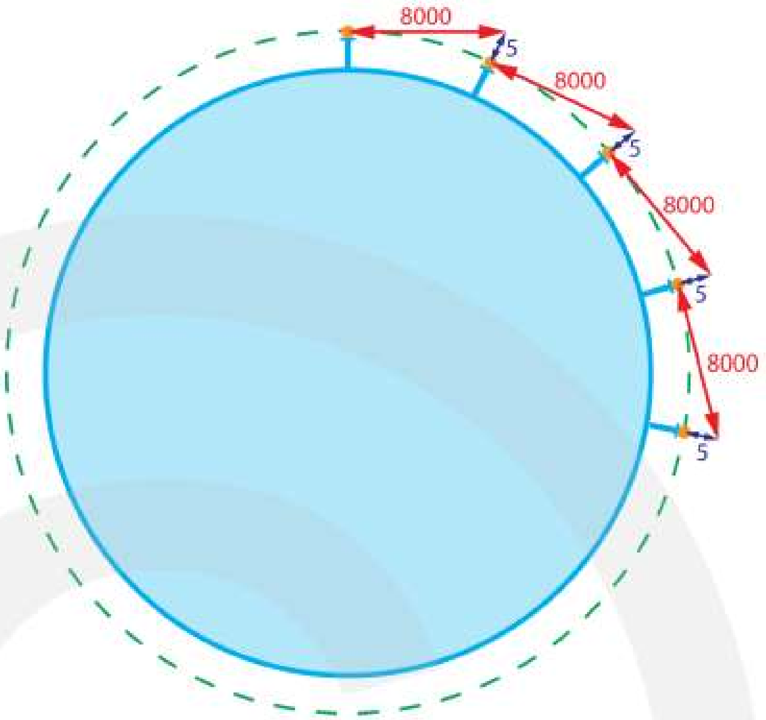
De straal van de aarde is 6378 km. Hieruit kun je berekenen dat na 8,0 km het oppervlak van de aarde 5,0 m onder de horizon ligt. Zie figuur 22 (niet op schaal).

Figuur 22
Kromming van de aarde. Na 8,0 km ligt het oppervlak van de aarde 5,0 m onder de horizon.

We doen nu het volgende gedachtenexperiment. We schieten een kogel van een 10 meter hoge toren horizontaal weg met een snelheid van 8,0 km/s. Uiteraard zal de luchtwrijving bij zo'n hoge snelheid groot zijn, maar in onze redenering houden we daarmee geen rekening. We doen alsof de aarde geen dampkring heeft.

Bij een horizontale snelheid van 8,0 km/s heeft de kogel in één seconde horizontaal 8000 m afgelegd. In één seconde wordt verticaal 5 meter afgelegd: $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

$s = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 1^2 \quad \rightarrow \quad s \approx 5\,\text{m}$. Maar na 8000 meter ligt het aardoppervlak 5 meter onder de horizon. De kogel bevindt zich na één seconde dus nog steeds op 10 meter hoogte. In de volgende seconde herhaalt dit zich, met als resultaat dat de kogel het aardoppervlak nooit zal bereiken, zie figuur 23.

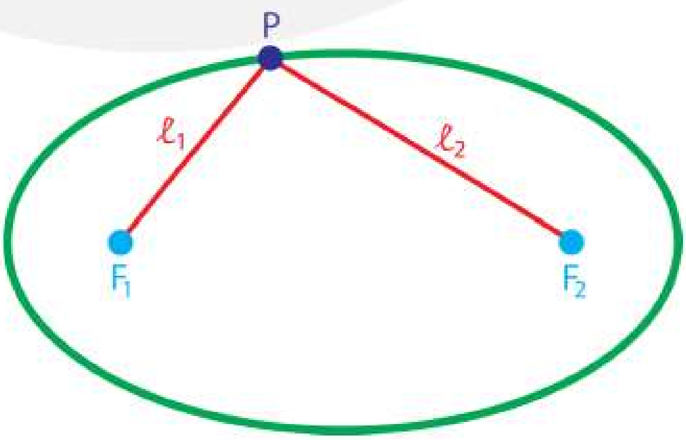


Figuur 23 Zonder luchtweerstand komt een projectiel dat met 8,0 km/s horizontaal is weggeschoten nooit aan bij het aardoppervlak.

Dit theoretische inzicht bracht Newton ertoe de baan van de maan om de aarde op te vatten als het vallen van de maan naar de aarde, zonder ooit het aardoppervlak te bereiken. Ter hoogte van de maan is er geen luchtwrijving. De maan zal dus altijd om de aarde blijven draaien en dit is niets anders dan de valbeweging van ons gedachtenexperiment.

Gravitatiekracht gericht op het middelpunt van de aarde

De gravitatiekracht is gericht naar het middelpunt van de aarde. Schiet je een kogel horizontaal weg dan krijgt de kogel een ellipsvormige baan. Een ellips is een speciale curve. Een punt beweegt in een elliptische baan als de som van de afstanden tot twee vaste punten (de brandpunten) constant is. In figuur 24 zie je een ellips met twee brandpunten F_1 en F_2. De afstanden van P tot deze brandpunten zijn ℓ_1 en ℓ_2. Voor ieder punt P op de ellips heeft: $\ell_1 + \ell_2$ een vaste waarde.



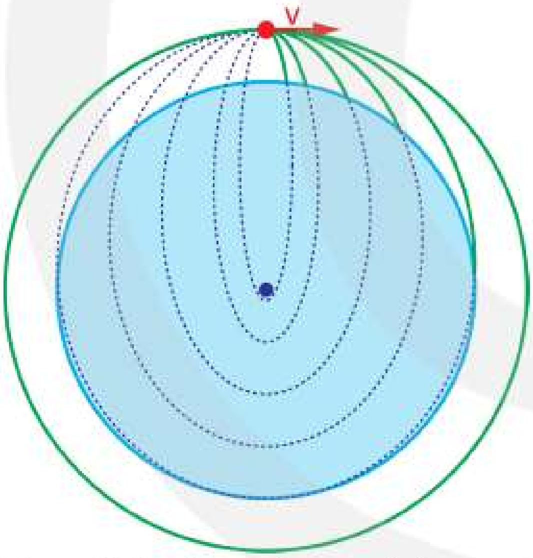
Figuur 24 Een ellips heeft twee brandpunten F_1 en F_2. Voor ieder punt p op de ellips geldt: $\ell_1 + \ell_2 = c$

– Bij een beginsnelheid kleiner dan 8,0 km/s ligt F_1 dichtbij het vertrekpunt. Het brandpunt F_2 bevindt zich in het middelpunt van de aarde.

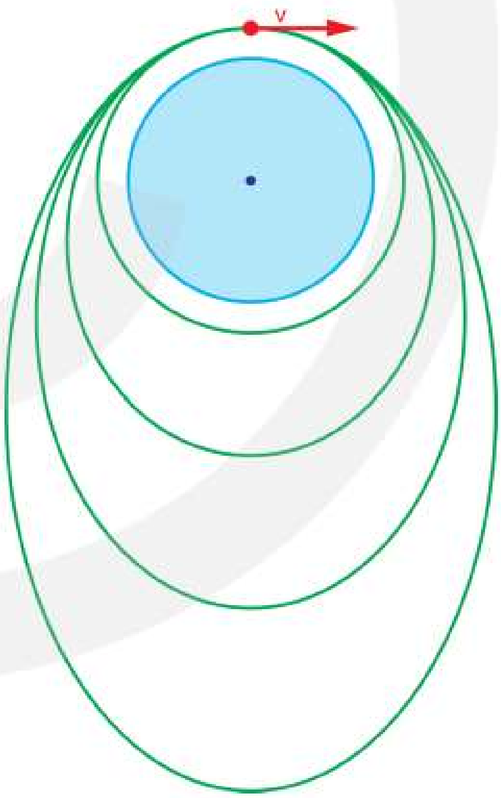
– Bij een beginsnelheid van 8,0 m/s vallen de twee brandpunten samen in het middelpunt van de aarde, $F_1 = F_2$. De ellips is dan een cirkel. Een cirkel is dus een bijzondere ellips.

– Bij een beginsnelheid groter dan 8,0 km/s ligt F_1 ergens in de ruimte buiten de aarde. Brandpunt F_2 bevindt zich is het middelpunt van de aarde.

In de figuren 25 en 26 zie je de baan van een horizontaal weggeschoten projectiel. We maken de horizontale snelheid steeds groter. In figuur 25 is de beginsnelheid kleiner dan 8,0 km/s, zo dat het projectiel met een elliptische baan op aarde valt. De groen doorgetrokken lijnen zijn de banen tot aan het aardoppervlak. De rood gestreepte lijnen zijn de denkbeeldige banen als het projectiel dwars door de aarde zou kunnen bewegen. In figuur 26 is de beginsnelheid groter dan 8,0 km/s. Zonder luchtweerstand zou het projectiel een satelliet van de aarde worden met een elliptische baan om de aarde.



Figuur 25 Horizontaal weggeschoten projectiel met $v_{begin} < 8{,}0$ km/s.



Figuur 26 Horizontaal weggeschoten projectiel met $v_{begin} > 8{,}0$ km/s.

Hoewel gravitatiekracht een ellipsvormige baan geeft, houden we daar bij onze berekeningen geen rekening mee. We gaan uit van cirkelvorige banen en gebruiken de formule voor de middelpuntzoekende kracht. Voorwerp 1 heeft een massa m_1 die veel kleiner is dan massa m_2 van voorwerp 2. Voorwerp 1 voert daarom een cirkelvormige baan uit om voorwerp 2.

In de ruimte werkt alleen de gravitatiekracht zodat geldt:

$$\Sigma F = F_G = F_{mpz} \quad \rightarrow \quad G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = \frac{m_1 \cdot v^2}{r}$$

- F_G is de gravitatiekracht in newton (N)
- G is de gravitatieconstante: $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
- m_1 is de massa van voorwerp 1 dat om voorwerp 2 draait in kilogram (kg)
- m_2 is de massa van voorwerp 2 waaromheen voorwerp 1 draait in kilogram (kg)
- r is de afstand tussen de zwaartepunten van beide massa's in meter (m)
- v is de baansnelheid van voorwerp 1 in meter per seconde (m/s)

Als we bovenstaande formule combineren met $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ vinden we een formule die door Johannes Kepler (Duitsland, 1571 – 1630) is gebruikt om de afstanden van de planeten tot de zon te berekenen en bekend staat als de derde wet van Kepler:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_2}{4\pi^2}$$

BEWIJS

- $F_G = F_{mpz} \quad \rightarrow \quad G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = \frac{m_1 \cdot v_{baan}^2}{r} \quad \rightarrow \quad G \cdot \frac{m_2}{r} = v_{baan}^2$
- $v_{baan} = \frac{2\pi \cdot r}{T} \quad \rightarrow \quad v_{baan}^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2}$
- $G \cdot \frac{m_2}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} \quad \rightarrow \quad \frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_2}{4\pi^2}$

VOORBEELD de massa van de zon

De afstand van de aarde tot het middelpunt van de zon is $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m. De omlooptijd van de aarde om de zon is 365,256 dagen.

Bereken de massa van de zon.

- $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_{zon}}{4\pi^2}$
- $m_{zon} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$
- $m_{zon} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot (365{,}256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg

Geostationaire satellieten

Een geostationaire satelliet heeft een vaste plaats ten opzichte van het aardoppervlak. Omdat de aarde in 24 uur om haar as draait moet zo'n satelliet ook in 24 uur een volledige baan om de aarde afleggen. Verder moet een geostationaire satelliet zich boven de evenaar bevinden, zodat het vlak waarin de satelliet beweegt gelijk is aan het vlak loodrecht op de draaias van de aarde. De straal van de baan van een geostationaire satelliet kunnen we met de 3e wet van Kepler berekenen.

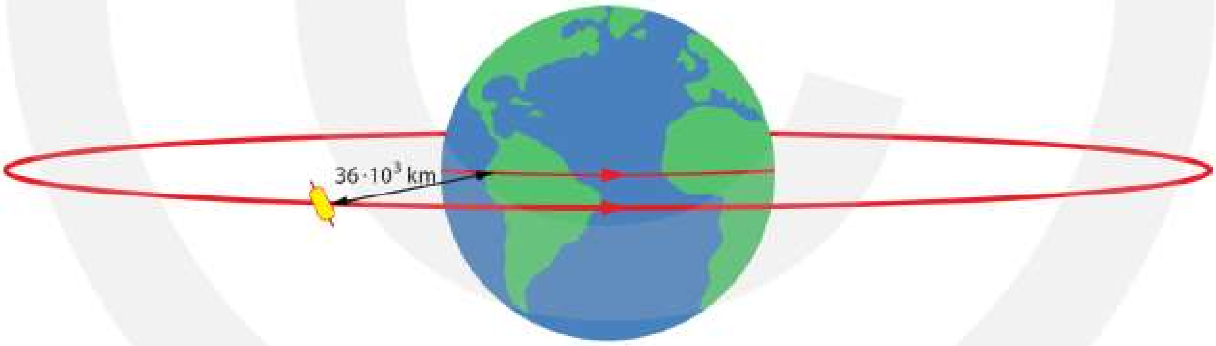
3e wet van Kepler: $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_{aarde}}{4\pi^2}$

$T = 24\ h = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400\ s$ waaruit volgt: $r = 4{,}2237 \cdot 10^7\ m$

Voor de hoogte van een geostationaire satelliet boven het aardoppervlak moet de straal van de aarde (6378 km) van r worden afgetrokken. Zie figuur 27.

$h_{geostationair} = 4{,}2237 \cdot 10^7 - 6{,}378 \cdot 10^6 = 3{,}5859 \cdot 10^7\ m = 35.859\ km$

Geostationaire satellieten worden toegepast voor het uitzenden van televisie en radio signalen. De Europese ASTRA satellieten zenden 2400 digitale televisie en radiosignalen uit die je met een schotelantenne kunt ontvangen. Momenteel zijn er vijf ASTRA satellieten in bedrijf. Ook voor satelliettelefoon worden soms geostationaire satellieten gebruikt.



Figuur 27 Een geostationaire satelliet staat op een vast punt boven de evenaar op een hoogte van 36 duizend kilometer.

Satellieten op lage hoogte

Een satelliet kan ook net buiten de dampkring op zeer lage hoogte rondjes om de aarde draaien. De dampkring heeft een dikte van ongeveer 40 km en op 100 km hoogte is er daarom vrijwel geen luchtweerstand. Omdat 100 km klein is ten opzichte van de straal van de aarde, kunnen we voor de straal van de satellietbaan bij benadering de straal van de aarde invullen.

$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_{aarde}}{4\pi^2}$ met $r = 6{,}378 \cdot 10^6\ m$ volgt $T = 5066\ s$ (1h : 24 min : 26 s)

Gaan we uit van een cirkelvormige baan met straal r dan vinden we voor de snelheid:

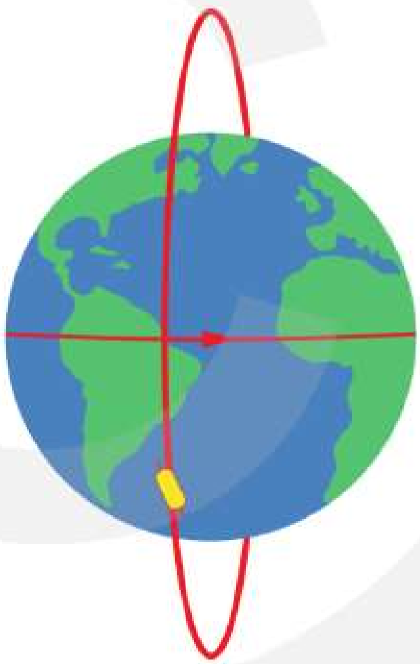
$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \rightarrow v = \frac{2\pi \cdot 6{,}378 \cdot 10^6}{5066} \rightarrow v = 7{,}91 \cdot 10^3\ m/s$

Deze snelheid van ongeveer 8 km/s zijn we eerder tegengekomen, toen we de kromming van het aardoppervlak in rekening brachten bij een horizontaal weggeschoten projectiel.

Satellieten met polaire banen

Satellieten met polaire banen draaien om de Noord- en Zuidpool. Ze staan niet op een vaste plaats boven het aardoppervlak maar hebben een lage baan van bijvoorbeeld 400 km hoogte. Deze satellieten worden gebruikt om het aardoppervlak te observeren. Weersatellieten en spionagesatellieten horen tot deze categorie.

De baansnelheid van een polaire satelliet is hoog en zijn omlooptijd is klein. Ze draaien rondjes om de aarde in iets meer dan 1,5 uur en terwijl ze dat doen draait de aarde onder hen door. In een dag beweegt de satelliet 16 keer om de aarde, waarbij de aarde steeds 360/16 = 22,5 graden om haar as is gedraaid. Zie figuur 28.

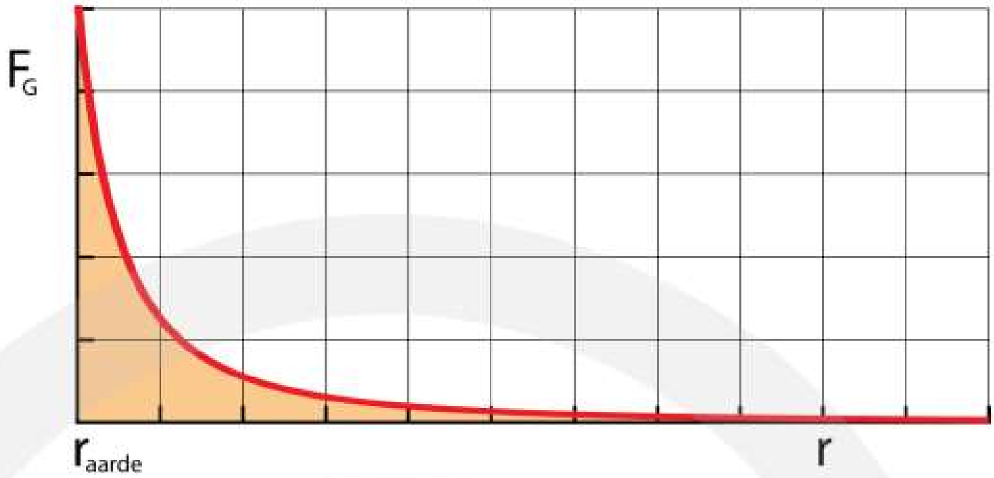


Figuur 28 Een polaire satelliet draait met een korte omlooptijd om de polen. De aarde draait er onder, zodat het hele aardoppervlak kan worden waargenomen.

Gravitatie-energie

In een eerder hoofdstuk zijn we de zwaarte-energie tegengekomen: $E_Z = m \cdot g \cdot h$. Deze formule geldt alleen bij de oppervlakte van de aarde. Op grote hoogte is de valversnelling kleiner dan 9,81 m/s^2 en kan de formule voor de zwaarte-energie dus niet meer worden gebruikt. In plaats van de zwaarte-energie gebruiken we de **gravitatie-energie**, die gebaseerd is op de gravitatiewet van Newton en daarom altijd mag worden gebruikt.

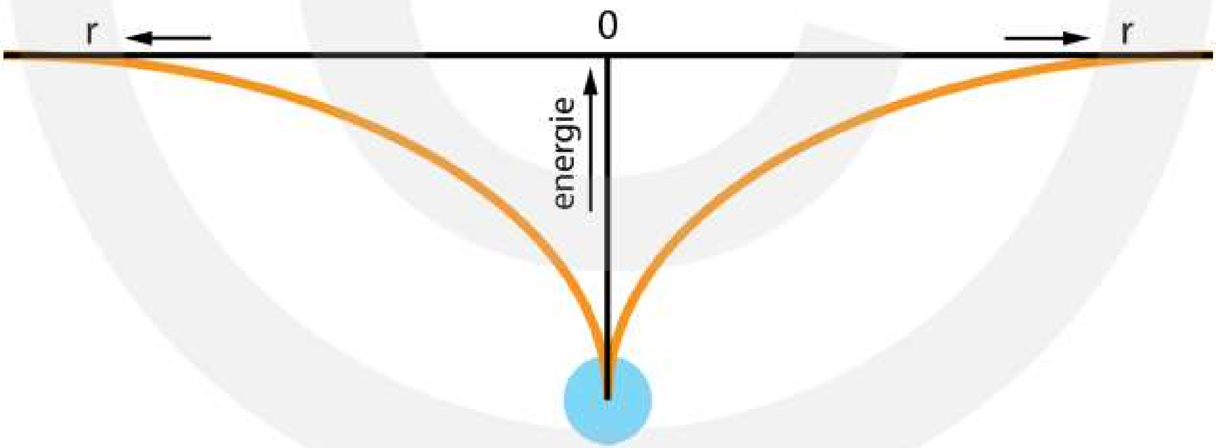
De gravitatie-energie van een voorwerp is gelijk aan de arbeid die nodig is om dit voorwerp vanaf het aardoppervlak tot hoogte h te verplaatsen. Voor deze arbeid geldt: $W = F_G \cdot s$. De gravitatiekracht wordt kleiner wordt als s toeneemt. Om de arbeid te berekenen moet je daarom de oppervlakte berekenen onder een (F_G, r)-grafiek, waarbij r de afstand is tot het middelpunt van de aarde. Zie figuur 29.



Figuur 29
Gravitatiekracht als functie van de afstand.

Bij berekeningen met zwaarte-energie stellen we meestal de hoogte h gelijk aan nul op het oppervlak van de aarde. De zwaarte-energie is dan nul op het aardoppervlak en wordt groter als h toeneemt.

Bij berekeningen met gravitatie-energie is het gebruikelijk om de situatie te beschrijven vanuit de ruimte op zeer grote afstand van de aarde. De gravitatie-energie op oneindig grote afstand van de aarde wordt op 0 gesteld. Een voorwerp op het oppervlak van de aarde bevindt zich in een energieput. De energie in deze put heeft een negatieve waarde. Zie figuur 30.



Figuur 30 De gravitatie-energie op oneindig grote afstand van de aarde wordt op nul gesteld. Op het oppervlak van de aarde bevindt een voorwerp zich in een energieput.

Met deze afspraak voor het nulpunt geldt voor de **gravitatie-energie**:

$$E_G = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

- E_{grav} is de gravitatie-energie in joule (J)
- G is de gravitatieconstante: $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
- m_1 is de massa van voorwerp 1 in kilogram (kg)

– m_2 is de massa van voorwerp 2 in kilogram (kg)
– r is de afstand tussen de zwaartepunten van beide massa's in meter (m)

BEWIJS (voor de liefhebber)

- bereken de integraal $W = \int_r^{\infty} F_G \, dr$
- $W = \int_r^{\infty} G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \, dr \rightarrow W = G \cdot m_1 \cdot m_2 \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} \, dr$
- de primitieve van $\frac{1}{x^2}$ is $\frac{-1}{x}$
- $W = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_r^{\infty} \rightarrow W = G \cdot m_1 \cdot m_2 \left(0 - \frac{-1}{r}\right)$
- $W = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$
- $W = E_{G\,eind} - E_{G\,begin} \rightarrow G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r} = 0 - E_{G\,begin} \rightarrow E_{G\,begin} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$

VOORBEELD geostationaire satelliet

Een geostationaire satelliet moet vanaf de oppervlakte van de aarde in een geostationaire baan op een hoogte van 35.859 km worden gebracht. De raket wordt gelanceerd vanaf de evenaar en de satelliet heeft een massa van 1000 kg.

Bereken hoeveel energie hiervoor nodig is.

- BEGIN satelliet op het oppervlakte van de aarde bij de evenaar
- $r = 6{,}378 \cdot 10^6$ m
- $m_1 = 1000$ kg | $m_2 = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg | $r = 6{,}378 \cdot 10^6$ m | $E_G = \ldots$ J
- $E_G = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$
- $E_G = -6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}378 \cdot 10^6} = -6{,}24916 \cdot 10^{10}$ J

- EIND satelliet op 35.866 km boven de evenaar
- $r = 6{,}378 \cdot 10^6 + 3{,}5859 \cdot 10^7 \text{ m} = 4{,}2237 \cdot 10^7$ m
- $E_G = -6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{4{,}2237 \cdot 10^7} = -9{,}43654 \cdot 10^9$ J
- VERSCHIL
- $E_{G\,eind} - E_{G\,begin} = -9{,}43654 \cdot 10^9 - (-6{,}24916 \cdot 10^{10}) = 5{,}30551 \cdot 10^{10} = 5{,}31 \cdot 10^{10}$ J

Ontsnappingssnelheid

Stel we schieten een projectiel vanaf de oppervlakte van de aarde in de ruimte. Zoals we hebben gezien is er een snelheid van 8,0 km/s nodig om het projectiel in een baan om de aarde te brengen. Bij een snelheid groter dan 8,0 km/s wordt de ellipsvormige baan steeds langwerpiger. Er is een snelheid waarbij een projectiel niet meer terugkeert op aarde. Deze snelheid heet de **ontsnappingssnelheid**. Als de beginsnelheid groter is dan de ontsnappingssnelheid raakt het los van de aarde en komt het niet meer terug.

Om de ontsnappingssnelheid te vinden berekenen we de arbeid die nodig is om een voorwerp met massa m_1 vanaf het oppervlak van de aarde oneindig ver in de ruimte te brengen. We gebruiken de formule voor de gravitatie-energie. In het begin bevindt het voorwerp zich op de oppervlakte van de aarde:

$$E_{G\,begin} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_{aarde}}{r_{aarde}} \quad | \quad E_{G\,eind} = 0 \quad \rightarrow \quad E_{G\,eind} - E_{G\,begin} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_{aarde}}{r_{aarde}}$$

De kinetische energie waarmee het projectiel wordt weggeschoten moet minimaal gelijk zijn aan dit verschil in energie:

$$E_K \geq E_{G\,eind} - E_{G\,begin} \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2} m_1 \cdot v^2 \geq G \cdot \frac{m_1 \cdot m_{aarde}}{r_{aarde}}$$

Voor de minimaal benodigde snelheid geldt:

$$\tfrac{1}{2} m_1 \cdot v_{ontsnap}^2 = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_{aarde}}{r_{aarde}} \quad \rightarrow \quad v_{ontsnap}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot m_{aarde}}{r_{aarde}}$$

Hieruit volgt:

$$v_{ontsnap} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{r}}$$

- $v_{ontsnap}$ is de ontsnappingssnelheid in meter per seconde (m/s)
- G is de gravitatieconstante: $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
- m is de massa van het hemellichaam in kilogram (kg)
- r is de afstand tot het middelpunt van dit hemellichaam in meter (m)

Vullen we alle gegevens in dan vinden we voor de aarde: $v_{ontsnap} = 11{,}182$ km/s (ongeveer 40000 km/h). De ontsnappingssnelheid wordt bepaald door de verhouding tussen de massa en de straal en is voor ieder hemellichaam anders.

Hemellichaam	**Ontsnappingssnelheid**	
Aarde	11,2	km/s
Maan	2,38	km/s
Jupiter	59,5	km/s
Zon	600	km/s
zwart-gat	meer dan de lichtsnelheid	