

# 20 Biofysica

vwo

## 20.0 Inleiding

### Ontstaan van het leven op aarde

Het leven op aarde is misschien wel het meest verbazingwekkende van alles wat bestaat. Ongeveer 13,8 miljard jaar geleden is het heelal ontstaan en kwamen er sterren, waarin waterstofatomen fuseren tot heliumatomen. Na miljarden jaren heeft een ster het waterstof grotendeels verbruikt en komt hij aan het einde van zijn bestaan. In de laatste fase smelten heliumatomen samen tot koolstofatomen en weer later ontstaan zwaardere elementen, zoals zuurstof en stikstof en tenslotte ijzer. Daarna stopt het fusieproces en houdt de ster op te bestaan. Grote sterren eindigen met een enorme explosie, een supernova, waarbij de temperatuur zo hoog wordt dat de overige elementen van het periodieke systeem worden gevormd. De buitenste laag van de ster, met daarin de gevormde elementen, wordt in de ruimte geschoten en vormt een gasnevel. Het binnenste van de ster wordt samengeperst tot een neutronenster of zwart gat.

De dood van een ster wordt gevolgd door de geboorte van nieuwe sterren. Atomen in een gasnevel trekken elkaar aan, waarbij de dichtheid en de temperatuur toenemen. Op sommige plaatsen wordt de temperatuur zo groot dat waterstofatomen gaan fuseren. Een nieuwe ster, vaak omringt door planeten, is dan geboren. Deze tweede generatie sterren en planeten bestaan niet alleen uit waterstof maar bevatten ook de eerder gevormde elementen.

Ongeveer 4,6 miljard jaar geleden is uit een gasnevel in het sterrenstelsel Melkweg de zon ontstaan met om haar heen acht planeten. De derde planeet, gezien vanaf de zon, is de aarde. Beschouwen we de massa, dan bestaat de aarde uit ijzer (32,1%), zuurstof (30,1%), silicium (15,1%), magnesium (13,9%), zwavel (2,9%), nikkel (1,8%), calcium (1,5%), aluminium (1,4%) en andere elementen (1,2 %).

Op het aardoppervlak is bijzonder veel water aanwezig, waarschijnlijk grotendeels afkomstig van een (ijs-)komeet die op de nog jonge aarde is gebotst. In het water bevinden zich de zes elementen waaruit leven ontstaat: zuurstof, waterstof, koolstof, stikstof, fosfor en zwavel. Het proces waarbij leven ontstaat uit niet levende materie heet **abiogenese**. Hoe dit in zijn werk is gegaan is nog niet goed bekend. Om leven te creëren uit eenvoudige moleculen is het nodig dat deze moleculen bij toeval reageren tot grotere moleculen, **zelforganisatie**, dat deze grotere moleculen hun ontstaan versnellen, **autokatalyse**, en dat deze moleculen de eigenschap hebben zichzelf te kopiëren, **zelfrepletie**. Dit alles heeft tijd nodig, maar zo'n 3,5 miljard jaar geleden, dus 1 miljard jaar na het ontstaan van de aarde, is er leven op aarde.

De eerste levensvormen zijn eenvoudige organisaties van moleculen. Gaandeweg wordt het al maar complexer. Na ongeveer vier miljard jaar ontwikkeling ontstaan de organismen zoals wij die nu kennen en waarvan we zelf deel uitmaken.

## Wetenschappelijk onderzoek van het leven

In alle culturen hebben mensen het leven op aarde benaderd vanuit religieuze veronderstellingen. Een bovennatuurlijke macht zou betrokken zijn bij de creatie van het leven. Nog steeds beschouwen vele mensen het leven als bovennatuurlijk. Voor hen is er een fundamenteel onderscheid tussen de dode en de levende natuur. De oudste historische bronnen waarin deze opvatting wordt bestreden zijn van **Anaximander** (610 – 546 v.Chr.), een Griekse natuurfilosoof uit de stad Milete aan de Turkse kust. Over zijn leven en werk is weinig bekend. Slechts één fragment van zijn geschriften is bewaard gebleven. Zijn boek *Over de natuur* is verloren gegaan. Uit andere bronnen krijgen we toch een beeld van zijn opvattingen. Anaximander introduceert de natuurwetenschappelijke manier van denken. Alles in de natuur wordt bepaald door wetten. Deze wetten schrijven voor in welke volgorde gebeurtenissen elkaar noodzakelijk opvolgen. Iedere gebeurtenis heeft een oorzaak. Verder stelt hij dat alle dingen zijn afgeleid van één oorsprong of principe. Anaximander past zijn manier van denken toe op alles, dus ook op de levende natuur. Volgens hem zijn dieren ooit in de zee ontstaan en later op het land gekomen. Ook mensen zijn voortgekomen uit zeedieren.

De wetenschappelijke manier van denken wordt door **Hippocrates** (460 – 370 v. Chr.) voor het eerst toegepast op de geneeskunde. Hij zoekt natuurlijke in plaats van bovennatuurlijke oorzaken voor ziekten. Op basis van lichamelijke symptomen stelt hij een diagnose op en schrijft hij een behandeling voor. Hij legt sterke nadruk op hygiëne en een gezonde levensstijl. Gezondheid hangt volgens hem af van de juiste balans tussen de lichaamssappen.

**Aristoteles** (384 – 322 v.Chr.) kent het werk van Anaximander en bouwt erop voort. Als zoon van een arts gaat hij op zeventienjarige leeftijd naar Athene om aan de academie van Plato te studeren. Hij verdiept zich in alles en noteert zijn ideeën in honderden documenten, waarvan slechts een kwart bewaard is gebleven. Met zijn systematische manier van werken bouwt hij een volledig wereldbeeld op waarin alles een plaats heeft. Hij schrijft baanbrekende boeken over logica, natuurkunde, biologie, ethiek, esthetiek, poëzie, theater, muziek, psychologie, economie en politiek. Deze boeken worden tot in de derde eeuw na Christus uitvoerig bestudeerd maar raken in Europa volledig uit beeld als het Romeinse rijk ophoudt te bestaan. Alleen in de Arabische landen blijft het werk van Aristoteles als bron van kennis aanwezig. Pas in de twaalfde eeuw komen westerse geleerden weer in contact met Aristoteles en worden zijn boeken uit het Arabisch en later ook uit het Grieks in het Latijn vertaald. Dit wordt gezien als het einde van de middeleeuwen en het begin van een nieuw tijdperk, de renaissance.

In de renaissance is het Grieks wetenschappelijk denken weer helemaal terug. Uitvoerig worden de bronnen bestudeerd. **Galileo Galilei** (Italië, 1564 – 1642) neemt afstand van de Aristotelische natuurkunde en komt met nieuwe inzichten die door **Isaac Newton** (Engeland, 1643 – 1727) worden overgenomen en uitgewerkt tot een

volledig nieuwe natuurkunde. Ook in de geneeskunde wordt de wetenschappelijke methode herontdekt. **Herman Boerhaave** (Nederland, 1668 – 1738) combineert veel wetenschappelijke inzichten en wordt als arts beroemd in heel Europa. In 1735 komt **Carl Linnaeus** (Zweden, 1707 – 1778) naar Nederland om te promoveren in de geneeskunde. Hij wordt beroemd om zijn systematische ordening van de natuur. Ook in de biologie gelden wetten die het verloop van gebeurtenissen bepalen. De ontdekking van de genetica door **Gregor Mendel** (Oostenrijk, 1822 – 1884) is hiervan een goed voorbeeld. Tegelijkertijd onderzoekt **Charles Darwin** (Engeland, 1809 – 1882) het ontstaan van diersoorten. Hij concludeert dat een mechanisme van natuurlijke selectie de reden is dat het leven evolueert van eenvoudige naar complexe levensvormen. Anaximander krijgt na 2500 jaar gelijk.

### Natuurkunde, scheikunde en biologie

In natuurkunde, scheikunde en biologie wordt dezelfde natuurwetenschappelijke methode toegepast. Deze methode gaat uit van waarnemingen. De opvolging van gebeurtenissen wordt niet bepaald door bovennatuurlijke oorzaken maar door wetmatigheden. Het ontdekken van deze wetmatigheden is het doel van wetenschappelijk onderzoek. Deze aanpak is bijzonder succesvol en heeft geleid tot diepgaande kennis, die onze manier van leven mogelijk heeft gemaakt.

In dit hoofdstuk **biofysica** worden natuurkunde en biologie met elkaar in verband gebracht. Om leven te laten ontstaan en in stand te houden is transport van moleculen essentieel. De vorming van nieuwe moleculen vindt vooral plaats in vloeistoffen en gassen, opdat ze daarin met voldoende snelheid kunnen bewegen. De eigenschappen van vloeistoffen en gassen spelen hierbij een cruciale rol. Vandaar de insteek van dit hoofdstuk. Eerst worden vloeistoffen behandeld, daarna gassen. Vanzelfsprekend bevat dit hoofdstuk maar een fractie van wat bekend is over het transport van moleculen. Behalve transport bepaalt het verloop van chemische reacties hoe het leven zich in stand houdt en ontwikkelt. Studie van deze reacties is onderwerp van de **biochemie**.

In de laatste decennia is de kennis over de moleculaire structuur van het leven spectaculair toegenomen. Met name de rol van het DNA-molecuul is uitvoerig bestudeerd. Een grote uitdaging is om levende organismen te creëren uit dode moleculen. Flinkere vorderingen worden hierbij gemaakt, maar we zijn er nog niet. Toch zal dit waarschijnlijk niet lang meer op zich laten wachten. Vanaf dan zullen de dode en de levende natuur voorgoed zijn verenigd.

## 20.1 Vloeistof in rust

### Druk in een vloeistof of gas

Kracht uitgeoefend door een vloeistof of gas is altijd verspreid over een oppervlakte. De hoeveelheid kracht per vierkante meter noemen we de **druk**. Wordt een kracht over een groot oppervlak verspreid, dan is de druk kleiner dan als diezelfde kracht over een klein oppervlak is verspreid.

$$p = \frac{F}{A}$$

- $p$  is de druk in newton per vierkante meter ( $\text{N/m}^2$ ) of in pascal (Pa)
- $F$  is de kracht in newton (N)
- $A$  is de oppervlakte in vierkante meter ( $\text{m}^2$ )

De eenheid van druk is  $\text{N/m}^2$  en is gelijk aan de pascal (Pa).

$$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$$

### De druk in een vloeistof

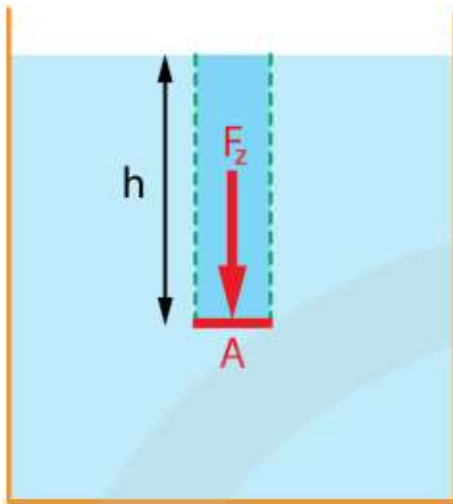
In tegenstelling tot een gas, kan een vloeistof niet worden samengedrukt. De dichtheid van een vloeistof is onafhankelijk van de druk. Daarom kan je van een bepaalde hoeveelheid vloeistof wel de vorm, maar niet het volume veranderen.

**Van een hoeveelheid vloeistof kan de vorm veranderen maar het volume niet.**

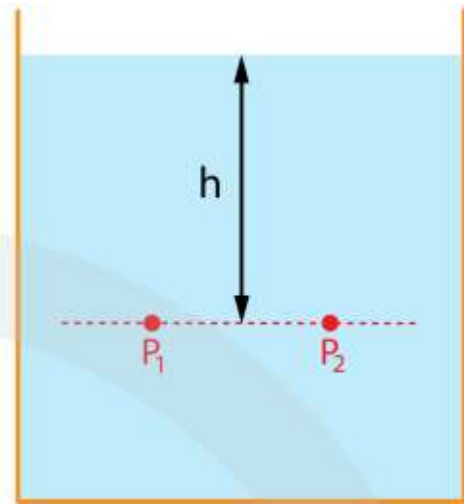
**De dichtheid van een vloeistof is onafhankelijk van de druk.**

De dichtheid van een vloeistof is veel groter dan de dichtheid van een gas. Het verschil is ongeveer een factor 1000. Dit zorgt ervoor dat de zwaartekracht een veel grotere invloed heeft op de druk in een vloeistof dan op de druk in een gas. Bij lucht is een kolom van 40 km nodig om een druk van  $10^5 \text{ N/m}^2$  te geven terwijl bij water een kolom van 10 m hoog evenveel druk geeft. Bij een gas in een vat mogen we daarom de invloed van de zwaartekracht verwaarlozen, maar bij een vloeistof mag dit niet.

In een vloeistof hangt de druk af van de diepte onder het oppervlak. Om de relatie tussen de druk en de diepte te vinden berekenen we de zwaartekracht  $F_z$  op een vloeistofkolom met oppervlakte  $A$  en lengte  $h$ . Zie figuur 1.



**Figuur 1** Druk in een vloeistof op diepte h.



**Figuur 2** De druk op twee plaatsen op dezelfde diepte is even groot.

Voor de vloeistofdruk op een diepte h onder het oppervlak vinden we:

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

- $p$  is de druk ( $\text{N} / \text{m}^2$ ) (Pa)
- $\rho$  is de dichtheid ( $\text{kg} / \text{m}^3$ )
- $g$  is de valversnelling ( $\text{m} / \text{s}^2$ )
- $h$  is de diepte (m)

#### BEWIJS

- $V = A \cdot h$
- $m = \rho \cdot V \rightarrow m = \rho \cdot A \cdot h$
- $F_z = m \cdot g \rightarrow F_z = \rho \cdot A \cdot h \cdot g$
- $p = \frac{F_z}{A} \rightarrow p = \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} \rightarrow p = \rho \cdot g \cdot h$

Aan deze formule kun je zien dat de druk in een vloeistof alleen afhankelijk is van de dichtheid en van de diepte. Op twee punten  $p_1$  en  $p_2$  die zich op dezelfde diepte bevinden heerst dezelfde druk. Zie figuur 2.

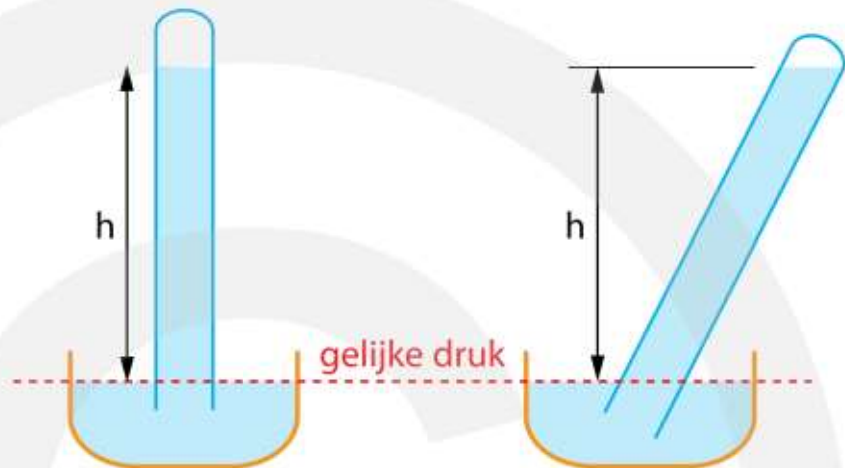
Omdat de dichtheid van een vloeistof niet afhankelijk is van de druk volgt:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

- $\Delta p$  is de verandering van de druk ( $\text{N} / \text{m}^2$ ) (Pa)
- $\rho$  is de dichtheid ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )
- $g$  is de valversnelling ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )
- $\Delta h$  is de verandering van de diepte (m)

Hiervan kunnen we gebruik maken om de luchtdruk te meten. Vul een buisje met kwik en plaats dat omgekeerd in een bakje met kwik, zie figuur 3. Op het kwikoppervlak in het bakje oefent de lucht een druk  $p$  uit. Dezelfde druk wordt uitgeoefend door de kwikkolom. Door de hoogte  $h$  van de kwikkolom te meten kun je de luchtdruk bepalen. De kwikkolom heeft een hoogte van 760 mm, waaruit volgt dat de luchtdruk  $1,0 \cdot 10^5$  Pa is.

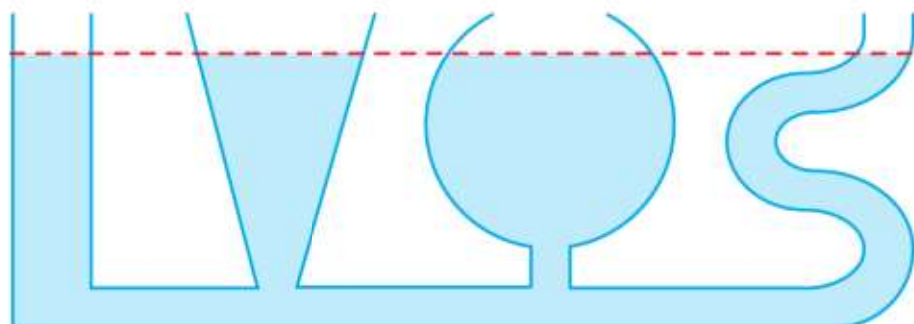
**Figuur 3** Kwikkolom omgekeerd in een bakje met kwik.



Als je de kwikkolom scheefhoudt, zoals in figuur 3 rechts, past hij zich aan, zodat de hoogte hetzelfde blijft. Hieruit blijkt dat in de ruimte boven de kwikkolom geen atomen of moleculen aanwezig zijn, er heerst vacuüm. De methode om luchtdruk te meten met behulp van een kwikkolom is bedacht door Evangelista Torricelli (Italië, 1608–1647). Zijn conclusie dat er boven de kwikkolom een vacuüm aanwezig is leidde destijds tot grote beroering, omdat volgens de natuurkunde van Aristoteles leegte niet kan bestaan. Intussen weten we dat boven de kwikkolom kwikdamp aanwezig is, maar weten we ook dat een ruimte zonder atomen of moleculen weldegelijk kan bestaan.

### Communicerende vaten

De druk in een vloeistof hangt alleen af van de dichtheid en van de diepte. De vorm van het vat doet er niet toe. We kunnen vaten van verschillende vorm vullen met een vloeistof. Als de vloeistof tussen de vaten kan stromen verdeelt de vloeistof zich zodat de hoogte in ieder vat hetzelfde is. Zie figuur 4. Dit staat bekend als het principe van de **communicerende vaten**.



**Figuur 4** Communicerende vaten.

### VOORBEELD bloeddruk

Bloed in bloedvaten stroomt, maar in eerste benadering kunnen we bloed opvatten als stilstaande vloeistof. We vergelijken de bloeddruk  $p_2$  in de voorste tibiale slagader in de voet met de bloeddruk  $p_1$  in de aorta. De dichtheid van bloed is  $1060 \text{ kg/m}^3$ .

#### Hoe groot is het drukverschil als de persoon horizontaal ligt?

- er is geen hoogteverschil tussen de voet en het hart
- $p = \rho \cdot g \cdot h \rightarrow \Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h \rightarrow \Delta p = \rho \cdot g \cdot 0 = 0 \text{ Pa}$

#### Hoe groot is het drukverschil als de persoon staat?

- het hoogteverschil tussen de voet en het hart is ongeveer 1,4 m
- $p = \rho \cdot g \cdot h \rightarrow \Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$
- $\Delta p = 1060 \cdot 9,81 \cdot 1,4 = 1,4558 \cdot 10^4 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

## De wet van Archimedes

We weten dat een voorwerp op een vloeistof gaat drijven als de dichtheid van het voorwerp kleiner is dan de dichtheid van de vloeistof. Een drijvend voorwerp zakt voor een gedeelte in het water. Archimedes (287 – 212 v. Chr.) heeft ontdekt dat als een voorwerp in een vloeistof (of gas) wordt ondergedompeld het een opwaartse kracht ondervindt. De grootte van de opwaartse kracht is gelijk aan het gewicht van de verplaatste vloeistof (of gas). Deze ontdekking staat nu bekend als **de wet van Archimedes**. Na ruim tweeduizend jaar geldt de wet van Archimedes nog steeds en behoort daarmee tot de eerste geldige natuurkundige inzichten.

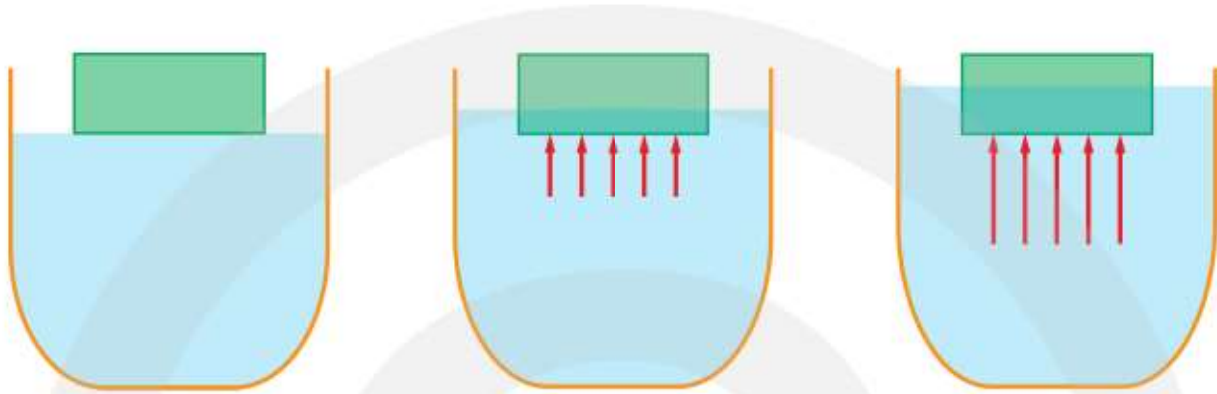
### De wet van Archimedes

**Een voorwerp geheel of gedeeltelijk ondergedompeld in een vloeistof of gas ondervindt een opwaartse kracht die gelijk is aan het gewicht van de verplaatste vloeistof of gas.**

Archimedes bedoelt het volgende. Stel je laat een blok op water drijven, dan ligt het blok niet **op** het water maar zakt het voor een deel **in** het water. Watermoleculen worden door het blok van hun plaats geduwd. Het water oefent druk uit en perst het blokje omhoog. De grootte van de opwaartse kracht is gelijk aan het gewicht van het water dat door het blokje weg is geduwd. Hoe meer het blokje onder water komt hoe groter de opwaartse kracht is. Er is evenwicht als de opwaartse kracht even groot is als de zwaartekracht op het blokje.

In figuur 5 zie je een drijvend blok dat voor een gedeelte onder water komt. Een blok met een grotere dichtheid heeft een groter gewicht en zal dieper in het water zakken.

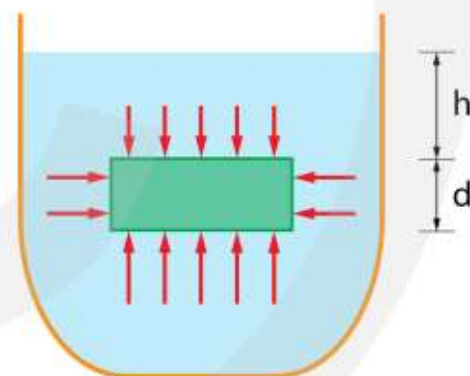
Als de dichtheid van het blok groter is dan de dichtheid van water zakt het blok helemaal onder water. Het gewicht van het blok is dan nog steeds groter dan het gewicht van de verplaatste vloeistof. De vloeistof is niet in staat om een opwaartse kracht te geven die gelijk is aan het gewicht van het blokje. Het blok valt daarom naar de bodem.



**Figuur 5** Als het blok in het water komt wordt het water opzij gedruwd waardoor het water stijgt en het blokje omhoog wordt gedruwd. De opwaartse kracht is gelijk aan het gewicht van het verplaatste (opzij geduwde) water.

### BEWIJS

In figuur 6 zie je dat de bovenkant van een blok zich op diepte  $h$  bevindt en de onderkant op diepte  $h + d$ . De krachten op de zijkant van het blok zijn even groot en tegengesteld gericht en heffen elkaar daarom op. De oppervlakte  $A$  van de bovenkant en de onderkant zijn aan elkaar gelijk.



**Figuur 6** Krachten op een blok ondergedompeld in een vloeistof.

- druk op de bovenkant:  $p = \rho \cdot g \cdot h \rightarrow F_{\text{bovenkant}} = \rho \cdot g \cdot h \cdot A$
- druk op de onderkant:  $p = \rho \cdot g \cdot (h + d) \rightarrow F_{\text{onderkant}} = \rho \cdot g \cdot (h + d) \cdot A$
- $F_{\text{opwaarts}} = F_{\text{onderkant}} - F_{\text{bovenkant}} \rightarrow F_{\text{opwaarts}} = \rho \cdot g \cdot (h + d) \cdot A - \rho \cdot g \cdot h \cdot A = \rho \cdot g \cdot d \cdot A$
- volume  $V_{\text{verplaatst}}$  van de verplaatste vloeistof:  $V_{\text{verplaatst}} = A \cdot d$
- geeft  $F_{\text{opwaarts}} = \rho \cdot V_{\text{verplaatst}} \cdot g$
- $m_{\text{verplaatst}} = \rho \cdot V_{\text{verplaatst}} \rightarrow F_{\text{opwaarts}} = m_{\text{verplaatst}} \cdot g$
- $m_{\text{verplaatst}} \cdot g$  is het gewicht van de verplaatste vloeistof

Uit de wet van Archimedes volgt ook dat als de dichtheid van het blok groter is dan die van de vloeistof het blok zinkt en als dichtheid van het blok kleiner is dan die van de vloeistof het blok blijft drijven.

**drijven**  $\rightarrow \rho_{\text{blok}} < \rho_{\text{vloeistof}}$

**zinken**  $\rightarrow \rho_{\text{blok}} > \rho_{\text{vloeistof}}$



## VOORBEELD zwemblaas van een vis

De zwemblaas is een orgaan in de buik van de vis dat gevuld is met gas. Het is een soort met lucht gevulde ballon in de vis. De zwemblaas bevindt zich net onder de ruggengraat en staat bij de meeste vissen in verbinding met de slokdarm. De zwemblaas zorgt ervoor dat de vis zich op de juiste diepte in het water kan voortbewegen. Zie figuur 7.



Figuur 7

**Leg uit hoe een vis zijn zwemblaas gebruikt om zijn diepte aan te passen.**

- als de vis wil stijgen brengt hij extra lucht in zijn zwemblaas
- hierdoor zwelt de vis op en blijft zijn massa ongeveer gelijk
- $V$  neemt toe en  $m$  blijft gelijk  $\rightarrow \rho = m / V$  wordt kleiner
- de opwaartse kracht wordt groter dan de zwaartekracht
- de vis gaat stijgen
- als de vis wil dalen laat hij wat lucht uit de zwemblaas ontsnappen

## De wet van Pascal

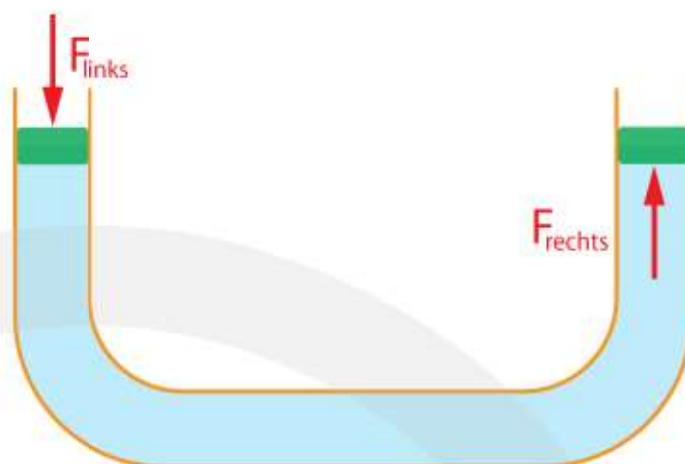
Omdat een vloeistof gemakkelijk van vorm verandert maar niet kan worden samengeperst zal een uitgeoefende druk zich in alle richtingen in de vloeistof verplaatsen. Neemt de druk in een punt in een afgesloten hoeveelheid vloeistof toe, dan wordt deze druk doorgegeven aan de omgeving. Dit staat bekend als de **wet van Pascal**.

### De wet van Pascal

**Een druk uitgeoefend op een vloeistof die zich in een geheel gevuld en gesloten vat bevindt, zal zich onverminderd in alle richtingen voortplanten.**

In figuur 8 zie je hoe de wet van Pascal gebruikt kan worden om een kracht te verplaatsen. Aan de linkerkant wordt op een zuiger een kracht  $F_{\text{links}}$  uitgeoefend die zich verdeelt over oppervlak  $A$  en een druk  $p = F_{\text{links}} / A$  veroorzaakt. Deze druk verplaatst zich naar de rechterkant en oefent daar een kracht  $F_{\text{rechts}}$  op de zuiger uit.

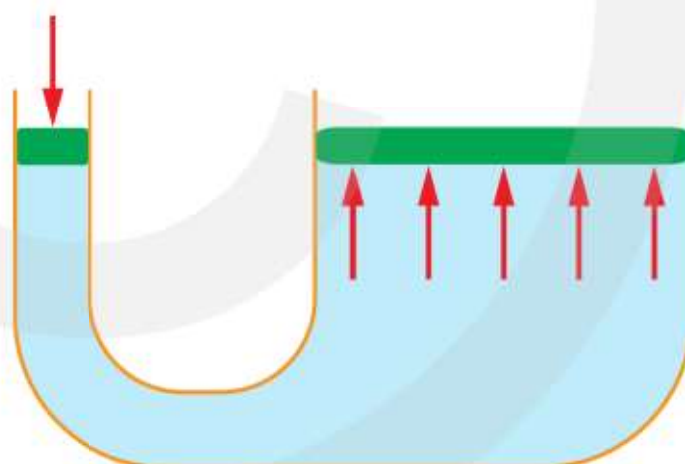
De wet van Pascal heeft als gevolg dat je met een kleine kracht een grote kracht kunt maken. In figuur 9 zie je hoe dit in zijn werk gaat. De kracht aan de linkerkant is hetzelfde gebleven, zodat de veroorzaakte druk ook hetzelfde is gebleven. Maar omdat het oppervlak aan de rechterkant vijf keer groter is gemaakt wordt de kracht op de zuiger aan de rechterkant ook vijf keer groter.



**Figuur 8** In een afgesloten hoeveelheid vloeistof wordt een uitgeoefende druk in alle richtingen doorgegeven.

Deze methode om een kracht te vergroten wordt toegepast in bijvoorbeeld de remmen van een auto. Door het rempedaal in te drukken pers je een beetje olie in een smal buisje. De toegenomen oliedruk verplaatst zich naar de remschijven. Het oppervlak van de zuiger bij de remschijven is veel groter, zodat er een grote kracht op de remschijven wordt uitgeoefend.

In figuur 9 is de oppervlakte links vijf keer kleiner dan rechts. Als de linkerzuiger  $s$  meter naar beneden wordt geduwd gaat de rechterzuiger  $s / 5$  meter omhoog, zodat het volume van de verplaatste vloeistof links en rechts hetzelfde is.

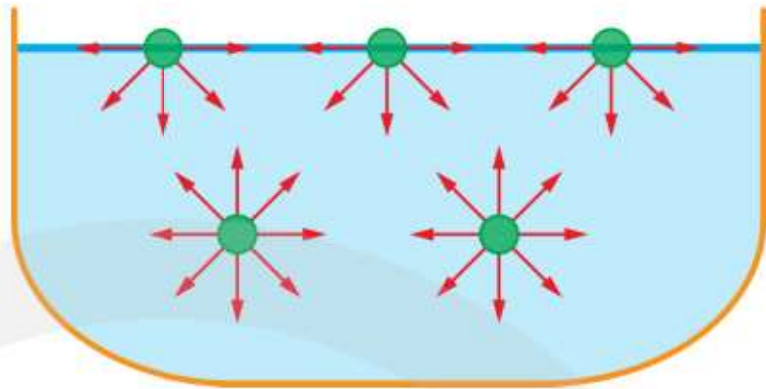


**Figuur 9** De oppervlakte van de zuiger aan de rechterkant is groter dan van de zuiger aan de linkerkant. Een uitgeoefende kracht op de linker zuiger veroorzaakt een grotere kracht op de rechterzuiger.

De **wet van behoud van energie** geeft hetzelfde resultaat. De arbeid die door  $F_{links}$  wordt uitgeoefend is:  $W_{links} = F_{links} \cdot s_{links}$ . Hierbij is  $s_{links}$  de afstand waarover de zuiger aan de linkerkant wordt verplaatst. Bij de rechterkant is de kracht vijf keer zo groot en omdat  $W_{links} = W_{rechts}$  zal de afstand waarover de zuiger aan de rechterkant wordt verplaatst  $s_{rechts}$  vijf keer zo klein zijn.

## Oppervlaktespanning

Om van buitenaf een vloeistof binnen te dringen moet je het oppervlak passeren, en dat kost arbeid. De chemische binding die de moleculen aan het vloeistofoppervlak hebben met moleculen dieper in de vloeistof zorgt ervoor dat het oppervlak van een vloeistof onder spanning staat. Deze spanning wordt de **oppervlaktespanning** genoemd. Zie figuur 10.



**Figuur 10** De oppervlakte-spanning wordt veroorzaakt door de chemische bindingen tussen de moleculen.

In figuur 10 zie je dat een molecuul onder het oppervlak in iedere richting wordt aangetrokken door de omringende moleculen. De aantrekkende krachten gaan alle richtingen uit. Bij de moleculen aan de oppervlakte is dit anders. Bij deze moleculen zijn er aantrekkende krachten naar de zijkanten en naar beneden maar niet naar boven. De intermoleculaire bindingen trekken deze moleculen naar binnen. Deze kracht zorgt ervoor dat de moleculen die aan het oppervlak zitten als het ware een elastisch "vlies" om de vloeistof vormen. Uittrekking van dit vlies kost energie. Hoe minder oppervlak een vloeistof heeft hoe lager de energie die nodig is om het oppervlak te creëren.

Oppervlaktespanning zorgt er daarom voor dat het oppervlak van een vloeistof zo klein mogelijk wordt gemaakt. Water dat langzaam uit een kraan stroomt vormt druppels die tijdens het vallen bolvormig zijn. Ook regendruppels, oliedruppels en druppels van gesmolten metaal zijn bolvormig. Sterren en planeten zijn ook bolvormig. Een bol is immers de geometrische figuur met de kleinst mogelijke oppervlakte bij een gegeven volume. Door een bolvorm aan te nemen wordt de energie die nodig is om het oppervlak te maken zo klein mogelijk.

Een naald en een scheermesje zijn gemaakt van staal maar kunnen op water drijven, ondanks dat de dichtheid van staal een stuk groter is dan de dichtheid van water. Maar dit drijven is niet hetzelfde als bedoeld in de wet van Archimedes. De naald en het scheermesje liggen bovenop het vlies van oppervlaktemoleculen, omdat de oppervlaktespanning een vergroting van het vloeistofoppervlak tegenwerkt. Zodra de naald en het scheermesje door het oppervlak heengaat zinken ze naar de bodem. De oppervlaktespanning van water is vrij groot. Bij een hogere temperatuur trillen de watermoleculen heftiger, waardoor de oppervlaktespanning afneemt. Je kunt de oppervlaktespanning van water dus kleiner maken door te verhitten. Ook door zeep op te lossen wordt de oppervlaktespanning kleiner. Als er voldoende zeep is opgelost wordt de oppervlaktespanning van water klein genoeg om zeepbellen te laten ontstaan.

**De oppervlaktespanning heeft als symbool  $\gamma$  en is de hoeveelheid arbeid die het kost om het oppervlak één vierkante meter groter te maken.**

**De eenheid van oppervlaktespanning is  $\text{J m}^{-2}$  of  $\text{N m}^{-1}$ .**

## VOORBEELD schaatsenrijders

Schaatsenrijders zijn insecten die over water kunnen lopen. Ze hebben korte stevige voorpoten en lange midden- en achterpoten en zijn 1,0–2,5 cm lang.

Een schaatsenrijder heeft een massa van 30 mg. Zijn gewicht is verdeeld over 6 poten. Zie figuur 11. Het wateroppervlak wordt door de poten vergroot. Dit veroorzaakt een kracht omhoog die gelijk is aan het gewicht van het insect.

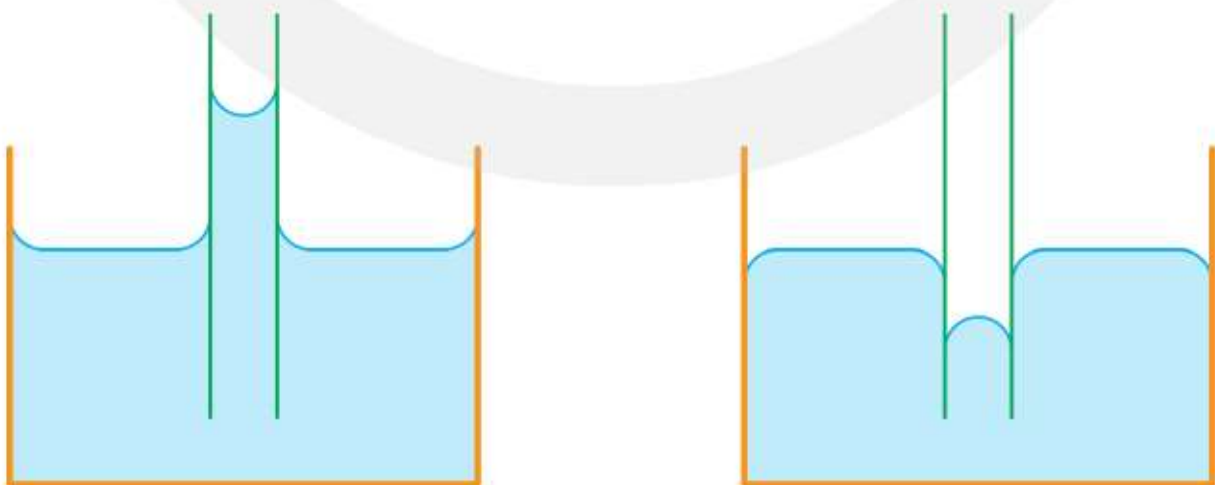


Figuur 11

## Capillaire werking

Capillaire werking is het verschijnsel dat een vloeistof, bijvoorbeeld water, in een smal buisje stijgt, tegen de werking van de zwaartekracht in. De vloeistofspiegel vormt hierbij een bolvormig oppervlak. Smalle buisjes waarin dit verschijnsel optreedt worden haarbuisjes of **capillairen** genoemd. Zie figuur 12. In figuur 12 is links de kracht tussen twee verschillende moleculen (water en glas) groter dan de kracht tussen twee dezelfde moleculen (water en water). Rechts geldt het omgekeerde.

**Cohesie** verwijst naar de kracht tussen moleculen van hetzelfde type. **Adhesie** verwijst naar de kracht tussen moleculen van verschillend type. Het hoogteverschil hangt af van de oppervlaktespanning. Als de vloeistof in het capillair te hoog stijgt kan de oppervlaktespanning de zwaartekracht niet meer weerstaan, waardoor het vloeistofoppervlak breekt.



Figuur 12 Capillaire werking treedt op bij vloeistof die zich in een nauwe buis bevindt. Links is de adhesiekracht groter dan de cohesiekracht. Rechts is de cohesiekracht groter dan de adhesiekracht.

In figuur 12 zie je dat de capillaire werking zorgt voor een druk. Dit noem je de capillaire druk. Voor de capillaire vloeistofdruk in een buis geldt:

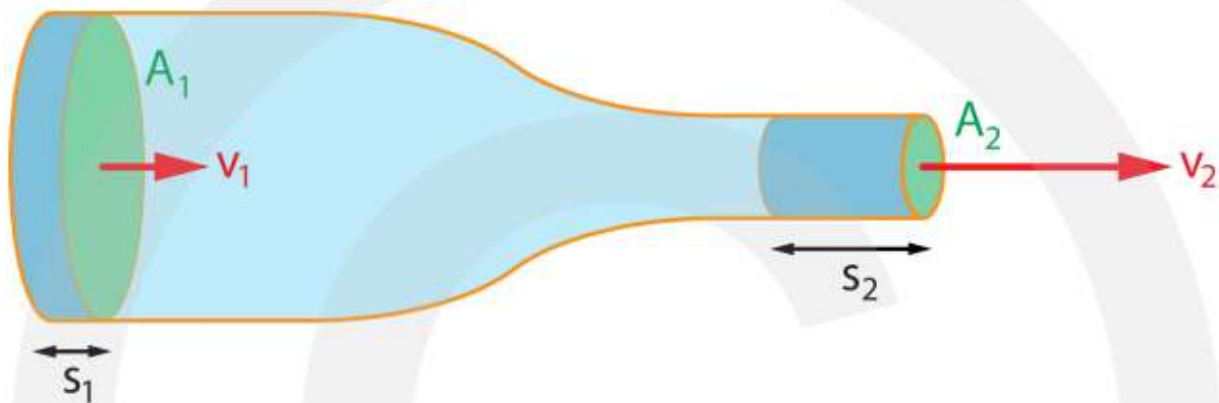
$$p_{\text{cap}} = \frac{2\gamma}{r}$$

- $p_{\text{cap}}$  is de capillaire druk (N / m<sup>2</sup>) of (Pa)
- $\gamma$  is de oppervlaktespanning in (N / m) of (J / m<sup>2</sup>)
- $r$  is de straal van de capillair (m)

## 20.2 Vloeistof in beweging

### Behoud van massa

Bij het stromen van een vloeistof door een pijp is de massa behouden. Dat wil zeggen dat door ieder stukje pijp per seconde evenveel massa stroomt. In figuur 13 zie je een pijp waarin vloeistof stroomt.



Figuur 13 Door ieder stukje pijp stroomt per seconde evenveel massa.

Op plaats 1 (links) stroomt de vloeistof met snelheid  $v_1$  en op plaats 2 (rechts) met snelheid  $v_2$ . We laten de vloeistof gedurende tijd  $t$  stromen. Links heeft de vloeistof afstand  $s_1 = v_1 \cdot t$  afgelegd en rechts  $s_2 = v_2 \cdot t$ . Het volume van de verplaatste vloeistof is links  $V_1 = A_1 \cdot s_1$  en rechts  $V_2 = A_2 \cdot s_2$ . Voor de verplaatste massa geldt  $m_1 = \rho_1 \cdot V_1$  en  $m_2 = \rho_2 \cdot V_2$ . Behoud van massa betekent  $m_1 = m_2$ . Hieruit volgt de **continuïteitsvergelijking**:

$$m_1 = m_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2$$

- $m_1 / m_2$  is de verplaatste massa in gebied 1 en 2 per seconde ( $\text{kg s}^{-1}$ )
- $\rho_1 / \rho_2$  is de dichtheid in gebied 1 en 2 ( $\text{kg m}^{-3}$ )
- $A_1 / A_2$  is de oppervlakte van de doorsnede in gebied 1 en 2 ( $\text{m}^2$ )
- $v_1 / v_2$  is de snelheid van de vloeistof in gebied 1 en 2 ( $\text{m s}^{-1}$ )

### BEWIJS

- $m_1 = \rho_1 \cdot V_1$  en  $m_2 = \rho_2 \cdot V_2$
- $V_1 = A_1 \cdot s_1 = A_1 \cdot v_1 \cdot t$  en  $V_2 = A_2 \cdot s_2 = A_2 \cdot v_2 \cdot t$
- $m_1 = m_2 \rightarrow \rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 \cdot t = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot t$  *links en rechts delen door t*
- $\rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2$

Voor een vloeistof waarvan de dichtheid niet afhankelijk is van de druk geldt  $\rho_1 = \rho_2$ . Hieruit volgt:

$$V_1 = V_2 \rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

- $V_1 / V_2$  is het verplaatste volume in gebied 1 en 2 per seconde ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
- $A_1 / A_2$  is de oppervlakte van de doorsnede in gebied 1 en 2 ( $\text{m}^2$ )
- $v_1 / v_2$  is de snelheid van de vloeistof in gebied 1 en 2 ( $\text{m s}^{-1}$ )

De hoeveelheid vloeistof die in één seconde wordt verplaatst is het **debiet** met als symbool  $Q$ . Voor het debiet geldt:  $Q = A \cdot v$ .

**Het debiet is het volume vloeistof dat per seconde stroomt in kubieke meter per seconde ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ).**

$$Q = \frac{V}{t} = A \cdot v$$

- $Q$  is het debiet in kubieke meter per seconde ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
- $V$  is het volume ( $\text{m}^3$ )
- $t$  is de tijd (s)
- $A$  is het oppervlak in vierkante meter ( $\text{m}^2$ )
- $v$  is de stroomsnelheid in meter per seconde ( $\text{m s}^{-1}$ )

Voor een vloeistof waarvan de dichtheid niet afhankelijk is van de druk leidt behoud van massa tot behoud van debiet:

$$Q_1 = Q_2$$

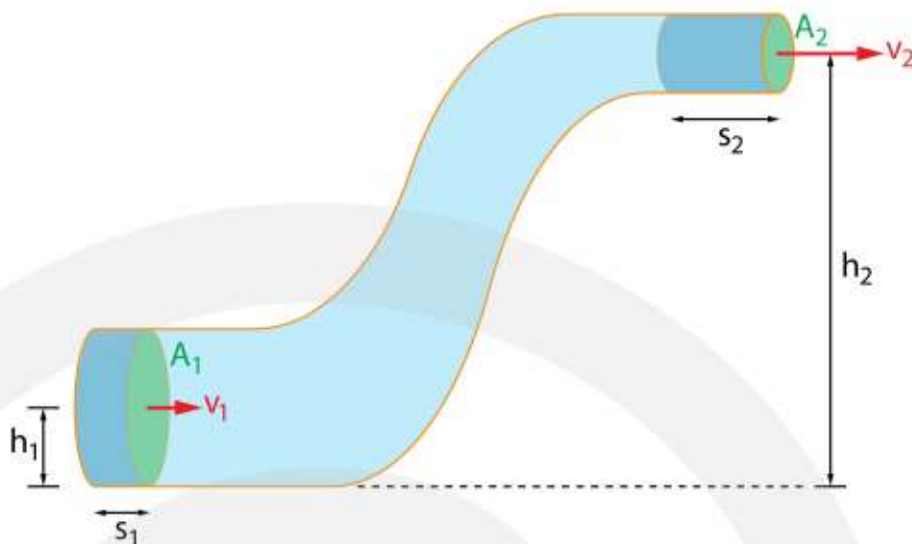
- $Q_1 / Q_2$  is het debiet in gebied 1 en 2 ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )

### Behoud van energie

Bij het stromen van een vloeistof is behalve de massa ook de energie behouden. Voor een vloeistof die niet kan worden samengedrukt en waarin geen wrijving is (viscositeit is nul, zie verderop) leidt behoud van energie tot de **vergelijking van Bernoulli**.

In figuur 14 zie je een stuk pijp waarin vloeistof stroomt. Zowel de dikte als de hoogte van de pijp veranderen. Op tijdstip 1 bevindt zich een hoeveelheid vloeistof op plaats 1. Op tijdstip 2 is deze vloeistof over afstand  $s_1$  verplaatst. Tegelijkertijd verplaats bovenin de pijp dezelfde hoeveelheid vloeistof over afstand  $s_2$ .

**Figuur 14** Een vloeistof stroomt door een pijp. De wet van behoud van energie leidt tot de vergelijking van Bernoulli.



Om de vloeistof te verplaatsen moet arbeid worden verricht. Onderin wordt kracht  $F_1$  uitgeoefend op de vloeistof, waardoor de vloeistof over afstand  $s_1$  verplaatst. Bovenin oefent de vloeistof kracht  $F_2$  uit op de vloeistof rechts van 2 die over afstand  $s_2$  verplaatst.

Arbeid uitgeoefend op de vloeistof is:  $W_{in} = F_1 \cdot s_1 \rightarrow W_{in} = p_1 \cdot A_1 \cdot s_1$

Arbeid uitgeoefend door de vloeistof is:  $W_{uit} = F_2 \cdot s_2 \rightarrow W_{uit} = p_2 \cdot A_2 \cdot s_2$

De wet van behoud van energie zegt:

$$E_{begin} + E_{in} = E_{eind} + E_{uit}$$

- $E_{begin}$  is de energie die in het begin in de vloeistof aanwezig is (J)
- $E_{in}$  is de arbeid die de vloeistof opneemt (J)
- $E_{eind}$  is de energie die aan het eind in de vloeistof aanwezig is (J)
- $E_{uit}$  is de arbeid die de vloeistof afstaat (J)

Vloeistof wordt verplaatst van plaats 1 naar plaats 2. De energie van de verplaatste vloeistof bestaat uit zwaarte energie en kinetische energie

$$E_{begin} = E_z + E_k = m \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \quad | \quad E_{eind} = E_z + E_k = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$$

Hieruit volgt de vergelijking van Bernoulli

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

- $p_1 / p_2$  is de druk op plaats 1 en plaats 2 (Pa)
- $\rho$  is de dichtheid van de vloeistof ( $\text{kg/m}^3$ )
- $h_1 / h_2$  is de hoogte op plaats 1 en plaats 2 (m)
- $v_1 / v_2$  is de snelheid op plaats 1 en plaats 2 (m/s)



## BEWIJS

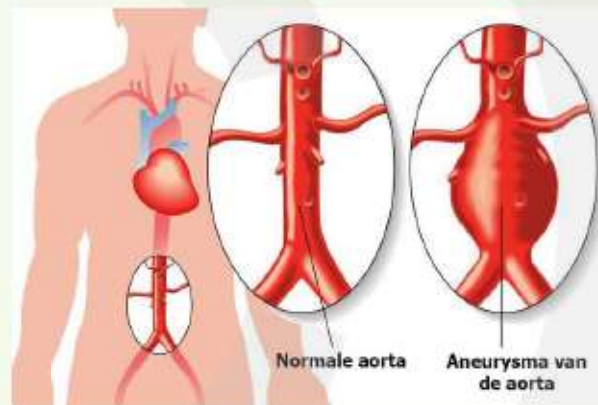
- er geldt:  $m_1 = m_2 = m$  |  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  |  $V_1 = V_2 = V$
- $E_{\text{in}} = p_1 \cdot A_1 \cdot s_1 \rightarrow E_{\text{in}} = p_1 \cdot V$
- $E_{\text{begin}} = \rho \cdot V \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v_1^2$
- $E_{\text{uit}} = p_2 \cdot A_2 \cdot s_2 \rightarrow E_{\text{uit}} = p_2 \cdot V$
- $E_{\text{eind}} = \rho \cdot V \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v_2^2$
- $\rho \cdot V \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v_1^2 + p_1 \cdot V = \rho \cdot V \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v_2^2 + p_2 \cdot V$  *V wegstrepen*
- $p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$

## VOORBEELD aneurysma

Aneurysma is een verwijding in een slagader of ader. De meest voorkomende plaats is de aorta, waarvan de wand wordt verzwakt door een (erfelijke) afbraakreactie. Zie figuur 15

Stel dat de oppervlakte wordt vergroot van  $A_1$  naar  $A_2$  waarbij  $A_2 = 1,9 A_1$ .

Figuur 15



In het normale deel van de aorta stroomt bloed met een snelheid van  $0,40 \text{ m/s}$ . Bloed heeft een dichtheid van  $1060 \text{ kg/m}^3$ .

**Bereken de snelheid van het bloed in het verwijde deel van de aorta.**

- $A_2 = 1,9 A_1$  |  $v_1 = 0,40 \text{ m/s}$  |  $v_2 = \dots \text{ m/s}$
- continuïteit:  $m_1 = m_2 \rightarrow \rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2$  met  $\rho_1 = \rho_2$
- $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow A_1 \cdot 0,40 = 1,9 \cdot A_1 \cdot v_2$   *$A_1$  wegstrepen*
- $0,40 = 1,9 \cdot v_2 \rightarrow v_2 = 0,21053 = 0,21 \text{ m/s}$

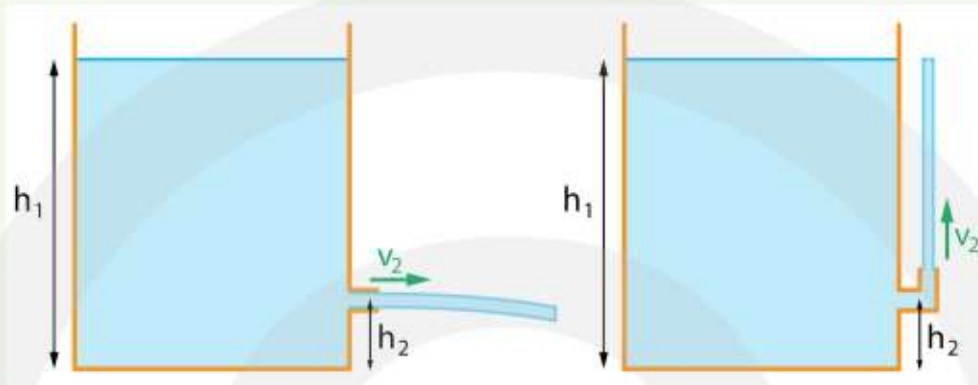
**Bereken het drukverschil tussen het verwijde deel en het normale deel van de aorta als de patiënt ligt.**

- $\rho = 1060 \text{ kg/m}^3$  |  $h_1 = h_2$  |  $v_1 = 0,40 \text{ m/s}$  |  $v_2 = 0,21 \text{ m/s}$
- Bernoulli:  $p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$  met  $h_1 = h_2$
- $p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \rightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot (v_1^2 - v_2^2)$
- $p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \cdot 1060 \cdot (0,40^2 - 0,21^2) \rightarrow p_2 - p_1 = 61,427 = 61 \text{ Pa}$

De bloeddruk in het verwijde deel is groter dan in het normale deel, waardoor de vaatwand nog meer wordt verzwakt.

## VOORBEELD het leeglopen van een vat

Een vat is gevuld met vloeistof. Onder in het vat zit een gat, waardoor de vloeistof wegstroomt. Zie figuur 16.



**Figuur 16** Vloeistof stroomt uit een vat. Rechts spuit de vloeistof omhoog

Als we aannemen dat de luchtdruk veel groter is dan de druk van de vloeistof op diepte  $\Delta h = h_1 - h_2$  en dat oppervlak van de uitstroomopening veel kleiner is dan het vloeistofoppervlak van het vat, dan geldt voor de snelheid waarmee de vloeistof uit het vat stroomt:  $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$ .

### Toon dit aan.

- plaats 1 is bij het oppervlak en plaats 2 is waar de vloeistof uitstroomt
- op beide plaatsen is de druk gelijk aan de luchtdruk  $\rightarrow p_1 = p_2$
- $p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$  met  $p_1 = p_2$
- $\rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$
- behoud van massa  $\rightarrow Q_1 = Q_2 \rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$
- $A_1 \gg A_2 \rightarrow v_1 \ll v_2 \rightarrow v_1 \approx 0$
- $\rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$  links en rechts delen door  $\rho$
- $g \cdot h_1 = g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot v_2^2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot v_2^2 = g \cdot (h_1 - h_2) \rightarrow v_2^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta h$
- $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$

Als de vloeistof omhoog wordt gespoten komt het op hoogte  $h_1$ . Zie figuur 16 rechts.

### Toon dit aan.

- $E_{\text{begin}} = E_{\text{eind}} \rightarrow m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = m \cdot g \cdot h_{\text{eind}} + \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{eind}}^2$
- op het hoogste punt:  $v_{\text{eind}} = 0 \rightarrow m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = m \cdot g \cdot h_{\text{eind}}$
- $g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot v_2^2 = g \cdot h_{\text{eind}}$  en  $\frac{1}{2} \cdot v_2^2 = g \cdot (h_1 - h_2)$  geeft
- $g \cdot h_2 + g \cdot (h_1 - h_2) = g \cdot h_{\text{eind}} \rightarrow h_2 + h_1 - h_2 = h_{\text{eind}} \rightarrow h_{\text{eind}} = h_1$

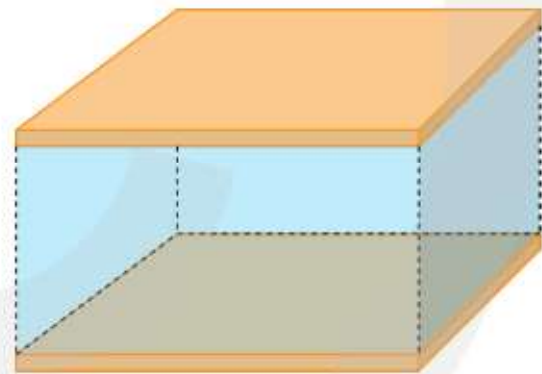
## Viscositeit

Bij een ideale vloeistof kan de vloeistof ongehinderd stromen. Bij zo'n vloeistof stroomt ieder laagje vloeistof met dezelfde snelheid door een pijp, ook het laagje dat in contact staat met de wand. Zie figuur 17, links. In werkelijkheid zijn vloeistoffen niet ideaal. Vloeistof in aanraking met de buiswand staat stil, omdat het wordt tegengehouden door de adhesiekracht. Vloeistof in het centrum van de buis heeft de grootste snelheid. Zie figuur 17, rechts.



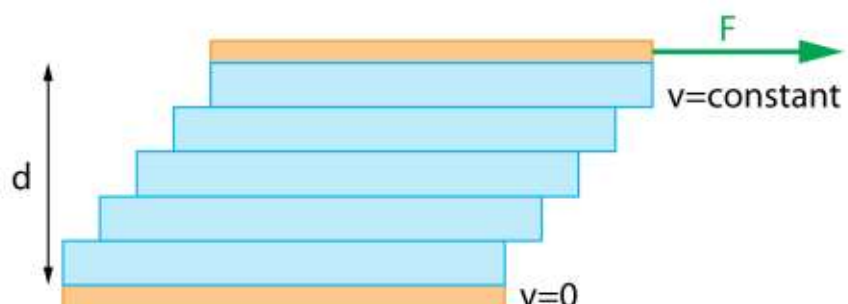
**Figuur 17** Links, ideale vloeistof, waarin de snelheid van de vloeistof overal in de buis hetzelfde is. Rechts, vloeistof met viscositeit, waarbij de snelheid in het centrum van de buis groter is dan de snelheid bij de wand.

De viscositeit van een vloeistof geeft aan hoe "stroperig" een vloeistof is. Stel we brengen een vloeistof tussen twee platen. De onderste plaat zit vast en de bovenste plaat kan bewegen. Zie figuur 18.



**Figuur 18** Een vloeistof zit tussen twee platen. De onderste plaat zit vast en de bovenste plaat kan bewegen.

We oefenen een kracht op de bovenste plaat uit die hierdoor met een constante snelheid gaat bewegen ten opzichte van de onderste plaat. We stellen ons voor dat de vloeistof bestaat uit laagjes die over elkaar heen schuiven. Zo'n denkbeeldig laagje noemen we een **lamel** en we spreken daarom van **laminaire stroming**. Het onderste vloeistoflaagje staat stil en het bovenste laagje beweegt met dezelfde snelheid als de bovenste plaat. De stroomsnelheid van de laagjes ertussenin is recht evenredig met de hoogte ten opzichte van de onderste plaat. Zie figuur 19.



**Figuur 19** Vloeistoflaagjes schuiven over elkaar.

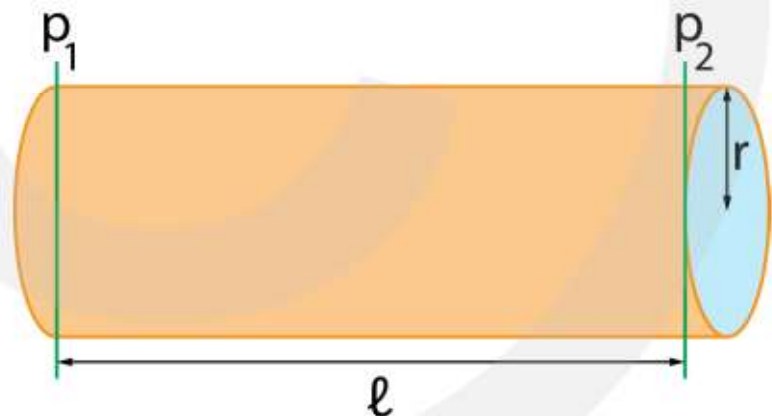
De kracht die nodig is om de bovenste plaat met snelheid  $v$  te bewegen wordt gegeven door:

$$F = \eta \cdot \frac{A \cdot v}{d}$$

- $F$  is de kracht in newton (N)
- $\eta$  is de viscositeit in pascal keer seconde (Pa·s)
- $A$  is de oppervlakte in vierkante meter ( $m^2$ )
- $v$  is de snelheid in meter per seconde ( $m \cdot s^{-1}$ )
- $d$  is de afstand tussen de platen in meter (m)

Deze formule laat zien dat de benodigde kracht recht evenredig is met de viscositeit. Bij een grote viscositeit is er veel kracht nodig om de laagjes vloeistof over elkaar heen te laten bewegen.

We kunnen een formule maken waarmee je kunt berekenen hoeveel vloeistof er per seconde door een pijp met straal  $r$  en lengte  $\ell$  stroomt. Om de vloeistof te laten stromen is een drukverschil nodig. Op plaats 1 is de druk  $p_1$  en op plaats 2 is de druk  $p_2$ . Zie figuur 20.



**Figuur 20** Vloeistof stroomt door een buis.

De formule waarmee je kunt uitrekenen hoeveel  $m^3$  vloeistof per seconde door een buis stroomt is de **vergelijking van Poiseuille**:

$$Q = \frac{\pi r^4 \cdot \Delta p}{8\eta \cdot \ell}$$

- $Q$  is het debiet in kubieke meter per seconde ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )
- $r$  is de straal van de buis in meter (m)
- $\Delta p$  is het drukverschil  $\Delta p = p_1 - p_2$  in pascal (Pa)
- $\eta$  is de viscositeit in pascal keer seconde (Pa·s)
- $\ell$  is de lengte van de buis in meter (m)

We gaan deze formule niet bewijzen, maar we kunnen hem wel vergelijken met de formule van de weerstand van een stroomdraad:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \quad \text{met} \quad R = \frac{U}{I} \quad \rightarrow \quad \frac{U}{I} = \rho \cdot \frac{L}{A} \quad \text{met} \quad A = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad \frac{U}{I} = \rho \cdot \frac{L}{\pi r^2}$$

De vergelijking van Poisseuille kunnen we schrijven als:  $\frac{\Delta p}{Q} = 8\eta \cdot \frac{L}{\pi r^4}$ .

Bij deze vergelijking zien we:

- $\Delta p \leftrightarrow U$  (drukverschil gelijkwaardig met spanning)
- $Q \leftrightarrow I$  (debiet gelijkwaardig met stroomsterkte)

De overeenkomst is duidelijk, maar er is één belangrijk verschil, bij elektrische stroom staat  $r^2$  en bij de vergelijking van Poisseuille staat  $r^4$ . Dit wordt veroorzaakt door de adhesie tussen de vloeistof en de buis. Zoals te zien in figuur 17 stroomt vloeistof niet gelijkmatig door een buis. Bij de wand staat de vloeistof stil en in het centrum is de snelheid maximaal.

### VOORBEELD een injectie geven

Een injectiespuit is gevuld met vloeistof waarvan de viscositeit  $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  is. De zuiger heeft een oppervlakte van  $8,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ . De naald is 40 mm lang en heeft een inwendige straal van 0,30 mm. De bloeddruk in een ader is 2000 Pa.



**Hoe groot moet de druk in de injectiespuit zijn om in 4,0 s 1,0 ml vloeistof te injecteren?**

- $Q = \frac{1,0 \cdot 10^{-6}}{4} = 0,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{s}$
- $\eta = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad | \quad r = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad | \quad L = 0,04 \text{ m} \quad | \quad \Delta p = \dots \text{ Pa}$
- $Q = \frac{\pi r^4 \cdot \Delta p}{8\eta \cdot L} \quad \rightarrow \quad \Delta p = \frac{8\eta \cdot L \cdot Q}{\pi r^4}$
- $\Delta p = \frac{8 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3} \cdot 0,04 \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot (3,0 \cdot 10^{-4})^4} = 6287,6 \text{ Pa}$
- $\Delta p = p_1 - p_2$  met  $p_2 = 2000 \text{ Pa}$
- $6287,6 = p_1 - 2000 \quad \rightarrow \quad p_1 = 8287,6 = 8,3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$

**Hoeveel kracht moet hiervoor op de zuiger worden uitgeoefend?**

- $p = 8287,6 \cdot 10^3 \text{ Pa} \quad | \quad A = 8,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \quad | \quad F = \dots \text{ N}$
- $p = \frac{F}{A} \quad \rightarrow \quad F = p \cdot A$
- $F = 8287,6 \cdot 8,0 \cdot 10^{-5} = 0,663 = 0,66 \text{ N}$

## De vergelijking van Stokes

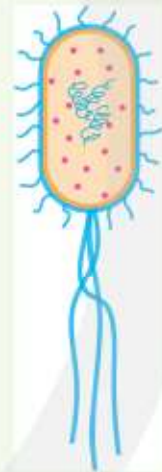
Als een bolvormig voorwerp met kleine snelheid door een vloeistof beweegt geldt voor de wrijvingskracht de vergelijking van Stokes.

$$F_{W \text{ vloeistof}} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

- $F_{W \text{ vloeistof}}$  is de wrijvingskracht in newton (N)
- $\eta$  is de viscositeit in pascal keer seconde (Pa·s)
- $r$  is de straal van de bol in meter (m)
- $v$  is de snelheid in meter per seconde (m/s)

### VOORBEELD E.coli bacterie

E. coli bacteriën hebben zweepstaartjes om zich voort te bewegen. Ze zwemmen door water met een snelheid van  $30 \mu\text{m}$  per seconde. De bacterie heeft een diameter van  $1,0 \mu\text{m}$  en is  $2,0 \mu\text{m}$  lang. In de richting waarin de bacterie beweegt beschouwen dit als bolvormig met een straal van  $0,50 \mu\text{m}$ .



#### Bereken de kracht waarmee de zweepstaartjes zich afzetten.

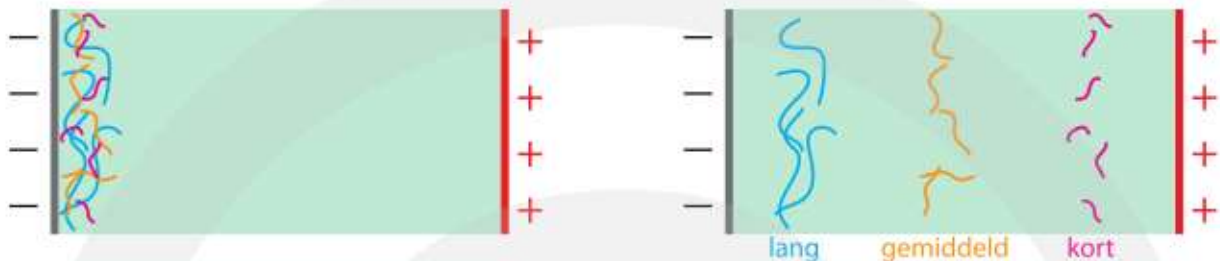
- $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  |  $r = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  |  $v = 30 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$
- $F_{W \text{ vloeistof}} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$
- $F_W = 6\pi \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 10^{-6} = 2,82743 \cdot 10^{-13} \text{ N}$
- constante snelheid:  $\Sigma F = F_{\text{flagellum}} - F_W = 0 \rightarrow F_{\text{flagellum}} = F_W$
- $F_{\text{flagellum}} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ N}$

## (Gel-) elektroforese

Om biologische moleculen, zoals DNA, RNA en eiwitten, van elkaar te scheiden wordt (gel-) elektroforese gebruikt. Een belangrijke toepassing is het maken van een genetische vingerafdruk. Een DNA-molecuul wordt hierbij met behulp van enzymen geknipt in fragmenten met verschillende lengtes en verschillende elektrische ladingen. De fragmenten worden in een gel aangebracht, vlak bij de negatieve elektrode. Vervolgens wordt een spanning aangelegd, waardoor een elektrisch veld tussen de positieve en de negatieve elektrode ontstaat. Zie figuur 21. Voor de elektrische kracht geldt  $F_{el} = q \cdot E$ . De DNA-fragmenten met een negatieve lading bewegen naar de positieve elektrode. Voor de wrijvingskracht geldt bij benadering:  $F_W = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ . De fragmenten krijgen een constante snelheid als  $F_{el} = F_W$ . Hieruit volgt voor de

snelheid van de fragmenten:  $q \cdot E = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \rightarrow v = \frac{q \cdot E}{6\pi \cdot \eta \cdot r}$

Fragmenten met een grote lading en een kleine straal leggen in een bepaalde tijd de grootste afstand af. In figuur 21 zie je links de situatie aan het begin en rechts de situatie na enige tijd. In het begin bevinden alle fragmenten zich bij de negatieve elektrode. Na enige tijd zijn de fragmenten van elkaar gescheiden. Als de elektrische lading van alle fragmenten gelijk is hebben de kleinste fragmenten de grootste afstand afgelegd.

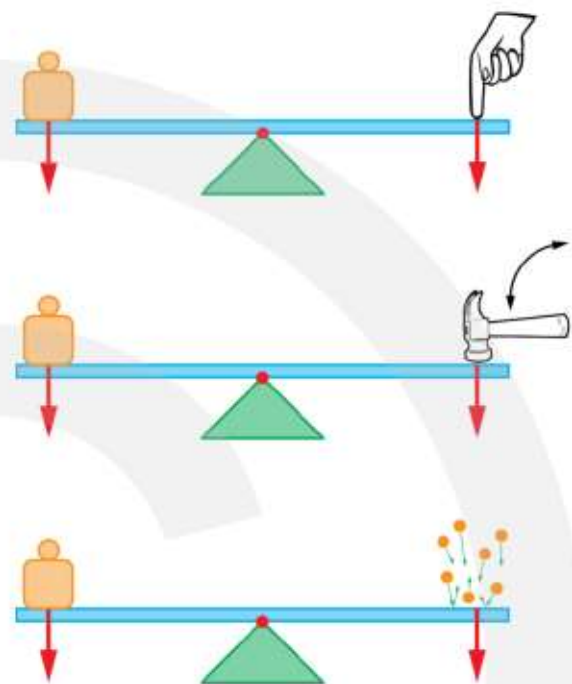


**Figuur 21** Gel-elektroforese. Links de situatie aan het begin en rechts de situatie na enige tijd. DNA-fragmenten met verschillende ladingen en verschillende lengtes worden van elkaar gescheiden.

## 20.3 Gas in rust

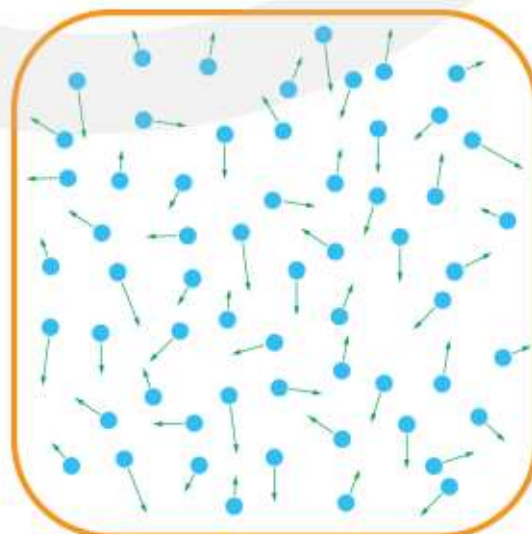
### De oorzaak van druk in een gas

In een gas kunnen atomen over grote afstanden bewegen. Hierbij botsen ze voortdurend tegen elkaar en tegen de wanden. Wanneer een atoom tegen een wand botst wordt er een kleine kracht op de wand uitgeoefend. Omdat er in het gas onnoemelijk veel botsende atomen zijn, is de som van alle atomaire krachten een grote constante kracht, die zich verdeelt over het oppervlak van de wanden. In figuur 22 zie je hoe druk wordt veroorzaakt door veel botsingen, snel achter elkaar. Om het gewicht links in evenwicht te houden moet er rechts een kracht worden uitgeoefend. Dit kan op verschillende manieren: Boven: een constante kracht. Midden: met een hamer wordt snel achter elkaar op de balk getikt. Onder: deeltjes botsen tegen de balk en worden teruggekaatst.



**Figuur 22** Druk veroorzaakt door botsingen van atomen.

Bij een gas in een vat mogen we de zwaartekracht op de atomen verwaarlozen. De atomen bewegen kriskras door elkaar, zonder voorkeur voor een bepaalde richting. Omdat de temperatuur in het vat overal gelijk is zal de gemiddelde snelheid van de atomen ook overal even groot zijn. Hierdoor botsen op iedere vierkante meter van de wand voortdurend evenveel atomen. De kracht die door deze botsingen per vierkante meter wordt uitgeoefend is de druk van het gas. Zie figuur 23.



**Figuur 23** In een vat zitten ontelbaar veel atomen die voortdurend tegen elkaar en tegen de wanden botsen. Op iedere plaats is het aantal botsingen voortdurend even groot. De gasdruk is de kracht per vierkante meter die door al deze botsingen wordt veroorzaakt.



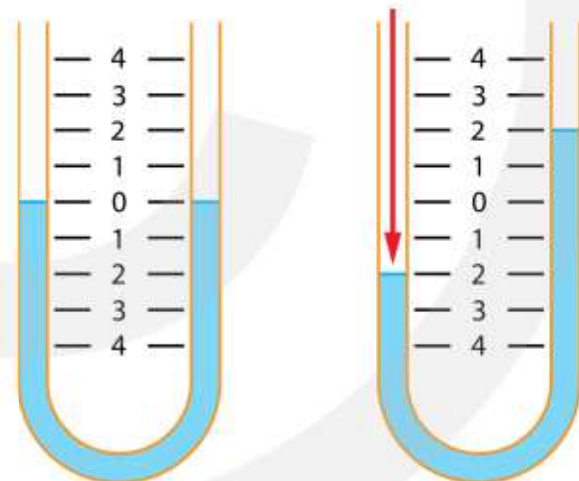
Niet alleen op de wanden, maar ook binnenin het vat heeft de druk van een gas dezelfde waarde. Want op een voorwerp binnenin het vat gebeuren dezelfde botsingen als tegen de wanden van het vat. Vandaar dat de druk binnen in een vat overal even groot is en dat we van de gasdruk kunnen spreken.

**Als zwaartekracht mag worden verwaarloosd is de druk van het gas in een afgesloten ruimte overal even groot.**

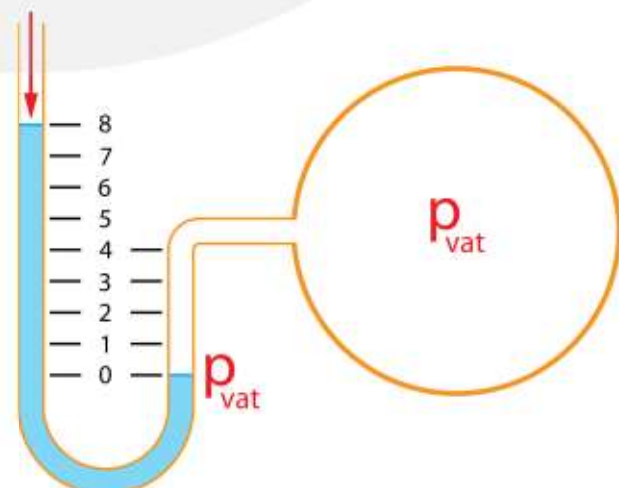
### Het meten van gasdruk

De druk van een gas wordt gemeten met een **manometer**. Er zijn verschillende soorten manometers. Een buismanometer is een U-vormige glazen buis gevuld met vloeistof. Als de gasdruk aan de linkerkant groter is dan aan de rechterkant zie je dat de vloeistof rechts hoger staat dan links. Je meet dan de relatieve gasdruk: het verschil in druk aan de linker- en aan de rechterkant. Zie figuur 24. Je kunt ook een buis gevuld met vloeistof in contact brengen met een vat waarvan de gasdruk bekend is. In dat geval kun je de absolute gasdruk meten. Zie figuur 25.

**Figuur 24** Met een manometer wordt het drukverschil gemeten. In het plaatje links is de gasdruk aan beide kanten even groot. Neemt de gasdruk in de linker buis toe (rechtse plaatje) dan wordt de vloeistof in de rechterbuis omhoog geperst. De schaal geeft het verschil in hoogte.



**Figuur 25** De absolute waarde van de gasdruk kun je meten door aan de rechter buis een groot vat te bevestigen waarin zich gas bevindt met een bekende druk. De druk bij de linker buis is 8 eenheden lager dan die in het vat.



## De eenheid van gasdruk

Er zijn verschillende eenheden van gasdruk in gebruik:  $\text{N m}^{-2}$ , Pascal (Pa) en bar.

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

Ouderwetse eenheden voor gasdruk zijn:

- Millimeter kwik (mm Hg) is de hoogte in mm van een kwikkolom die door het gas worden opgedrukt.  $760 \text{ mm Hg} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1013 \text{ mbar}$
- Atmosfeer (atm) is gelijk aan  $760 \text{ mm Hg} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- Torr (mm kwikdruk) is de druk die door 1 mm kwik wordt veroorzaakt.

## Overdruk en onderdruk

Als de druk in een afgesloten vat groter is dan de druk van de buitenlucht staat het vat op **overdruk**. Dit is het geval in bijvoorbeeld een fietsband.

Als de druk in een afgesloten vat kleiner is dan de luchtdruk buiten het vat staat het vat op **onderdruk**. Dit is het geval bij vacuümverpakking.

Overdruk en onderdruk zijn het verschil tussen de gasdruk in het vat en de druk van de buitenlucht.

**Overdruk is de druk in het vat min de druk van de buitenlucht.**

## Ideaal en reëel gas

Een gas bestaat uit atomen of moleculen die kriskras door elkaar bewegen. Om het gedrag van gassen te beschrijven moet je een model opstellen waarmee je kunt voorspellen hoe een gas zich gedraagt. In het meest eenvoudige geval ga je uit van de volgende aannamen:

- Er zijn heel veel moleculen die samen het gas vormen.
- Bij een botsing verandert alleen de kinetische energie van de moleculen.
- De moleculen trekken elkaar niet aan en stoten elkaar niet af.
- De gemiddelde afstand tussen de moleculen is veel groter dan de moleculen zelf.

Een gas dat voldoet aan deze aannamen noemen we een **ideaal gas**. Geen enkel gas is 100% ideaal, maar in de praktijk kloppen de voorspellingen die het model geeft goed met de werkelijkheid. Alleen bij een zeer hoge gasdruk en bij grote moleculen werkt dit model minder goed. In deze gevallen moet het model worden uitgebreid. Een gas dat zich niet als ideaal gas gedraagt heet een **reëel gas**. In deze paragraaf houden we ons uitsluitend bezig met het gedrag van ideale gassen.

## De toestand van een gas

Stel je hebt een vat met daarin een ideaal gas van een bepaald soort molecuul. Weet je van dit gas de **druk**, het **aantal** moleculen, het **volume** en de **temperatuur**, dan weet je de **toestand** van het gas. De toestand wordt dus niet bepaald door de eigenschappen van de moleculen, maar alleen door hun aanwezigheid.

De toestand van een gas wordt bepaald door:

- de druk ( $p$ )
- het aantal moleculen ( $n$ )
- het volume ( $V$ )
- de temperatuur ( $T$ )

## Algemene gaswet voor een ideaal gas

Voor een ideaal gas geldt de **algemene gaswet**:

$$\frac{p \cdot V}{n \cdot T} = k_B$$

- $p$  is de druk in pascal ( $\text{N/m}^2$ ) = (Pa)
- $V$  is het volume ( $\text{m}^3$ )
- $n$  is het aantal gasmoleculen
- $T$  is de absolute temperatuur (K)
- $k_B$  is de constante van Boltzmann =  $1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

Als we het **aantal moleculen in mol** invullen delen we het getal  $n$  door de constante van Avogadro:  $N_A = 6,02214 \cdot 10^{23}$ .

- $\frac{p \cdot V}{n \cdot T} = k_B \rightarrow p \cdot V = k_B \cdot n \cdot T \rightarrow p \cdot V = k_B \cdot N_A \cdot \frac{n}{N_A} \cdot T$
- $\frac{n}{N_A} = N$  is het aantal mol gasmoleculen:  $p \cdot V = k_B \cdot N_A \cdot N \cdot T \rightarrow \frac{p \cdot V}{N \cdot T} = k_B \cdot N_A$
- $k_B \cdot N_A = 1,38065 \cdot 10^{-23} \cdot 6,02214 \cdot 10^{23} = 8,31446$
- voor de gasconstante  $R$  geldt:  $R = k_B \cdot N_A = 8,31446$

$$\text{gasconstante: } R = k_B \cdot N_A = 8,31446 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

De algemene gaswet kun je ook schrijven als  $\frac{p \cdot V}{N \cdot T} = R$

- $N$  is het aantal mol gasmoleculen
- $R$  is de gasconstante  $R = k_B \cdot N_A = 8,31446 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

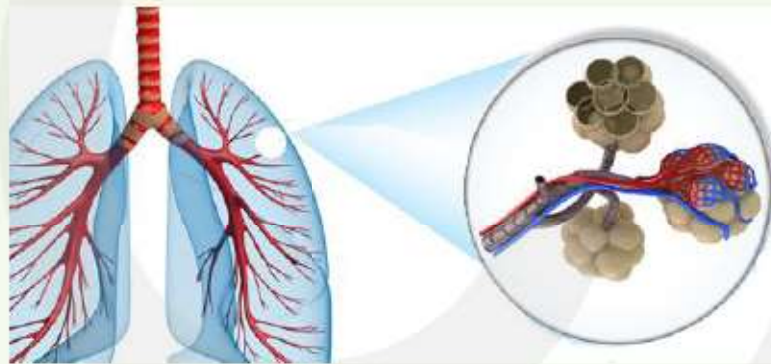
De constante van Boltzmann en de gasconstante hebben een vaste waarde. We kunnen daarom twee toestanden 1 en 2 met elkaar vergelijken. Dit geeft:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{n_1 \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{n_2 \cdot T_2}$$

Vaak verandert er maar één grootte. De grootheden die niet veranderen kun je dan tegen elkaar wegstrepen.

### VOORBEELD longblaasjes

Een long bevat longblaasjes die zorgen voor gasuitwisseling tussen de longen en het bloed. Zie figuur 26. Een longblaasje is bolvormig en heeft een doorsnede van 0,25 mm. De lucht in een longblaasje bevat 14% zuurstof. Het gas in een longblaasje heeft een druk van  $1,0 \cdot 10^5$  Pa en een temperatuur van  $37^\circ\text{C}$ .



Figuur 26

#### Bereken het aantal zuurstofmoleculen in één longblaasje.

- $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$  met  $r = 0,125 \text{ mm} \rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \cdot (1,25 \cdot 10^{-4})^3 = 8,18123 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3$
- $p = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad | \quad T = 37 + 273,15 = 310,15 \text{ K} \quad | \quad n = \dots$
- $\frac{p \cdot V}{n \cdot T} = k_B \rightarrow n = \frac{p \cdot V}{k_B \cdot T}$
- $n = \frac{1,0 \cdot 10^5 \cdot 8,18123 \cdot 10^{-12}}{1,38065 \cdot 10^{-23} \cdot 310,15} = 1,91057 \cdot 10^{14}$
- 14% zuurstof  $n_{\text{O}_2} = 0,14 \cdot 1,91057 \cdot 10^{14} = 2,6748 \cdot 10^{13} = 2,7 \cdot 10^{13}$  O<sub>2</sub> moleculen

Een volwassen mens heeft een longinhoud van ongeveer 6,0 liter, waarvan 80% door longblaasjes wordt ingenomen.

#### Hoeveel longblaasjes heeft een volwassen mens?

- $V_{\text{long}} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad | \quad V_{\text{blaasje}} = 8,18123 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3$
- aantal longblaasjes  $\frac{0,8 \cdot 6,0 \cdot 10^{-3}}{8,18123 \cdot 10^{-12}} = 5,867 \cdot 10^8 = 5,9 \cdot 10^8$

## Partiële druk

De ideale gaswet bevat geen informatie over het soort gas. Alleen het totale aantal moleculen is van belang. Stel dat een gas, zoals bijvoorbeeld lucht, uit meerdere soorten moleculen bestaat dan is de totale druk de som van de drukken veroorzaakt door de verschillende soorten moleculen. De druk veroorzaakt door één soort molecuul noem je de partiële druk van dat molecuul.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

### BEWIJS

- $\frac{p \cdot V}{n \cdot T} = k_B \rightarrow p = \frac{k_B \cdot T}{V} \cdot n$
- $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$
- $p = \frac{k_B \cdot T}{V} \cdot (n_1 + n_2 + n_3 + \dots) \rightarrow p = \frac{k_B \cdot T}{V} \cdot n_1 + \frac{k_B \cdot T}{V} \cdot n_2 + \frac{k_B \cdot T}{V} \cdot n_3 + \dots$
- $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$

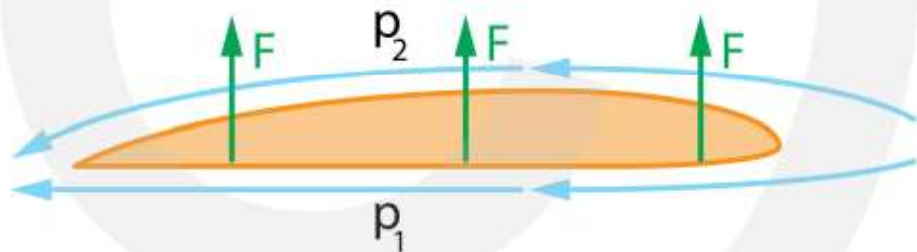
## 20.4 Gas in beweging

### De vergelijking van Bernoulli voor gassen

Voor gassen mag de vergelijking van Bernoulli niet altijd worden toegepast. Het verschil tussen een vloeistof en een gas is dat de dichtheid van een vloeistof constant is en van een gas niet. Persen we gas door een buis, dan oefenen we niet alleen arbeid uit om het gas te verplaatsen, maar ook om het samen te persen. Dit maakt de zaak een stuk ingewikkelder. Alleen als de dichtheid van een gas vrijwel niet verandert mogen we de vergelijking van Bernoulli gebruiken. In de rest van deze paragraaf gaan we hiervan uit.

Met de vergelijking van Bernoulli kunnen we begrijpen hoe liftkracht bij een (vliegtuig) vleugel ontstaat. De vorm van de vleugel is hierbij essentieel. In figuur 27 zie je de doorsnede van een vleugel. Doordat het vliegtuig een snelheid heeft ten opzichte van de lucht stroomt er lucht langs de vleugel. De vorm van de vleugel zorgt ervoor dat de lucht in dezelfde tijd bovenlangs een grotere afstand aflegt dan de lucht onderlangs. De snelheid van de lucht boven de vleugel is daarom groter dan de snelheid van de lucht onder de vleugel. Zie figuur 27. Uit de vergelijking van Bernoulli volgt dat de luchtdruk onder de vleugel groter is dan de luchtdruk boven de vleugel.

**Figuur 27** Liftkracht ontstaat door het verschil in luchtdruk onder en boven een vleugel



### BEWIJS

- plaats 1 is onder de vleugel en plaats 2 is boven de vleugel
- $p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$
- $h_1 = h_2 \rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2)$
- $v_2 > v_1 \rightarrow v_2^2 > v_1^2 \rightarrow p_1 > p_2$

Hieruit volgt voor de **liftkracht**:

$$F_{\text{lift}} = \frac{1}{2} c_{\text{lift}} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

- $c_{\text{lift}}$  is een factor veroorzaakt door de vorm van de vleugels (geen eenheid)
- $\rho$  is de dichtheid van lucht in kilogram per kubieke meter ( $\text{kg m}^{-3}$ )
- $A$  is het oppervlak van de vleugels in vierkante meter ( $\text{m}^2$ )
- $v$  is de snelheid ten opzichte van de lucht in meter per seconde ( $\text{m s}^{-1}$ )

## BEWIJS

- $F_1$  is de kracht op de onderkant van de vleugel en  $F_2$  op de bovenkant
- $F_1 = p_1 \cdot A$  en  $F_2 = p_2 \cdot A \rightarrow F_1 - F_2 = F_{\text{lif}} = (p_1 - p_2) \cdot A$
- $p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) \rightarrow F_{\text{lif}} = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot (v_2^2 - v_1^2)$
- stel:  $v_2 = f \cdot v_1$  met  $f > 1 \rightarrow v_2^2 - v_1^2 = f^2 \cdot v_1^2 - v_1^2 = (f^2 - 1) \cdot v_1^2$
- $F_{\text{lif}} = \frac{1}{2} \cdot (f^2 - 1) \cdot \rho \cdot A \cdot v_1^2$
- $f^2 - 1 = c_{\text{lif}}$  en  $v_1 \approx v$  geeft  $F_{\text{lif}} = \frac{1}{2} c_{\text{lif}} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$

## VOORBEELD albatros

Een albatros kan zonder met zijn vleugels te slaan dagenlang blijven vliegen. Dit komt door de grote liftkracht van zijn vleugels. De vleugels van albatros hebben een spanwijdte van 340 cm en zijn 20 cm breed. Zie figuur 28. De snelheid van de lucht bovenlangs de vleugel is 10% groter dan de snelheid onderlangs. De albatros heeft een massa van 8,0 kg.



Figuur 28

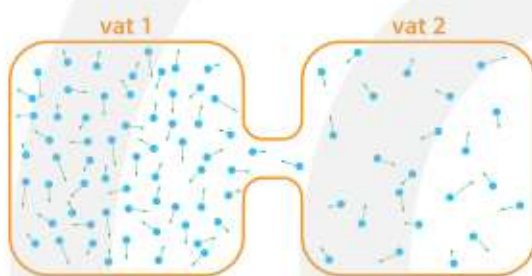
**Met welke snelheid moet de albatros vliegen zodat de liftkracht gelijk is aan de zwaartekracht?**

- $m = 8,0 \text{ kg} \quad | \quad \rho_{\text{lucht}} = 1,293 \text{ kg m}^{-3} \quad | \quad A = 3,4 \cdot 0,2 = 0,68 \text{ m}^2$
- $F_z = F_{\text{lif}} \rightarrow m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot (f^2 - 1) \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$  met  $f = \frac{v_{\text{boven}}}{v_{\text{onder}}}$
- $f = \frac{1,1 \cdot v_{\text{onder}}}{v_{\text{onder}}} = 1,1 \rightarrow f^2 - 1 = 0,21$
- $8 \cdot 9,81 = \frac{1}{2} \cdot 0,21 \cdot 1,293 \cdot 0,68 \cdot v^2 \rightarrow v = 29,156 = 29 \text{ m/s}$

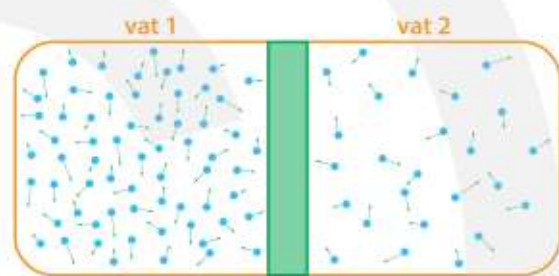
## 20.5 Diffusie

### Diffusie

Moleculen in een gas bewegen kriskras door elkaar heen. Hierbij botsen ze voortdurend tegen elkaar en tegen de wanden van het vat. Stel we nemen een vat gevuld met gas, vat 1, en verbinden dit met vat 2 gevuld met hetzelfde gas, maar waarin de concentratie moleculen lager is. Zie figuur 29. Omdat de concentratie in vat 1 groter is gaan er per seconde meer moleculen van vat 1 naar vat 2 dan omgekeerd. Hierdoor wordt vat 1 steeds leger en vat 2 steeds voller. Na een tijdje gaan er per seconde evenveel moleculen van 1 naar 2 dan van 2 naar 1. Dit is een **dynamisch evenwicht**, omdat de concentratie niet verandert maar er wel uitwisseling van moleculen plaatsvindt.



Figuur 29 Diffusie van gasmoleculen.



Figuur 30 Diffusie van gasmoleculen door een membraam.

Voeren we hetzelfde experiment uit met een membraam tussen de twee vaten, waar gasmoleculen met enige moeite doorheen kunnen, dan geeft dit hetzelfde resultaat. Voor de situaties weergegeven in figuur 29 en in figuur 30 geldt: (a) de kans dat een molecuul van 1 naar 2 gaat is recht evenredig met de concentratie in vat 1 en (b) de kans dat een molecuul van 2 naar 1 gaat is recht evenredig met de concentratie in vat 2. Dit leidt tot de eerste wet van Fick.

### – Eerste wet van Fick –

Transport van moleculen veroorzaakt door een verschil in concentratie heet **diffusie**. Adolf Fick (Duitsland, 1829–1901) introduceert in 1855 twee formules waarmee diffusie kan worden berekend. Deze formules staan bekend als de eerste en de tweede wet van Fick. Met de eerste formule kun je uitrekenen hoeveel deeltjes er per seconde door een vierkante meter oppervlak gaan. Met de tweede formule kun je uitrekenen hoe de concentratie verandert vanwege de aanvoer en afvoer van deeltjes.

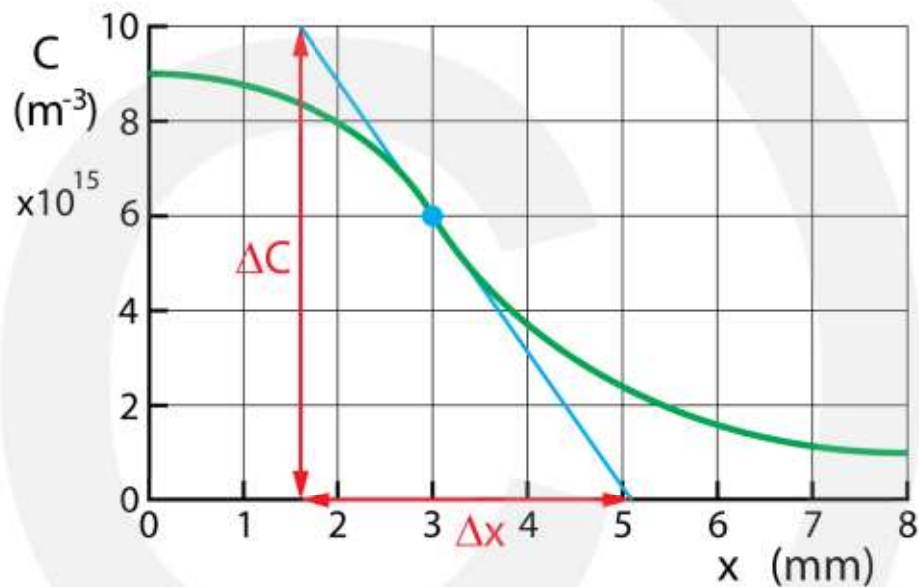
$$\text{Eerste wet van Fick} \quad J = -D \cdot \frac{dC}{dx}$$

- $J$  is het aantal deeltjes dat per seconde per vierkante meter passeert (de deeltjesflux) ( $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$ )
- $D$  is de diffusiecoëfficiënt in vierkanter meter per seconde ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
- $C$  is de concentratie in deeltjes per kubieke meter ( $\text{m}^{-3}$ )
- $x$  is de plaats in meter (m)



**MERK OP** Als je voor C de eenheid  $\text{kg m}^{-3}$  gebruikt, krijg je voor J het aantal kilogram dat per seconde per vierkante meter passeert.

De eerste wet van Fick geeft aan dat de deeltjesflux recht evenredig is met de afgeleide van de concentratie  $dC/dx$ . Het minteken zorgt ervoor dat de deeltjesflux J een positief getal is. De deeltjesflux op plaats x kun je bepalen uit een (C, x)-diagram door een raaklijn te tekenen op plaats x, daarvan de richtingscoëfficiënt te bepalen, dit met -1 te vermenigvuldigen en daarna te vermenigvuldigen met de diffusiecoëfficiënt. In figuur 31 lees je af:  $\Delta C = -1,0 \cdot 10^{16}$  en  $\Delta x = 5,1 - 1,6 = 3,5$  mm.



**Figuur 31** Bepalen van de diffusiecoëfficiënt met een raaklijn.

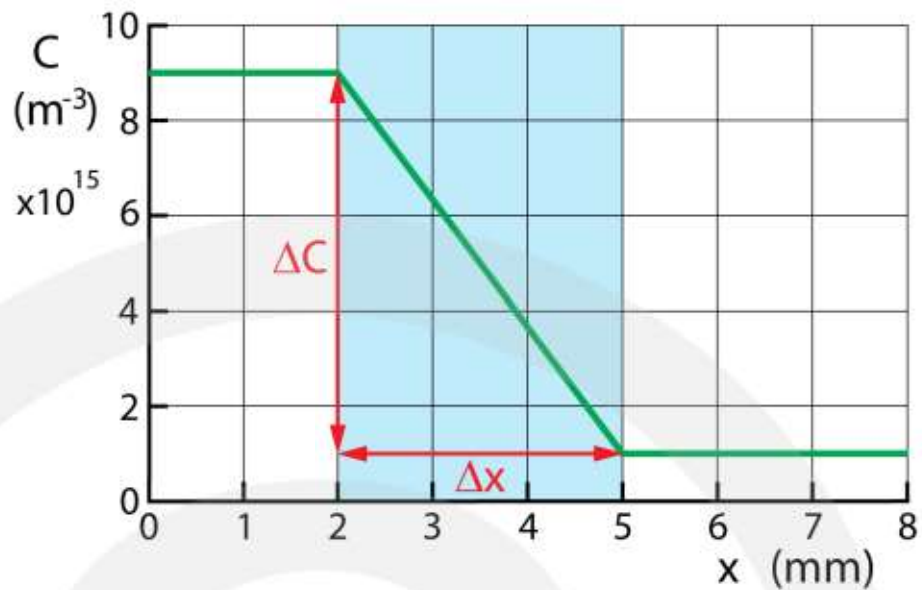
**VOORBEELD** deeltjesflux

In figuur 31 zie je hoe de concentratie afhangt van de plaats. De diffusiecoëfficiënt is  $D = 7,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

**Bepaal de deeltjesflux op  $x = 3,0$  m.**

- $\Delta C = -1,0 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$  |  $\Delta x = 5,1 - 1,6 = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  |  $D = 7,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $J = -D \cdot \frac{dC}{dx} \rightarrow J = -D \left( \frac{\Delta C}{\Delta x} \right)_{\text{raaklijn}}$
- $J = -7,0 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-1,0 \cdot 10^{16}}{3,5 \cdot 10^{-3}} \rightarrow J = 2,0 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

In situaties waarbij deeltjes door een membraam diffunderen kunnen we het verloop van de concentratie in het membraam benaderen met een rechte lijn, zoals te zien in figuur 32. Het membraam (blauw) bevindt zich tussen  $x = 2$  mm en  $x = 5$  mm.



**Figuur 32** Diffusie door een membraam.

We nemen aan dat de concentratiegradiënt  $dC / dx$  in het membraam constant is, zodat we de eerste wet van Fick kunnen vereenvoudigen tot:

$$J = -D \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

- $J$  is het aantal deeltjes dat per seconde per vierkante meter het membraam passeert (de deeltjesflux) ( $m^{-2} s^{-1}$ )
- $D$  is de diffusiecoëfficiënt in vierkanter meter per seconde ( $m^2 s^{-1}$ )
- $\Delta C$  is de concentratieverschil voor en achter het membraam ( $m^{-3}$ )
- $\Delta x$  is de dikte van het membraam in meter (m)

### VOORBEELD deeltjesflux door een membraam

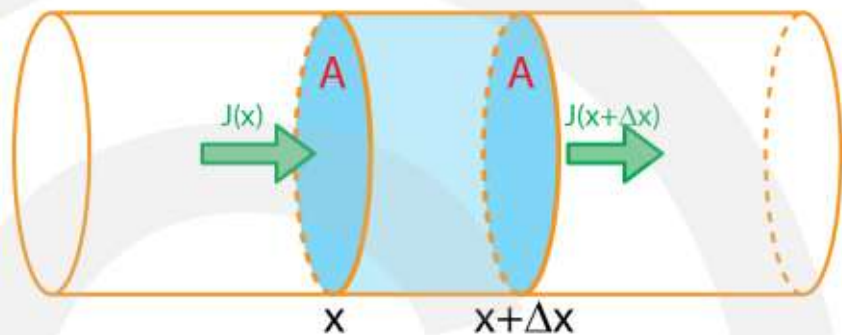
In figuur 32 zie je een 3,0 mm dik membraam waar deeltjes doorheen diffunderen. De diffusiecoëfficiënt is  $D = 1,5 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1}$ .

**Bepaal de deeltjesflux door het membraam.**

- $\Delta C = -8,0 \cdot 10^{15} m^{-3}$  |  $\Delta x = 3,0 \cdot 10^{-3} m$  |  $D = 1,5 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1}$
- $J = -D \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x}$
- $J = -1,5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-8,0 \cdot 10^{15}}{3,0 \cdot 10^{-3}} \rightarrow J = 4,0 \cdot 10^{13} m^{-2} s^{-1}$

### – Tweede wet van Fick –

De tweede wet van Fick is een combinatie van de eerste wet en het behoud van massa. In figuur 33 zie je een volume aangegeven in blauw. Op plaats  $x$  stromen er per seconde  $J(x) \cdot A$  deeltjes naar binnen en op plaats  $x + \Delta x$  stromen  $J(x + \Delta x) \cdot A$  deeltjes naar buiten. Als er meer deeltjes naar binnen stromen dan naar buiten neemt het aantal deeltjes toe. Er kunnen geen deeltjes verdwijnen. Ieder deeltje dat naar binnen stroomt gaat of naar buiten, of blijft in het volume aanwezig. Dit leidt tot de tweede wet van Fick.



**Figuur 33** De verandering van de deeltjesflux.

**Tweede wet van Fick**

$$\frac{dC}{dt} = - \frac{dJ}{dx} = D \cdot \frac{d^2C}{dx^2}$$

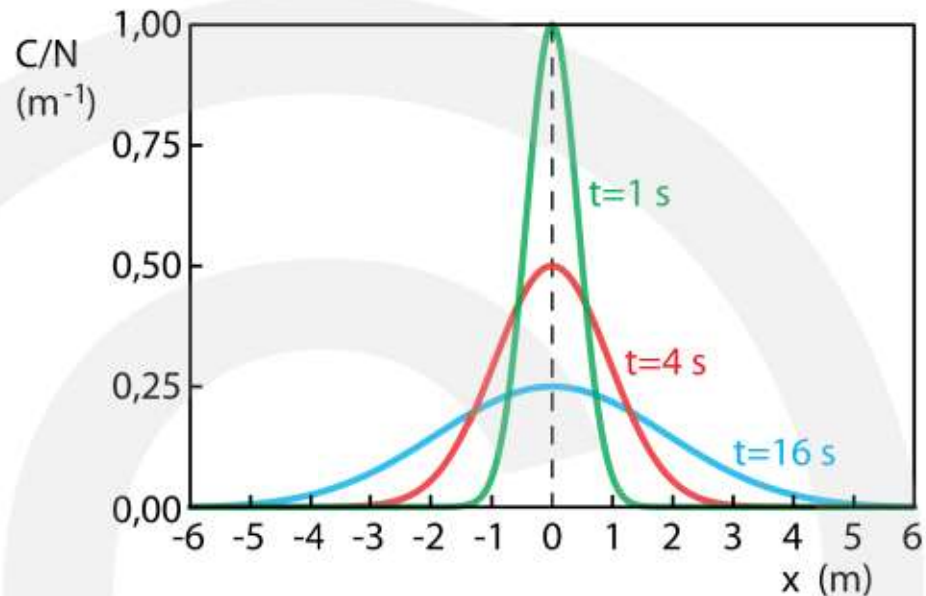
- $C$  is de concentratie in deeltjes per kubieke meter ( $m^{-3}$ )
- $t$  is de tijd in seconde (s)
- $J$  is het aantal deeltjes dat per seconde per vierkante meter het oppervlak passeert, de deeltjesflux ( $m^{-2} s^{-1}$ )
- $x$  is de plaats in meter (m)
- $D$  is de diffusiecoëfficiënt in vierkante meter per seconde ( $m^2 s^{-1}$ )

#### BEWIJS (voor de liefhebber)

- het aantal deeltjes neemt toe met  $N = J(x) \cdot A - J(x + \Delta x) \cdot A$
- de concentratie neemt hierdoor toe met  $\frac{N}{A \cdot \Delta x}$
- hieruit volgt  $\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{J(x) \cdot A - J(x + \Delta x) \cdot A}{A \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\Delta C}{\Delta t} = - \frac{J(x) - J(x + \Delta x)}{\Delta x}$
- nemen we de limiet  $\Delta x \rightarrow 0$  dan krijgen we:  $\frac{dC}{dt} = - \frac{dJ}{dx}$
- $J = -D \cdot \frac{dC}{dx} \rightarrow - \frac{dJ}{dx} = -D \frac{d}{dx} \frac{dC}{dx} \rightarrow \frac{dJ}{dx} = D \cdot \frac{d^2C}{dx^2}$

De tweede wet van Fick geeft aan dat de verandering van de concentratie in de tijd gekoppeld is aan de concentratieverdeling in de ruimte. Stel op  $t = 0$  zijn er  $N$  moleculen per vierkante meter op  $x = 0$ . Deze moleculen diffunderen naar twee kanten.

De concentratie op plaats  $x$  verandert hierdoor, zoals weergegeven in figuur 34. De grafiek wordt lager en breder naarmate de tijd vordert. Dit is een **normale verdeling** of **Gaussverdeling**, genoemd naar de wiskundige Carl Friedrich Gauss (Duitsland, 1777–1855). De oppervlakte onder de grafiek is het aantal moleculen en verandert daarom niet.



**Figuur 34** Verloop van de concentratie in de tijd. De grafiek is een Gaussverdeling.

#### TOELICHTING (voor de liefhebber)

Op  $t = 0$  zijn er  $N$  moleculen per vierkante meter op  $x = 0$  en geen moleculen op andere plaatsen. De moleculen kunnen in twee richtingen diffunderen, de positieve  $x$ -richting en de negatieve  $x$ -richting. Het functievoorschrift voor  $C$  moet voldoen aan de tweede wet van Fick:

$$\frac{dC}{dt} = D \cdot \frac{d^2C}{dx^2}$$

De concentratie is een functie van de plaats en van de tijd. Voor de gegeven beginsituatie geldt:

$$C = \frac{N}{2\sqrt{D \cdot t}} \exp\left[\frac{-x^2}{4D \cdot t}\right]$$

Je kunt deze oplossing controleren door de afgeleide te nemen naar tijd  $t$  en dit te vergelijken met de tweede afgeleide naar plaats  $x$ .

Voor  $x = 0$  geldt:  $C_{x=0} = \frac{N}{2\sqrt{D \cdot t}}$ . De concentratie op  $x = 0$  neemt af met  $\sqrt{t}$ . De

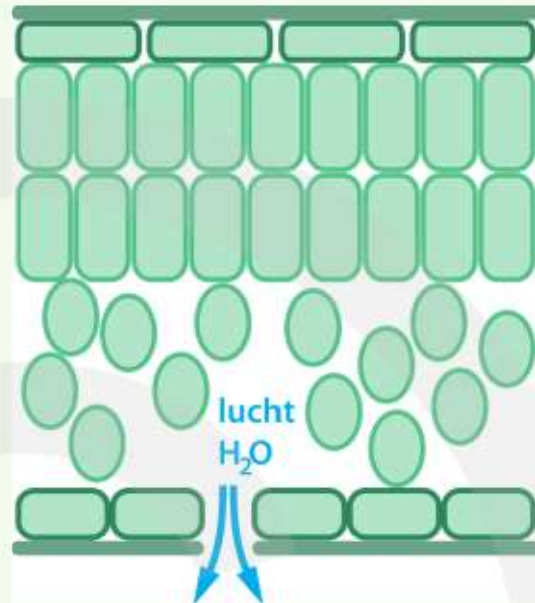
concentratie is na 4 seconden de helft van die na 1 seconde. Na 16 seconden is de concentratie opnieuw gehalveerd en is dan een kwart van die na 1 seconde. In figuur 34 is de groene grafiek de concentratie na 1 seconde, de rode grafiek na 4 seconden en de blauwe grafiek na 16 seconden. Je ziet dat de verspreiding van de moleculen steeds langzamer gaat.

## VOORBEELD zonnebloem

Een blad verliest water door diffusie van waterdamp door de huidmondjes. In het blad is de concentratie waterdamp  $0,025 \text{ kg m}^{-3}$  en buiten het blad is dit  $0,010 \text{ kg m}^{-3}$ . De diffusiecoëfficiënt van waterdamp in lucht is  $2,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Een huidmondje heeft een oppervlakte van  $8,0 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  en een lengte van  $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ . Zie figuur 35.

Een blad van een zonnebloem verliest  $5,0 \text{ ml}$  water per uur.

Een zonnebloem verdampt overdag (in 12 uur)  $1,8 \text{ liter}$  water.



Figuur 35

**Bereken hoeveel kg water per uur door één huidmondje gaat.**

- $\Delta C = 0,010 - 0,025 = -0,015 \text{ kg m}^{-3}$  |  $L = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  |  $D = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $J = -D \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x} \rightarrow J = -D \cdot \frac{\Delta C}{L}$
- $J = -D \cdot \frac{\Delta C}{L} \rightarrow J = -2,8 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{-0,015}{2,5 \cdot 10^{-5}} \rightarrow J = 0,0168 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$
- voor de getransporteerde massa geldt:  $m = J \cdot A \cdot t$
- $m = 0,00168 \cdot 8,0 \cdot 10^{-11} \cdot 60 \cdot 60 = 4,8384 \cdot 10^{-9} = 4,8 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$

**Hoeveel huidmondjes heeft dit blad?**

- $5,0 \text{ ml} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$
- aantal huidmondjes is  $\frac{5,0 \cdot 10^{-3}}{4,8384 \cdot 10^{-9}} = 1,0334 \cdot 10^6 = 1,0 \cdot 10^6$  huidmondjes

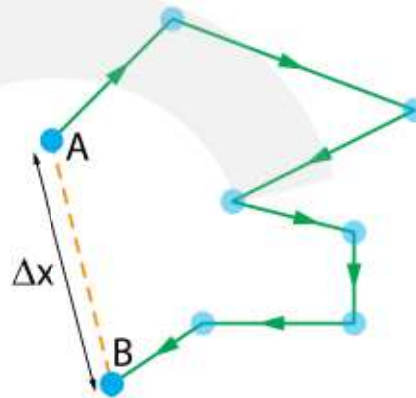
**Hoeveel bladeren heeft deze zonnebloem?**

- $5,0 \text{ ml}$  water per uur  $\rightarrow 5,0 \cdot 12 = 60 \text{ ml}$  water per dag
- aantal bladeren is  $\frac{1,8}{60 \cdot 10^{-3}} = 30$  bladeren

## Willekeurige wandeling (random walk)

Diffusie is het resultaat van een statistisch proces dat willekeurige wandeling (Engels: random walk) wordt genoemd. Hiermee wordt het volgende bedoeld. Een molecuul dat door een gas, een vloeistof, of een membraam beweegt volgt een zigzag pad, omdat het voortdurend tegen andere moleculen botst. Zie figuur 36. Bij iedere botsing verandert de grootte en de richting van de snelheid. Ieder molecuul volgt een ander zigzag pad. De verschillende paden geven samen een gemiddelde snelheid waarmee moleculen zich verspreiden.

**Diffusie ontstaat door willekeurige bewegingen van een groot aantal deeltjes.**



**Figuur 36** Zigzag beweging vanwege botsingen.

Figuur 36 zie je hoe een molecuul van A naar B beweegt. De totale afstand die het molecuul aflegt is veel groter dan de afstand tussen A en B. Vandaar dat bij diffusie de gemiddelde snelheid klein is. Als we de beweging van veel moleculen in rekening brengen vinden we voor de gemiddelde verplaatsing  $\Delta x$ :

$$\Delta x = \sqrt{2n \cdot D \cdot t}$$

- $\Delta x$  is de gemiddelde verplaatsing van een groot aantal moleculen in meter (m)
- $n$  is de dimensie (aantal beschikbare richtingen) van de diffusie ( $n = 1, 2$  of  $3$ )
- $D$  is de diffusiecoëfficiënt in vierkanter meter per seconde ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
- $t$  is de tijd sinds het begin van het diffusieproces in seconde (s)

### VOORBEELD bombardeerkever

Een bombardeerkever heeft een opvallende naam vanwege de manier waarop hij zich verdedigt. In zijn lijf bevinden zich chemicaliën die hij kan samenvoegen wanneer hij bedreigd wordt. Hierbij komt een substantie vrij die dodelijk is voor andere insecten.



De diffusiecoëfficiënt van de dodelijke moleculen in lucht is  $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Op 6,0 cm afstand bevindt zich een vijand.

### Na hoeveel tijd bereiken de dodelijke moleculen de vijand?

- $D = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  |  $\Delta x = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  |  $t = \dots \text{ s}$
- $\Delta x = \sqrt{6 \cdot D \cdot t}$  (diffusie in 3 dimensies)
- $0,06 = \sqrt{6 \cdot 2,0 \cdot 10^{-5} \cdot t} \rightarrow 0,06^2 = 6 \cdot 2,0 \cdot 10^{-5} \cdot t \rightarrow t = 30 \text{ s}$

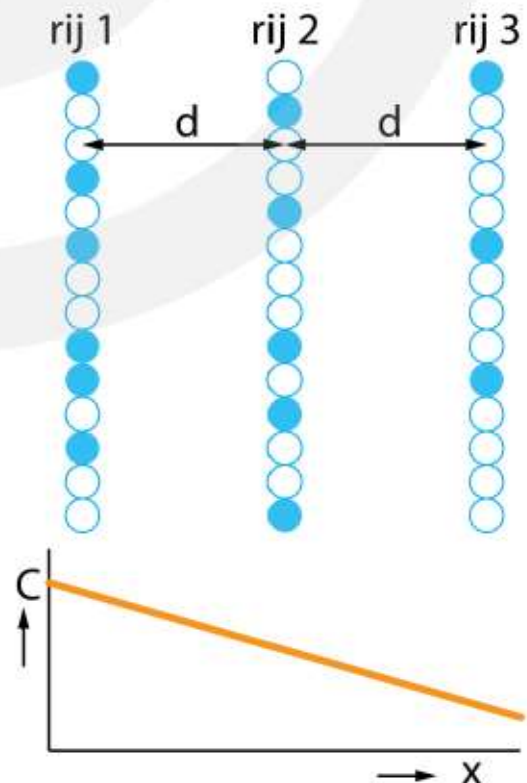
Diffusie door de lucht is een langzaam proces. Vandaar dat bij een bomardeerkever de samengevoegde chemicaliën een reactie geven waarbij druk wordt opgebouwd. Dit veroorzaakt een serie kleine explosies, waarbij het gif naar buiten wordt gespoten.

## Diffusiecoëfficiënt

Om de diffusiecoëfficiënt te berekenen moet je weten hoe de zigzagbeweging van botsende moleculen tot stand komt. Om het niet te ingewikkeld te maken bekijken we een proces waarbij de tijd en de afstand tussen twee botsingen constant is. We voeren het volgende gedachtenexperiment uit. Stel dat jij en je klasgenoten op tijdstip nul op een lijn staan. De opdracht is om iedere 5 seconde een stap naar links of een stap naar rechts te zetten. Om te kiezen of het links of rechts wordt krijg je een dobbelsteen. Gooi je 1, 3 of 5 dan zet je een stap naar links en gooi je 2, 4 of 6 dan zet je een stap naar rechts. De stapgrootte is voor iedereen hetzelfde, laten we zeggen 1,0 meter. Dit "random walk" proces leidt tot de diffusiewetten van Fick.

Omdat alleen stappen naar links of rechts worden gezet ontstaan er rijen met een afstand van 1,0 meter. Om de 5 seconde wisselt iedere leerling van rij, de helft stapt naar links en de helft stapt naar rechts.

Als er maar in één richting wordt bewogen noemen we dit één-dimensionale diffusie. Figuur 37 is een schematische voorstelling van één-dimensionale diffusie.



**Figuur 37** Eén-dimensionale diffusie. Bezette plaatsen zijn aangegeven met blauwe cirkels. Lege plaatsen zijn aangegeven met open cirkels.

Voor een willekeurige wandeling in **één dimensie** geldt:

$$D = \frac{1}{2} d^2 \cdot f$$

- $D$  is de diffusiecoëfficiënt in vierkanter meter per seconde ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
- $d$  is de sprongafstand in meter (m) (Eng. "distance")
- $f$  is de sprongfrequentie in Hz ( $\text{s}^{-1}$ )

Voor ons gedachtenexperiment vinden we  $D = \frac{1}{2} \cdot f^2 \cdot 0,2 = 0,10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Hoewel de situatie bij botsende moleculen ingewikkelder is dan van ons gedachtenexperiment met leerlingen is de uitkomst hetzelfde. De tijd en de afstand tussen twee botsingen is niet constant, maar als we met de gemiddelde botsingstijd en -afstand rekenen krijgen we hetzelfde resultaat.

De factor  $\frac{1}{2}$  komt doordat de moleculen de keuze hebben uit twee mogelijkheden (links of rechts). Bij **drie-dimensionale** diffusie is er een keuze uit zes mogelijkheden (links-rechts | voor-achter | boven-onder). Voor drie-dimensionale diffusie vinden we daarom:  $D = \frac{1}{6} d^2 \cdot f$ .

#### BEWIJS (voor de liefhebber)

- In figuur 37 zie je drie naast elkaar gelegen vlakken met moleculen. Met een vaste frequentie  $f$  (aantal sprongen per seconde) maken de moleculen een sprong naar links of een sprong naar rechts. We beschouwen de vlakken 1 en 2. Het aantal moleculen in vlak 1 is  $n_1$  en het aantal moleculen in vlak 2 is  $n_2$ . In één seconde springen er  $\frac{1}{2}n_1 \cdot f$  moleculen van vlak 1 naar vlak 2 en  $\frac{1}{2}n_2 \cdot f$  moleculen van vlak 2 naar vlak 1. De netto deeltjesstroom is:  $J = \frac{1}{2}(n_1 - n_2) \cdot f$ .
- De concentratie van de vlakken 1 en 2 zijn:  $C_1 = \frac{n_1}{d}$  en  $C_2 = \frac{n_2}{d}$ , waarbij  $d$  de afstand is tussen de vlakken. Zie figuur 37. Hieruit volgt:  $J = \frac{1}{2} \cdot (C_1 - C_2) \cdot d \cdot f$
- Voor de afgeleide van de concentratie geldt:  $\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{\Delta C}{\Delta x} = -\frac{C_1 - C_2}{d}$
- Hieruit volgt:  $C_1 - C_2 = -d \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x}$ . Als we dit invullen in de formule van  $J$  komen we op  $J = -\frac{1}{2}d^2 \cdot f \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x}$ .
- Met de limiet  $\Delta \rightarrow 0$  vinden we  $J = -\frac{1}{2}d^2 \cdot f \cdot \frac{dC}{dx}$ .
- Vergelijken we  $J = -D \cdot \frac{dC}{dx}$  met  $J = -\frac{1}{2}d^2 \cdot f \cdot \frac{dC}{dx}$  dan volgt hieruit  $D = \frac{1}{2}d^2 \cdot f$